第1回「ベクトル解析」 2022年10月4日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当：國谷

1　ベクトル

数の組を**ベクトル**という．例えば，$\mathbb{R}^2$ では

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

のように表される．**和**と**スカラー倍**は

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix} \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

のように計算できる．$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ でも同様である．特に $\mathbb{R}^2$ のベクトルを**平面ベクトル**，$\mathbb{R}^3$ のベクトルを**空間ベクトル**という．

平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ が**一次独立**であるとは，

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \lambda = \mu = 0$$

が成り立つことをいう．一次独立でないとき，**一次従属**という．$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ のベクトルに対しても同様に定義される．

2　内積

平面ベクトルの**内積**と**長さ**は

(内積)　$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
(長さ)　$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

で定義する．$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ でも同様である．ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす**角**を θ とするとき，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

が成り立つ．次の不等式は**コーシー・シュワルツの不等式**と呼ばれる．

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

これを利用して，次の**三角不等式**を証明できる．

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

演習問題 1

次の**平行四辺形の等式**を証明せよ．

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2\right).$$

3　外積

空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ の**外積** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

で定義される．$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，次の性質が成り立つ：

1) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4) $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \lambda\mathbf{b}$
5) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$（**スカラー3重積**）

ここで det は行列式を表す．

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ であるとき，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は**直交する**という．次の等式より，外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のいずれとも直交することがわかる．

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．次の等式より，外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しいことがわかる．

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta.$$

また，空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ のスカラー3重積の長さは，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の張る平行六面体の体積と等しいことがわかる．

演習問題 2

空間ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対し $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ と $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求めよ．
※ 外積では結合法則

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

は一般に成り立たない．

第 1 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 10 月 4 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題 1

次の平行四辺形の等式を証明せよ.

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2\left(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2\right).$$

解答　ベクトルの長さの定義より

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &=(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{a})+2(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{b})\\ &=|\mathbf{a}|^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

を得る．同様に

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &=(\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{a})-2(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{b})\\ &=|\mathbf{a}|^2-2(\mathbf{a},\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

を得る．(1) と (2) を辺々加えれば，求める等式が得られる.

演習問題 2

空間ベクトル

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

に対し $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ と $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ を求めよ.

※ 外積では結合法則

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

は一般に成り立たない.

解答　次のように計算できる.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{bmatrix}8\\12\\-13\end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-24\\16\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{bmatrix}-26\\13\\-4\end{bmatrix}.$$

第 2 回「ベクトル解析」 2022 年 10 月 11 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当：國谷

1　ベクトル場

空間内のある点に対し，スカラーに値を取る関数をスカラー場，ベクトルに値を取る関数を**ベクトル場**という．例えば，天気図においてある地点の気温からなる場はスカラー場，風向風速からなる場はベクトル場である．また，例えば，デカルト座標系では

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

はスカラー場であり，

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix}$$

はベクトル場である．

例題 1　次のベクトル場を図示せよ．

$$1)\ \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 2)\ \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$3)\ \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}.$$

2　勾配

f はスカラー場であり，C^1 級（1 回微分可能かつ導関数が連続）とする．このとき，f の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ は次で定義されるベクトル場である．

$$\mathrm{grad}\, f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla f.$$

ここで $\nabla = {}^t\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$ である（t は転置の記号）．f を $\mathrm{grad}\, f$ の**ポテンシャル**という．

例題 2（万有引力）　$f = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の勾配を求めよ．

演習問題 1

$f = xz - y$ とするとき，$\mathrm{grad}\, f^2$ と $\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, f$ を求めよ．

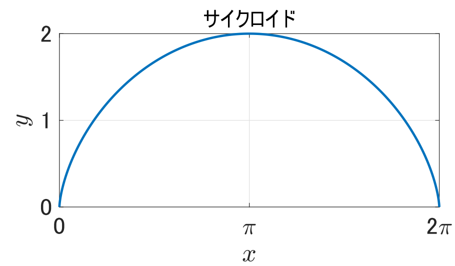
3　空間における曲線

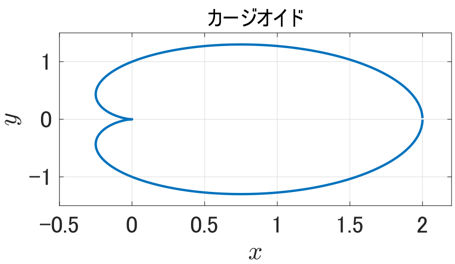
t をパラメータとするとき，ベクトルに値を取る関数

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad a \le t \le b$$

は，空間における**曲線**を表す．例えば，次のような曲線がある（$0 \le t \le 2\pi$）．

1) 円: $\mathbf{r}(t) = {}^t[\cos t, \sin t, 0]$
2) 螺旋: $\mathbf{r}(t) = {}^t[\cos t, \sin t, t]$
3) サイクロイド: $\mathbf{r}(t) = {}^t[t - \sin t, 1 - \cos t, 0]$
4) カージオイド:
$\mathbf{r}(t) = {}^t[(1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t, 0]$





例題 3　$x^2+y^2+1, z \in \mathbb{R}$ と $x+y+z=1$ の交わりである曲線をパラメータ表示せよ．

空間内の曲面 S を $f(x,y,z)=c$ で表す．S 上の曲線 $\mathbf{r}(t)$ が微分可能ならば，連鎖律より

$$\mathrm{grad}\, f \cdot \mathbf{r}' = 0$$

を得る．$\mathbf{r}'$ は接線ベクトルであり，それと直交する $\mathrm{grad}\, f$ は**法線ベクトル**である．

演習問題 2

次の曲線のパラメータ表示を求めよ．

$$x^2+y^2=4, \quad z = \mathrm{Arccos}\,\frac{x}{2}$$

第 2 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 10 月 11 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題 1

$f = xz - y$ とするとき，$\mathrm{grad}\, f^2$ と $\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, f$ を求めよ．

解答　$f^2 = x^2z^2 - 2xyz + y^2$．よって

$$\mathrm{grad}\, f^2 = \begin{bmatrix} 2xz^2 - 2yz \\ -2xz + 2y \\ 2x^2z - 2xy \end{bmatrix}.$$

また，

$$\mathrm{grad}\, f = \begin{bmatrix} z \\ -1 \\ x \end{bmatrix}$$

より，

$$\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

※ 同じベクトル同士の外積は $\mathbf{0}$（張られる平行四辺形の面積が 0 であることからもわかる）．

演習問題 2

次の曲線のパラメータ表示を求めよ．

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = \mathrm{Arccos}\, \frac{x}{2}$$

解答　$0 \le t \le 2\pi$ とするとき，

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t$$

と表せる．また

$$z = \mathrm{Arccos}\, \frac{2\cos t}{2} = \mathrm{Arccos}\, (\cos t)$$

である．Arccos の値域は $[0, \pi]$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} z &= \begin{cases} \mathrm{Arccos}\, (\cos t), & 0 \le t < \pi, \\ \mathrm{Arccos}\, (\cos(2\pi - t)), & \pi < t \le 2\pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi, \\ 2\pi - t, & \pi < t \le 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

である．よって

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{bmatrix}, & 0 \le t < \pi, \\ \\ \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 2\pi - t \end{bmatrix}, & \pi \le t \le 2\pi, \end{cases}$$

である．

第3回「ベクトル解析」 2022年10月18日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　発散

ベクトル場 $\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ は C^1 級とする．$\mathbf{F}$ の**発散** $\operatorname{div}\mathbf{F}$ は，次で定義されるスカラー場である．

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

記号 $\nabla = {}^t\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$ を用いれば

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

と表すことができる．

例題 1 次のベクトル場の発散を求めよ．

1) $\mathbf{F} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

2) $\mathbf{F} = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$,

3) $\mathbf{F} = xyz\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

発散の物理的意味は，流体の運動におけるある点での**流入と流出の差**である．小さな直方体 V を考える．流体の密度 ρ は x, y, z および時間 t にも依存するとする．$\mathbf{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$ を流れのベクトル場（速度場）とする．時間 Δt の間の V の質量損失を考えて，$\Delta t \to 0$ とすると，次の**連続の方程式**が得られる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

特に，流れが定常で時間によらないときは

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

である．また，密度 ρ が一定（非圧縮性）であれば

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

である．

2　回転

ベクトル場 $\mathbf{F}$ の**回転** $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ は，次で定義されるベクトル場である．

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

記号 ∇ を用いれば，$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ と表される．

演習問題

例題 1 のベクトル場の回転を求めよ．

回転の物理的意味を考えるために，剛体の回転に注目する．剛体の**角速度ベクトル** $\mathbf{w}$ は，方向が回転軸に沿ってとられ，大きさは角速度 $\omega > 0$ である．剛体上のある点の速度ベクトルを $\mathbf{v}$，位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とするとき，

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

が成り立つ．$\mathbf{w} = {}^t[0, 0, \omega]$ とすれば，

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$$

が得られる．したがって，剛体の回転の場合，速度場 $\mathbf{v}$ の回転は角速度ベクトル場 $\mathbf{w}$ と同じ方向を向き，大きさは角速度の 2 倍である．

勾配，発散，回転について次の等式が成り立つ（$f, g, \mathbf{F}$ は C^2 級とする）．

- $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$
- $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$
- $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$
- $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$
- $\operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$

ここで $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は**ラプラシアン**という．$\Delta f = 0$ を満たす関数 f を**調和関数**という．

第 3 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 10 月 18 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

例題 1 のベクトル場の回転を求めよ.

解答　1)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{bmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{bmatrix}$$

2)　第 1 成分は

$$-\frac{5}{2}\frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{5}{2}\frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0.$$

他の成分も同様に 0. よって $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

3)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x(z^2 - y^2) \\ y(x^2 - z^2) \\ z(y^2 - x^2) \end{bmatrix}$$

第 4 回「ベクトル解析」 2022 年 10 月 25 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　曲線の長さ

曲線 $\mathbf{r}(t) = {}^t[x(t), y(t), z(t)]$ は区間 $I = [a, b]$ 上 C^1 級であり，$|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ を満たすとする．このとき，$a \leq t \leq b$ に対して $\mathbf{r}(t)$ が描く曲線の長さ L は

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

で与えられる．また，曲線の弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)| dt$$

で与えられる．明らかに s は t について単調増加であり，$s(a) = 0$ かつ $s(b) = L$ である．

例題 1　次の曲線の長さを求めよ．

1) $\mathbf{r}(t) = {}^t[\cos t, \sin t, t]$, $0 \leq t \leq 1$.
2) $\mathbf{r}(t) = {}^t[t - \sin t, 1 - \cos t]$, $0 \leq t \leq 2$.

演習問題 1

次の曲線の長さを求めよ．

$$\mathbf{r}(t) = {}^t[t, \cosh t],\ 0 \leq t \leq 1.$$

2　スカラー場の線積分

曲線 $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ の軌跡を C と表す．C を含む領域で定義されるスカラー関数 f の線積分は

$$\int_C f(\mathbf{r})|d\mathbf{r}| := \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt$$

で定義される．$f(\mathbf{r}) = 1$ のとき，この線積分は曲線の長さ L に他ならない．

例題 2　$f(x, y, z) = x^2$ とし，$\alpha > 0$ を定数とするとき，

$$\mathbf{r}(t) = {}^t[\alpha\cos t, \alpha\sin t, \alpha t],\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

で与えられる曲線の軌跡を C とする．このとき，線積分 $\int_C f(\mathbf{r})|d\mathbf{r}|$ を求めよ．

3　ベクトル場の線積分

$\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ は C^1 級の曲線とし，その軌跡を C とする．$\mathbf{F}$ は C を含む領域で定義されるベクトル場とする．その線積分は次のように定義される．

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

$\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ および $\mathbf{r} = {}^t[x, y, z]$ とすれば，

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

と表すこともある．

例題 2　次の線積分を求めよ．ただし C は曲線 $\mathbf{r}$ の軌跡とする．

1) $\mathbf{r}(t) = {}^t[t, t^2, 1]$, $0 \leq t \leq 1$,
$$\int_C x^2 dx + xy dy + xz dz.$$
2) $\mathbf{r}(t) = {}^t[\alpha\cos t, \alpha\sin t, 0]$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
$$\int_C x dy,\ \int_C y dx.$$

線積分は一般に軌跡（積分路）C の選び方に依存する．例えば

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = {}^t[t, t, t],\ 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = {}^t[t, t, t^2],\ 0 \leq t \leq 1$$

はいずれも原点と $(1, 1, 1)$ を結ぶ曲線である．しかし，$\mathbf{F} = {}^t[5z, xy, x^2 z]$ とするとき，線積分 $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ と $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は異なる値となる．

演習問題 2

次の線積分を求めよ．

$$C : \mathbf{r}(t) = {}^t[\cos t, \sin t, 2t],\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$
$$\int_C 2z dx + x dy - y dz.$$

第 4 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 10 月 25 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題 1

次の曲線の長さを求めよ．

$$\mathbf{r}(t) = {}^t[t, \cosh t],\ 0 \leq t \leq 1.$$

解答　$\mathbf{r}'(t) = {}^t[1, \sinh t]$ なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 t} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 t} dt \\ &= \int_0^1 \cosh t dt \\ &= [\sinh t]_0^1 = \sinh 1 \end{aligned}$$

である．

演習問題 2

次の線積分を求めよ．

$$C : \mathbf{r}(t) = {}^t[\cos t, \sin t, 2t],\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\int_C 2z dx + x dy - y dz.$$

解答　$\mathbf{r}'(t) = {}^t[-\sin t, \cos t, 2]$ なので，

$$\begin{aligned} &\int_C 2z dx + x dy - y dz \\ &= \int_0^{2\pi} {}^t[4t, \cos t, -\sin t] \cdot {}^t[-\sin t, \cos t, 2] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4t\sin t + \cos^2 t - 2\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4t\sin t + \frac{\cos 2t + 1}{2} - 2\sin t) dt \\ &= [4t\cos t]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &\quad + \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} + 2\cos t\right]_0^{2\pi} \\ &= 8\pi + \pi = 9\pi \end{aligned}$$

第5回「ベクトル解析」 2022年11月1日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　重積分

平面 $\mathbb{R}^2$ における領域 S が

$$a \le x \le b, \quad p(x) \le y \le q(x)$$

で表されるとする．$f = f(x, y)$ は S を含む領域で定義されるスカラー関数とするとき，f の S 上の**重積分**は

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

のように計算できる．

例題 1　領域 S が

$$1 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le x^2$$

で与えられるとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_S (1+2x)e^{x+y}\, dxdy$$

$x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ に関する S での重積分は，次の等式によって，u と v に関する S^* での重積分に変換することができる．

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S^*} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

ここで

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

はヤコビ行列式という．

例題 2　領域 S が

$$x, y \ge 0, \ a \le x^2 + y^2 \le b \ \ (0 < a < b)$$

で与えられるとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_S \log(x^2+y^2)\, dxdy$$

演習問題 1

領域 S が $x^2 + y^2 \le 4$ で与えられるとき，重積分 $\displaystyle\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$ を求めよ．

2　グリーンの公式

C は自分自身とは交わることのない区分的に滑らかな閉曲線とし，C で囲まれる領域を S とする．$f = f(x, y)$ と $g = g(x, y)$ は S を含む領域で定義される C^1 級のスカラー関数とする．次の等式を**グリーンの公式**という．

$$\int_C f dx + g dy = \iint_S \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy.$$

C を原点中心の単位円周とするとき，グリーンの公式を使って，線積分

$$\int_C (y^2 - 7y)dx + (2xy + 2x)dy$$

を求めよう．$f = y^2 - 7y$, $g = 2xy + 2x$ とすると，グリーンの公式より

$$\iint_S \left[-(2y-7) + (2y+2) \right] dxdy = 9 \iint_S dxdy$$

である．右辺の重積分は S の面積 π に等しいので，求める値は 9π である．

グリーンの公式を用いると，領域 S の面積は

$$\iint_S dxdy = \int_C xdy = -\int_C ydx$$

のように計算できる．この等式を用いて楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ （$a, b > 0$）の面積は πab であることが確認できる．

演習問題 2

C を原点中心の半径 2 の円周とするとき，次の線積分を求めよ．

$$\int_C y^2 dx + (x + x^3 - y)dy$$

第 5 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 11 月 1 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題 1

領域 S が $x^2+y^2 \leq 4$ で与えられるとき，重積分 $\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

解答　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ 0\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$ とする．

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| =& \begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\\ =& r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\\ =& r\end{aligned}$$

に注意すると，求める重積分は

$$\begin{aligned}&\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4-r^2}rdrd\theta\\ &=\int_0^{2\pi}d\theta\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\\ &=2\pi\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

演習問題 2

C を原点中心の半径 2 の円周とするとき，次の線積分を求めよ．

$$\int_C y^2dx+(x+x^3-y)dy$$

解答　$f=y^2,\ g=x+x^3-y$ としてグリーンの公式を用いると

$$\begin{aligned}&\int_C y^2dx+(x+x^3-y)dy\\ &=\iint_{x^2+y^2\leq 4}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdy\\ &=\iint_{x^2+y^2\leq 4}\left(-2y+1+3x^2\right)dxdy\end{aligned}$$

を得る．演習問題 1 と同様の計算を行うと

$$\begin{aligned}&\int_C y^2dx+(x+x^3-y)dy\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^2(-2r\sin\theta+1+3r^2\cos^2\theta)rdrd\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}r^3\sin\theta+\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{4}r^4\cos^2\theta\right]_0^2d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{16}{3}\sin\theta+2+12\cos^2\theta\right)d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{16}{3}\sin\theta+2+6(\cos 2\theta+1)\right]d\theta\\ &=\left[\frac{16}{3}\cos\theta+8\theta+3\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\ &=16\pi.\end{aligned}$$

第 6 回「ベクトル解析」 2022 年 11 月 8 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　グリーンの公式

グリーンの公式は

$$\int_C f dx + g dy = \iint_S \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy$$

である（各記号の意味は前回と同様）．領域 S が

$$a \leq x \leq b, \quad u(x) \leq y \leq v(x)$$

および

$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

で表される特別な場合には，重積分の計算より

$$\int_C f dx = -\iint_S \frac{\partial f}{\partial y} dx dy,$$
$$\int_C g dy = \iint_S \frac{\partial g}{\partial x} dx dy$$

が容易に確かめられるので，グリーンの公式が成り立つことが分かる．

$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ であるとき，$C : \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ に沿った線積分は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

と計算できる．

例題 1　$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,(x^2yz)$，$C : \mathbf{r}(t) = {}^t[a+t, b+t, c]$ $(0 \leq t \leq 1)$ とするとき，線積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．

2　曲面

空間内の**曲面**は，2 つのパラメータ u, v を用いたベクトル関数

$$\mathbf{r}(u, v) = {}^t[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

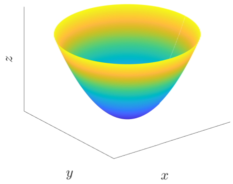
で表すことができる．

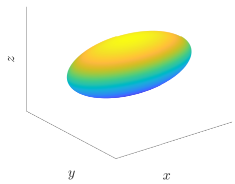
例題 2　次の曲面をパラメータ表示せよ．

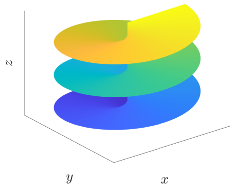
1) 円柱：$x^2 + y^2 = 4$, $-1 \leq z \leq 1$.
2) 球：$x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
3) 円錐：$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$.

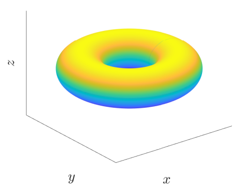
その他，パラメータ表示できる曲面には次のようなものがある．

回転放物面　${}^t[u\cos v, u\sin v, u^2]$
双曲放物面　${}^t[au\cosh v, bu\sinh v, u^2]$
双曲面　${}^t[a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u]$
楕円面　${}^t[a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u]$
らせん面　${}^t[u\cos v, u\sin v, v]$
トーラス　${}^t[(R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u]$


(a) 回転放物面


(b) 楕円面


(c) らせん面


(d) トーラス

$\mathbf{r}(u, v)$ で表される曲面が十分滑らかであるとき，曲面上のある点における**接平面**は，その点における偏微分ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

が張る平面である．それに直交する**法線ベクトル**は

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

である．

演習問題

次の曲面をパラメータ表示し，法線ベクトルを求めよ．

1) 楕円柱：$9x^2 + 4y^2 = 36$
2) 球：$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$

第 6 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 11 月 8 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

次の曲面をパラメータ表示し，法線ベクトルを求めよ．

1) 楕円柱 : $9x^2 + 4y^2 = 36$
2) 球 : $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$

解答　1) パラメータ表示は

$$\mathbf{r}(u,v) = {}^t[2\cos u, 3\sin u, v]$$

である．法線ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{n} =& \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -2\sin u \\ 3\cos u \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 3\cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

である．

2) パラメータ表示は

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 2\cos u\cos v \\ 1 + 2\cos u \sin v \\ -2 + 2\sin u \end{bmatrix}$$

である．法線ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{n} =& \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ =& \begin{bmatrix} -2\sin u\cos v \\ -2\sin u \sin v \\ 2\cos u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2\cos u \sin v \\ 2\cos u\cos v \\ 0 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} -4\cos^2 u\cos v \\ -4\cos^2 u \sin v \\ -4\cos u \sin u \end{bmatrix}\end{aligned}$$

である．

第 7 回「ベクトル解析」 2022 年 11 月 15 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　曲面の表面積

パラメータ u, v を用いて

$$\mathbf{r}(u,v) = {}^t[x(u,v), y(u,v), z(u,v)],\ (u,v) \in D$$

で表される曲面 S を考える．ここで D は平面内の領域である．$(u_0, v_0) \in D$ とし，$\Delta u, \Delta v$ を微小量とするとき，平面の 4 点

$$(u_0, v_0),\ (u_0 + \Delta u, v_0),\ (u_0, v_0 + \Delta v),\ (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

を曲面 S に写した 4 点

$$\mathbf{r}(u_0, v_0),\ \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0),\ \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v),\ \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

が張る四角形の面積を求める．これは接線ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$$

が張る平行四辺形の面積で近似され，外積の性質より

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v$$

である．したがって**面積要素** dA を

$$dA := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$$

で定義するとき，曲面 S の表面積 $A(S)$ は

$$A(S) = \int_S dA = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$$

で計算できる．

例題 1　上の計算式を用いて，半径 $a > 0$ の球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の表面積が $4\pi a^2$ であることを示せ．

演習問題 1

次の式で表される曲面（トーラス）の表面積を求めよ．ただし $R > r$，$0 \le u, v \le 2\pi$ である．

$${}^t[(R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u]$$

曲面 S が関数 $f(x,y)$ のグラフであるとき，

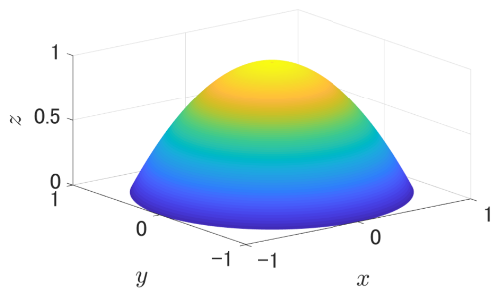
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y) = {}^t[x, y, f(x,y)]$$

であることから，面積要素は

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

となる．

例題 2　$x^2 + y^2 + z = 1$ で表される曲面の表面積を求めよ．



2　面積分

f は S を含む領域で定義された連続関数とする．このとき，f の S 上の面積分は

$$\int_S f dA = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$$

で定義される．$f = 1$ の場合が表面積 $A(S)$ である．

例題 3　面積分 $\displaystyle\int_S x dA$ を求めよ．ここで S は次の関係式で定義される曲面とする．

$$z = x^2 + y, \quad 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1.$$

演習問題 2

面積分 $\displaystyle\int_S (\cos x + \sin y) dA$ を求めよ．ここで S は次の関係式で定義される曲面とする．

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \ge 0.$$

第7回「ベクトル解析」演習問題解答 2022年11月15日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題 1

次の式で表される曲面（トーラス）の表面積を求めよ．ただし $R > r$，$0 \leq u, v \leq 2\pi$ である．

$${}^t[(R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u]$$

演習問題 2

面積分 $\displaystyle\int_S (\cos x + \sin y)dA$ を求めよ．ここで S は次の関係式で定義される曲面とする．

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0.$$

解答

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -(R+r\cos u)\sin v \\ (R+r\cos u)\cos v \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -r\cos u(R+r\cos u)\cos v \\ -r\cos u(R+r\cos u)\sin v \\ -r\sin u(R+r\cos u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{r^2(R+r\cos u)^2} \\ &= r(R+r\cos u) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} A(S) =& \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos u)dudv \\ =& 2\pi\left[r(Ru+r\sin u)\right]_0^{2\pi} \\ =& 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

解答　$z = 1-x-y = f(x,y)$, $0 \leq x \leq 1-y$, $0 \leq y \leq 1$ である．面積要素は

$$dA = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

よって求める面積分は

$$\begin{aligned} &\int_S (\cos x + \sin y)dA = \int_0^1\int_0^{1-y}(\cos x + \sin y)\sqrt{3}dxdy \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \left[\sin(1-y) + (1-y)\sin y\right]dy \\ &= \sqrt{3}\left\{\left[\cos(1-y) - (1-y)\cos y\right]_0^1 - \int_0^1 \cos y dy\right\} \\ &= \sqrt{3}\left(2 - \cos 1 - \sin 1\right). \end{aligned}$$

第 8 回「ベクトル解析」 2022 年 11 月 29 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書 : E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館 担当 : 國谷

1 流束積分

再び，パラメータ u, v を用いて

$\mathbf{r}(u,v) = {}^t[x(u,v), y(u,v), z(u,v)],\ (u,v) \in D$

で表される曲面 S を考える．ここで D は平面内の領域である．$\mathbf{F}$ は S を含む領域で定義されるベクトル場とする．S の（接平面の）単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n} := \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

と表す．このとき，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S に垂直な方向の成分は $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ であり，S を通過する流束の量を表すスカラー場である．**流束積分**は，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ の面積分として

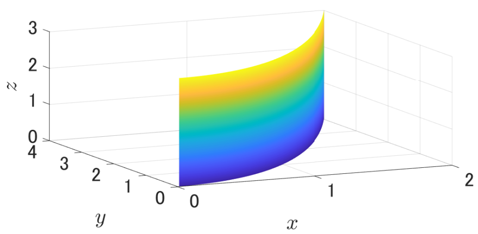
$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dudv\end{aligned}$$

で定義される．

例題 1 曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$\begin{aligned}&S : y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3,\\ &\mathbf{F} = {}^t[3z^2, 6, 6xz]\end{aligned}$$

で定める．流束積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．



演習問題 1

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$\begin{aligned}&S : \mathbf{r} = {}^t[u, \cos v, \sin v],\\ &\qquad -4 \le u \le 4,\ 0 \le v \le \pi,\\ &\mathbf{F} = {}^t[\sinh yz, 0, y^4],\end{aligned}$$

で定める．流束積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

2 曲面の向き

単位法線ベクトルは $\mathbf{n}$ の代わりに $-\mathbf{n}$ を選ぶこともできる．このとき，流束積分の値は -1 倍される．このような変更を実現する方法として，パラメータ u, v を入れ替えることが挙げられる．実際，

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

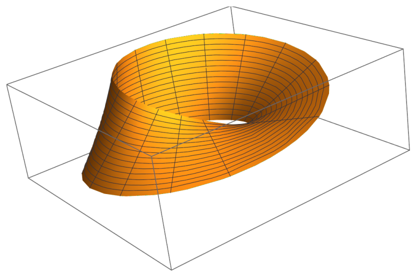
だからである．

例題 2 例題 1 において曲面 S を

$$S : \mathbf{r} = {}^t[v, v^2, u],\ 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2$$

と表すとき，流束積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

曲面 S 上の任意の点において，単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の方向を連続的かつ一意的に決めることができるとき，S は**向き付けられる**という．向き付けられない曲面の例として，**メビウスの帯**が挙げられる．



$\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ であるとき，流束積分は

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_S f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy \quad (1)$$

と表すこともできる．右辺の各積分の正負は，$\mathbf{n}$ の各成分の正負に依存する．

例題 3 式 (1) を用いて，例題 1 の流束積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

演習問題 2

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$\begin{aligned}&S : x^2 + 4y^2 = 1,\ x, y \ge 0,\ 0 \le z \le 1,\\ &\mathbf{F} = {}^t[y^3, x^3, z^3],\end{aligned}$$

で定める．流束積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

第 8 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 11 月 29 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当：國谷

演習問題 1

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : \mathbf{r} = {}^t[u, \cos v, \sin v],$$
$$-4 \le u \le 4,\ 0 \le v \le \pi,$$
$$\mathbf{F} = {}^t[\sinh yz, 0, y^4],$$

で定める．流束積分 $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

解答

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{bmatrix},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos v \\ -\sin v \end{bmatrix},$$

である．よって

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$
$$= \int_0^{\pi} \int_{-4}^{4} \begin{bmatrix} \sinh(\cos v \sin v) \\ 0 \\ \cos^4 v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos v \\ -\sin v \end{bmatrix} du dv$$
$$= \int_0^{\pi} \int_{-4}^{4} \cos^4 v(-\sin v) du dv$$
$$= 8 \left[\frac{\cos^5 v}{5} \right]_0^{\pi} = -\frac{16}{5}.$$

演習問題 2

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : x^2 + 4y^2 = 1,\ x, y \ge 0,\ 0 \le z \le 1,$$
$$\mathbf{F} = {}^t[y^3, x^3, z^3],$$

で定める．流束積分 $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

解答　パラメータ表示すると

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos u \\ \dfrac{\sin u}{2} \\ v \end{bmatrix}, \quad 0 \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le v \le 1$$

である．このとき

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \dfrac{\cos u}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos u}{2} \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix},$$

である．よって

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{\sin^3 u}{8} \\ \cos^3 u \\ v^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\cos u}{2} \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} du dv$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^3 u \cos u}{16} + \cos^3 u \sin u \right) du$$
$$= \left[\frac{\sin^4 u}{64} - \frac{\cos^4 u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{64} + \frac{1}{4} = \frac{17}{64}.$$

第 9 回「ベクトル解析」 2022 年 12 月 6 日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

ストークスの公式

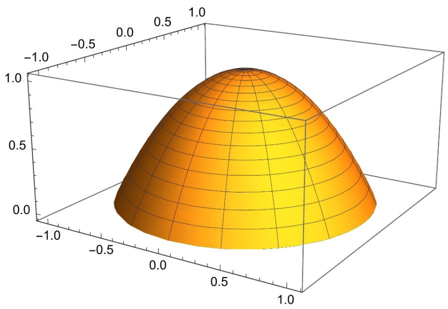
曲面 S は区分的に滑らかで向き付けられており，境界 ∂S は区分的に滑らかな単純閉曲線とする．また，ベクトル場 $\mathbf{F}$ は C^1 級とする．次の式は**ストークスの公式**と呼ばれる．

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

例題 1　曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : z = 1-(x^2+y^2),\quad z \geq 0,$$
$$\mathbf{F} = {}^t[y, z, x]$$

で定める．ストークスの公式が成り立つことを確かめよ．



ストークスの公式はグリーンの公式（第 5 回）の一般化である．実際，C を xy 平面内の単純閉曲線とし，$C=\partial S$ で囲まれる領域を S とする．$f(x,y), g(x,y)$ は S を含む領域で C^1 級であるとし，$\mathbf{F} = {}^t[f, g, 0]$ とすると，ストークスの公式の右辺は

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C f dx + g dy$$

であり，左辺は

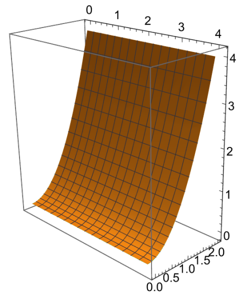
$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot \mathbf{n} dA\\ &= \iint_S \left(-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy\end{aligned}$$

である．よって，グリーンの公式が得られる．

例題 2　曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : z = y^2,\quad 0 \leq x \leq 4,\quad 0 \leq y \leq 2,$$
$$\mathbf{F} = {}^t[e^z, e^z \sin y, e^z \cos y]$$

で定める．$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．

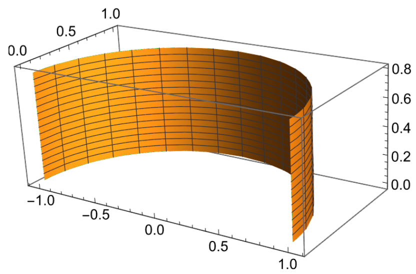


演習問題

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : x^2+y^2 = 1,\quad y \geq 0,\quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4},$$
$$\mathbf{F} = {}^t[0, 0, x\cos z]$$

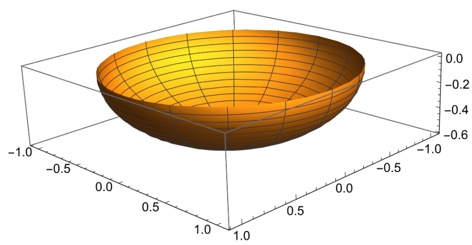
で定める．$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．



例題 3　曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : x^2+y^2+3z^2 = 1,\quad z \leq 0,$$
$$\mathbf{F} = {}^t[y, -x, x^3y^2z]$$

で定める．$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．



第 9 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 12 月 6 日

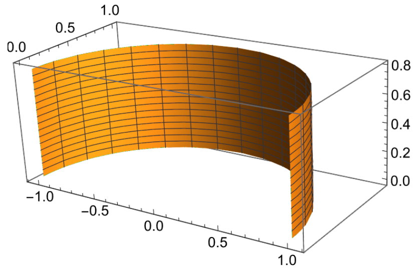
教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$S : x^2 + y^2 = 1,\quad y \geq 0,\quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4},$$
$$\mathbf{F} = {}^t[0, 0, x\cos z]$$

で定める．$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．



解答　ストークスの公式より $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ なので，$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めればよい．

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos z \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．また，

$$\mathbf{r} = {}^t[\cos u, \sin u, v],\ 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{4}$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} du dv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} \sin u(-\cos v) du dv \\
&= [-\cos u]_0^{\pi} [-\sin v]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

※ パラメータ u, v の取り方で正負が変わるので，$\sqrt{2}$ でも正解です．

第 10 回「ベクトル解析」 2022 年 12 月 13 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書 : E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当 : 國谷

ストークスの公式の証明

ストークスの公式

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

を曲面 S がグラフの場合に証明する.

$$S : \mathbf{r}(x, y) = {}^t[x, y, k(x, y)],$$
$$(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

ここで D は平面上の領域で, k は C^1 級関数とする. $d\mathbf{A}$ は

$$d\mathbf{A} = {}^t[-k_x, -k_y, 1]dxdy$$

であることに注意（k_x は x, k_y は y についての偏微分を表す.）すると, ストークスの公式の左辺は

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \iint_D [(h_y - g_z)(-k_x) + (f_z - h_x)(-k_y) + g_x - f_y]dxdy \quad (1)$$

となる. ただし $F = {}^t[f, g, h]$ とする. 一方, $dz = k_x dx + k_y dy$ に注意すると, ストークスの公式の右辺は

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} f dx + g dy + h dz = \int_{\partial D} (f + hk_x)dx + (g + hk_y)dy$$

を得る. グリーンの公式より

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(g + hk_y) - \frac{\partial}{\partial y}(f + hk_x)\right] dxdy$$

であり, これを計算すると (1) と同じ式を得る. よって

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つ.

線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ は一般に軌跡 C に依存する. ある f が存在して $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ が成り立つならば, 線積分は C の端点のみに依存し, 途中の経路の選び方に依らない. 逆も成り立つ.

C を含む領域 D は単連結であり, $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ならば, 線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ は C の端点のみに依存し, 途中の経路に依らない. この証明にはストークスの定理を利用できる.

例題 1　次のベクトル場 $\mathbf{F}$ の線積分が積分経路に依存するかどうか答えよ. 依存しない場合は, 始点を $(0, 0, 0)$, 終点を (a, b, c) とする軌跡 C に対する線積分を求めよ.

1) $\mathbf{F} = {}^t\left[2xy^2, 2x^2y, 1\right]$
2) $\mathbf{F} = {}^t\left[z\sinh xz, 0, -x\sinh xz\right]$

演習問題

次のベクトル場 $\mathbf{F}$ の線積分が積分経路に依存するかどうか答えよ. 依存しない場合は, 始点を $(0, 0, 0)$, 終点を (a, b, c) とする軌跡 C に対する線積分を求めよ.

1) $\mathbf{F} = {}^t\left[y, -zx, z\right]$
2) $\mathbf{F} = {}^t\left[yz, xz, xy\right]$

例題 2　f, g は $\mathbb{R}^3$ 上の C^2 級関数とし, C は単純閉曲線とする. 次の公式を示せ.

1) $\mathrm{rot}\,(f\nabla g) = (\nabla f) \times (\nabla g)$.
2) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0.$

第 10 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 12 月 13 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

次のベクトル場 $\mathbf{F}$ の線積分が積分経路に依存するかどうか答えよ．依存しない場合は，始点を $(0,0,0)$，終点を (a,b,c) とする軌跡 C に対する線積分を求めよ．

1) $\mathbf{F} = {}^t[y, -zx, z]$
2) $\mathbf{F} = {}^t[yz, xz, xy]$

解答　1)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ -zx \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ -z-1 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ なので，線積分は積分経路に依存する．

2)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ なので，線積分は積分経路に依存しない．$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ とするとき，

$$f_x = yz, \quad f_y = xz, \quad f_z = xy$$

である．それぞれ積分すると

$$f = xyz + g_1(y,z) = xyz + g_2(x,z) = xyz + g_3(x,y)$$

を得る．これが成り立つのは $g_1 = g_2 = g_3 = \tilde{c}$ (定数) のときのみ．求める積分は

$$f(a,b,c) - f(0,0,0) = abc + \tilde{c} - \tilde{c} = abc.$$

第11回「ベクトル解析」 2022年12月20日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

ガウスの公式

Ω は3次元空間の有界領域であり，その境界 $S = \partial\Omega$ は区分的に滑らかな曲面とする．このとき，次の**ガウスの公式**が成り立つ．

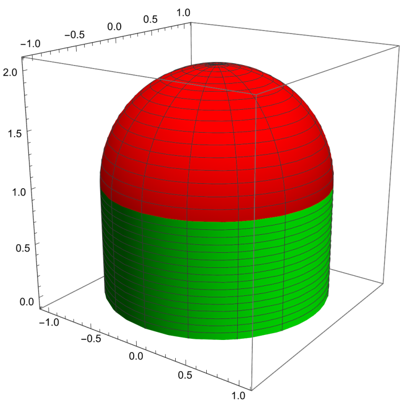
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F} dV.$$

ただし $\mathbf{F}$ は C^1 級であり，単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は S の外側に向かう．

例題1 曲面 S は次の曲面 S_0, S_1, S_2 の合併 $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ とする．

$$\begin{aligned} &S_0 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, \quad z \geq 1, \\ &S_1 : x^2+y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ &S_2 : x^2+y^2 \leq 1, \quad z = 0. \end{aligned}$$

S で囲まれる領域を Ω とし，$\mathbf{F} = {}^t[x, y, 1]$ とするとき，ガウスの公式が成り立つことを確かめよ．



$\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ であるとき，ガウスの公式は次のように表すこともできる．

$$\int_S f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dV$$

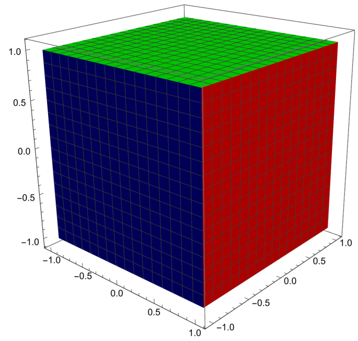
例題2 曲面 S は球面 $x^2+y^2+z^2 = 4$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_S 7xdydz - zdxdy$ を求めよ．

演習問題

曲面 S は立方体 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ の境界面とし，ベクトル場 $\mathbf{F}$ を

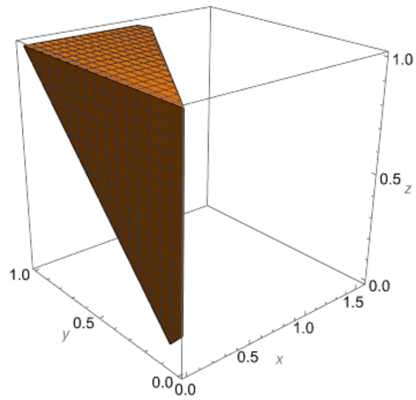
$$\mathbf{F} = {}^t[e^x, e^y, e^z]$$

で定める．$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．



例題3 曲面 S とベクトル場 $\mathbf{F}$ が次のように与えられるとき，$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

1) $S : x^2+y^2+z^2 = 1$, $\mathbf{F} = {}^t[2x, y^2, z^2]$.
2) $S : 4x^2+y^2+9z^2 = 36$, $\mathbf{F} = {}^t[9x, y\cosh^2 x, -z\sinh^2 x]$.
3) $S : 0 \leq x \leq z, x \leq y \leq z, 0 \leq z \leq 1$ の境界面，$\mathbf{F} = {}^t[\sin x, y, z]$.



例題4 S は単位球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ であるとき，積分 $\displaystyle\int_S (x^2+y+z)dA$ を求めよ．

第 11 回「ベクトル解析」演習問題解答 2022 年 12 月 20 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

曲面 S は立方体 $|x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1$ の境界面とし，ベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} = {}^t[e^x, e^y, e^z]$$

で定める．$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

解答　ガウスの公式より

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$
$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (e^x + e^y + e^z) dx dy dz$$
$$= 4 \left(\int_{-1}^1 e^x dx + \int_{-1}^1 e^y dy + \int_{-1}^1 e^z dz \right)$$
$$= 12(e - e^{-1}).$$

第12回「ベクトル解析」 2022年12月27日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　ガウスの公式の証明

ガウスの公式

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

を，領域 Ω が次の形であるときに証明する．

$$\Omega: \ g(x,y) \le z \le h(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

境界 $S = \partial\Omega$ を次のように分ける．

$$\begin{aligned} &S_0 : z = g(x,y),\ (x,y) \in D, \\ &S_1 : z = h(x,y),\ (x,y) \in D, \\ &S_2 = S \setminus (S_0 \cup S_1). \end{aligned}$$

$\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ であるとき，ガウスの公式は

$$\begin{aligned} &\int_S f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

と表される．今，

$$\int_S f_3 dxdy = \int_\Omega \frac{\partial f_3}{\partial z} dV$$

を示す．S_2 上では $dx = 0$ または $dy = 0$ なので，

$$\begin{aligned} &\int_S f_3 dxdy = \int_{S_1} f_3 dxdy - \int_{S_0} f_3 dxdy \\ &= \iint_D f_3(x,y,h(x,y)) dxdy \\ &\quad - \iint_D f_3(x,y,g(x,y)) dxdy \\ &= \iint_D \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dzdxdy \ = \int_\Omega \frac{\partial f_3}{\partial z} dV \end{aligned}$$

となる．

演習問題

$\mathbf{F} = {}^t[\cos y, \sin x, \cos z]$,
$S : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2$ の境界面

に対し，$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

2　ガウスの公式の応用：熱方程式

ある物体内の領域を Ω とし，その境界を S とする．物体内の点 $(x,y,z) \in \Omega$ の時刻 t における温度を $U = U(x,y,z,t)$ と表すとき，次の**熱方程式**が成り立つ．

$$\frac{\partial U}{\partial t} = d\Delta U.$$

ここで d は拡散係数，$\Delta = \nabla \cdot \nabla$ はラプラシアンと呼ばれる．

熱方程式は，ガウスの公式によって導出できる．物体内の熱流の速度ベクトル $\mathbf{v}$ は，温度勾配 $\operatorname{grad} U$ に比例することが知られている：

$$\mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U, \quad K > 0.$$

単位時間に Ω を出る熱量は $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ であるが，ガウスの公式より

$$\begin{aligned} &\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} dV \\ &= -K \int_\Omega \operatorname{div} (\operatorname{grad} U) dV = -K \int_\Omega \Delta U dV \end{aligned}$$

である．一方，物体の比熱を σ，密度を ρ とするとき，物体の全熱量は $\int_\Omega \sigma\rho U dV$ なので，単位時間に Ω を出る熱量は

$$-\int_\Omega \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} dV$$

でもある．上の式と合わせると

$$\int_\Omega \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - K\Delta U \right) dV = 0$$

を得るが，これが物体内の任意の領域 Ω に対して成り立つことから，

$$\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - K\Delta U = 0$$

となる．$d = K/(\sigma\rho)$ とすれば，熱方程式を得る．

第12回「ベクトル解析」演習問題解答 2022年12月27日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当：國谷

演習問題

$$\mathbf{F} = {}^t[\cos y, \sin x, \cos z],$$
$S : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2$ の境界面

に対し，$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

解答　ガウスの公式より

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$
$$= \int_{x^2+y^2\leq 4} \left[\int_0^2 (-\sin z) dz\right] dxdy$$
$$= \int_{x^2+y^2\leq 4} [\cos 2 - 1]\, dxdy$$
$$= 4\pi(\cos 2 - 1).$$

演習問題（追加分）

$$\mathbf{F} = {}^t[x^3, y^3, z^3],$$
$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$（球面）

に対し，$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

解答　ガウスの公式より

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = 3 \int_{x^2+y^2+z^2\leq 9} (x^2+y^2+z^2) dxdydz.$$

次のように極座標変換を行う：

$$x = r\cos v \cos u,\quad y = r\cos v \sin u,\quad z = r \sin v,$$
$$0 \leq r \leq 3,\quad 0 \leq u \leq 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

このとき

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 J drdudv.$$

ただし，J はヤコビ行列式であり

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_u & x_v \\ y_r & y_u & y_v \\ z_r & z_u & z_v \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \cos v \cos u & -r\cos v \sin u & -r \sin v \cos u \\ \cos v \sin u & r \cos v \cos u & -r \sin v \sin u \\ \sin v & 0 & r\cos v \end{vmatrix}$$
$$= r^2 \cos v.$$

よって

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 \cos v drdudv$$
$$= 3 \left[\sin v\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3$$
$$= \frac{2916\pi}{5}.$$

第13回「ベクトル解析」 2023年1月17日

教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

1　グリーンの定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域とし，その境界 S は区分的に滑らかな曲面とする．f, g は Ω 上の C^2 級関数とし，$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, g = \nabla g$ とする．基本性質 $\mathrm{div}\,(f\mathbf{F}) = f\mathrm{div}\,\mathbf{F} + \nabla\mathbf{f}\cdot\mathbf{F}$ より

$$\mathrm{div}\,(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$$

が成り立つ．$f\nabla g$ にガウスの公式を適用すると，

$$\begin{aligned}\int_S f\nabla g \cdot d\mathbf{A} &= \int_\Omega \mathrm{div}\,(f\nabla g)dV \\ &= \int_\Omega (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)dV\end{aligned}$$

を得る．S の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とし，

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \mathbf{n}$$

とすると，次の等式が得られる（グリーンの定理）．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [f\Delta f + (\nabla f)^2]dV = \int_S f\frac{\partial f}{\partial n}dA, \\ &\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dA.\end{aligned}$$

グリーンの定理を用いると，次の定理を示すことができる．

定理1　ϕ は Ω 上の C^2 級関数で，$\Delta\phi = 0$ を満たす（調和関数）とする．S 上 $\phi = 0$，あるいは S 上 $\partial\phi/\partial n = 0$ が満たされるならば，ϕ は Ω 上定数である．

定理2　ρ は Ω 上の連続関数で，f, g は S 上の関数とする．ポアソン方程式 $\Delta\phi = \rho$ の解で，S 上 $\phi = f$，あるいは S 上 $\partial\phi/\partial n = g$ を満たすものは高々1つしか存在しない（または高々定数の差しかない）．

演習問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域とし，その境界 S は区分的に滑らかな曲面とする．u, v, w は Ω 上の C^2 級関数とするとき，次の等式が成り立つかどうか答えよ．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega w\nabla u\cdot\nabla v dV \\ &= \int_S wu\nabla v\cdot d\mathbf{A} - \int_\Omega u\nabla\cdot(w\nabla v)dV\end{aligned}$$

2　マクスウェルの方程式

$\mathbf{E}$ は電界，$\mathbf{H}$ は磁界，$\mathbf{D}$ は電束密度，$\mathbf{B}$ は磁束密度，ρ は電荷密度，$\mathbf{i}$ は電流密度とする．次の4つの方程式は**マクスウェルの方程式**と呼ばれる：

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

第2式の div を取ると，**連続の方程式**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{i} = 0$$

が得られる．また，ガウスの公式を用いると

$$\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \rho dV, \quad \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$$

を得る．真空中では $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ が成り立つ．真空中で電荷や電流が無いとき，マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0\end{aligned}$$

となる．$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$ を用いると，

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2\Delta\mathbf{E} = 0, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}},$$

を得る．これは**波動方程式**と呼ばれる．C^2 級の関数 f に対し，$E(x,t) = f(x - vt)$ および $f(x+vt)$ は，1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} = 0,$$

を満たす．

第 13 回「ベクトル解析」演習問題解答 2023 年 1 月 17 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域とし，その境界 S は区分的に滑らかな曲面とする．u, v, w は Ω 上の C^2 級関数とするとき，次の等式が成り立つかどうか答えよ．

$$\int_\Omega w\nabla u \cdot \nabla v dV$$
$$= \int_S wu\nabla v \cdot d\mathbf{A} - \int_\Omega u\nabla \cdot (w\nabla v) dV$$

解答　$f = wu,\ g = v$ としてグリーンの定理を用いると

$$\int_S wu\nabla v \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega [wu\Delta v + \nabla(wu) \cdot \nabla v] dV$$

を得る．ここで

$$\nabla(wu) = w\nabla u + u\nabla w$$

に注意すると

$$\int_S wu\nabla v \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega w\nabla u \cdot \nabla v dV + \int_\Omega [wu\Delta v + u\nabla w \cdot \nabla v] dV$$

を得る．また

$$u\nabla \cdot (w\nabla v) = uw\Delta v + u\nabla w \cdot \nabla v$$

であることから

$$\int_S wu\nabla v \cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega w\nabla u \cdot \nabla v dV + \int_\Omega u\nabla \cdot (w\nabla v) dV$$

を得る．よって問題の等式は成り立つ．

第 14 回「ベクトル解析」 2023 年 1 月 23 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書 : E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当 : 國谷

微分形式

各 $p = 0, 1, 2, 3$ に対して，次のように定義されるものを（3 次元の）p **次微分形式**あるいは **p-形式**という．

$(p = 0)$ f
$(p = 1)$ $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
$(p = 2)$ $g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy$
$(p = 3)$ $h dx \wedge dy \wedge dz$

ここで f, f_i, g_i, h $(i = 1, 2, 3)$ は Ω 上定義される無限回微分可能な関数であり，$\wedge$ は結合則，分配則および**交代性**

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \quad (\text{特に}, dx \wedge dx = 0)$$

を満たす**ウェッジ積（外積）**である．2-形式 $dy \wedge dz$ は面積要素 $dydz$，3-形式 $dx \wedge dy \wedge dz$ は体積要素 $dxdydz = dV$ と同一視できる．

df は f の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

とする．また，ベクトル場 $\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ と $\mathbf{G} = {}^t[g_1, g_2, g_3]$ に対して

$$\omega_{\mathbf{F}} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz,$$
$$\eta_{\mathbf{G}} = g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy,$$

と表す．このとき，$df = \omega_{\mathrm{grad}\, f}$ や

$$\omega_{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \eta_{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{A}$$

が成り立つ．1-形式 $\omega_{\mathbf{F}}$ および 2-形式 $\eta_{\mathbf{G}}$ の**外微分**を次で定義する．

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{F}} &= df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz, \\ d\eta_{\mathbf{G}} &= dg_1 \wedge dy \wedge dz + dg_2 \wedge dz \wedge dz \\ &\qquad + dg_3 \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

df を 0-形式 f の外微分とすれば，p-形式の外微分は $p + 1$-形式であることがわかる．また，3-形式 $\theta = h dx \wedge dy \wedge dz$ の外微分は $dh = 0$ とする（3 次元では 4-形式は 0 のみ）．

例題 1 次の外微分を計算せよ．

1) $d\left(y^2 dx - xzdy + z^3 dz\right)$
2) $d\left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy\right)$

演習問題

次の外微分を計算せよ．

1) $d\left(xydx + yzdy + xzdz\right)$
2) $d\left(x^2 yzdy \wedge dz + xy^2 zdz \wedge dx + xyz^2 dx \wedge dy\right)$

外微分と rot, div の関係について，次の等式が成り立つ．

$$d\omega_{\mathbf{F}} = \eta_{\mathrm{rot}\, \mathbf{F}}, \quad d\eta_{\mathbf{G}} = \mathrm{div}\, \mathbf{G}\, dV.$$

これより，ストークスの公式とガウスの公式を以下のように統一的に表すことができる（**ストークスの定理**）．

$$（\text{ストークスの公式}）\quad \int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$
$$（\text{ガウスの公式}）\quad \int_{\partial \Omega} \eta = \int_\Omega d\eta$$

ただし $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, $\eta = \eta_{\mathbf{G}}$ である．また，0-形式 f に対しても

$$\int_{\partial C} f = \int_C df$$

が成り立つ（勾配ベクトル場の線積分）．

(x, y, z, t) を座標とする 4 次元 $\mathbb{R}^3$ の微分形式を考える．$\mathbf{E} = {}^t[E_1, E_2, E_3]$ を電界，$\mathbf{B} = {}^t[B_1, B_2, B_3]$ を磁束密度とするとき，2-形式

$$\begin{aligned} \eta = &B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy \\ &+ E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt \end{aligned}$$

を定めると，マクスウェルの方程式の 2 式

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0$$

は，1 つの式 $d\eta = 0$ で表すことができる．

第 14 回「ベクトル解析」演習問題解答 2023 年 1 月 23 日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

次の外微分を計算せよ.

1) $d\,(xydx + yzdy + xzdz)$

2) $d\left(x^2yzdy \wedge dz + xy^2zdz \wedge dx + xyz^2dx \wedge dy\right)$

解答

1)
$$
\begin{aligned}
&d\,(xydx + yzdy + xzdz) \\
&= (ydx + xdy) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy \\
&\quad + (zdx + xdz) \wedge dz \\
&= xdy \wedge dx + ydz \wedge dy + zdx \wedge dz.
\end{aligned}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
&d\left(x^2yzdy \wedge dz + xy^2zdz \wedge dx + xyz^2dx \wedge dy\right) \\
&= (2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz) \wedge dy \wedge dz \\
&\quad + (y^2zdx + 2xyzdy + xy^2dz) \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + (yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz) \wedge dx \wedge dy \\
&= 2xyzdx \wedge dy \wedge dz \\
&\quad + 2xyzdy \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + 2xyzdz \wedge dx \wedge dy \\
&= 6xyzdx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}
$$

第 15 回「ベクトル解析」 2023 年 1 月 31 日

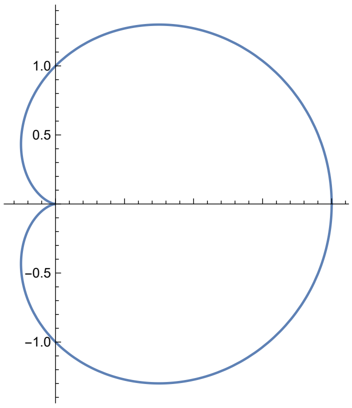
教科書：清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社
参考書：E. クライツィグ著, 堀素夫訳「線形代数とベクトル解析」培風館　担当：國谷

まとめ

例題 1（教科書 問題 2.10）次の等式が成り立たないことを示す反例を与えよ．

1) $\mathrm{rot}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{G})\mathbf{F} - (\mathrm{div}\,\mathbf{F})\mathbf{G}$
2) $\mathrm{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})$

例題 2（教科書 問題 3.10）心臓型の曲線 $\mathbf{r}(t) = {}^t[(1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t]$ $(0 \le t \le 2\pi)$ で囲まれる平面の領域の面積を求めよ．



例題 3（教科書 問題 6.3）次のベクトル場 $\mathbf{F}$ と曲面 S について，積分 $\int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

$$\mathbf{F}(x,y,z) = {}^t[x^2+y-4, 3xy, 2xz+z^2],$$
$$S : x^2+y^2+z^2 = 16,\ z \ge 0.$$

例題 4（教科書 問題 7.2）次のベクトル場 $\mathbf{F}$ と曲面 S について，積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

$\mathbf{F}(x,y,z) = {}^t[xy^2, x^2y, y]$,
$S : x^2+y^2 = 1, z=-1, z=1$ で囲まれる立体の表面.

演習問題

次のベクトル場 $\mathbf{F}$ と曲面 S について，積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ．

$\mathbf{F}(x,y,z) = {}^t[x^2, 2xy, 2yz]$,
$S : x^2+y^2 = 1, z=0, z=1$ で囲まれる立体の表面.

第15回「ベクトル解析」演習問題解答 2023年1月31日

教科書 : 清水勇二著「基礎と応用 ベクトル解析」サイエンス社　担当 : 國谷

演習問題

次のベクトル場 $\mathbf{F}$ と曲面 S について，積分 $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ を求めよ.

$\mathbf{F}(x,y,z) = {}^t[x^2, 2xy, 2yz]$,
$S : x^2+y^2=1, z=0, z=1$ で囲まれる立体の表面.

解答　ガウスの公式より

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} dV = \int_\Omega (4x+2y)dV.$$

ここで $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換することにより

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r\cos\theta + 2r\sin\theta) r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi}(4\cos\theta + 2\sin\theta)d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= 0.\end{aligned}$$