強い disjunction property を持つ論理について

志村 立矢

日本大学 理工学部

2025.12.20

記号、記法について

- **H**：直観主義命題論理
- **LJ**：**H** に対する sequent calculus
- KP：Kreisel-Putnam の公理
  $(\neg p \to (q \vee r)) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r)$.
- $N_k(p)$, N_k：西村 [8] による一変数公理 (変数を p とする)
- $N_k(A)$：$N_k(p)$ の代入例
- Br_2：Gabbay-de Jongh による有限二分木の公理

中間命題論理の Disjunction Property (DP)

中間命題論理 $\mathbf{L}$ が Disjunction Property (DP) を持つとは、

$$\mathbf{L} \vdash B \vee C \text{ ならば } (\mathbf{L} \vdash B \text{ または } \mathbf{L} \vdash C).$$

中間命題論理の Disjunction Property (DP)

中間命題論理 $\mathbf{L}$ が Disjunction Property (DP) を持つとは、

$$\mathbf{L} \vdash B \vee C \text{ ならば } (\mathbf{L} \vdash B \text{ または } \mathbf{L} \vdash C).$$

$\mathbf{L}$ の公理化が与えられている場合、DP は次を意味する。

中間命題論理の Disjunction Property (DP)

中間命題論理 **L** が Disjunction Property (DP) を持つとは、

$$\mathbf{L} \vdash B \vee C \text{ ならば } (\mathbf{L} \vdash B \text{ または } \mathbf{L} \vdash C).$$

L の公理化が与えられている場合、DP は次を意味する。

L の公理の代入例 (instances) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ に対し、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \vee C$$

ならば、公理の代入例 $A_{m+1}, \ldots, A_n$ が存在し、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_{m+1} \wedge \cdots \wedge A_n \to B$$

または、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_{m+1} \wedge \cdots \wedge A_n \to C.$$

Strong Disjunction Property (SDP)

中間命題論理 $\mathbf{L}$ の公理化が Strong Disjunction Property (SDP) を持つとは、次が成り立つこととする。

$\mathbf{L}$ の公理の代入例 (instances) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ に対し、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \vee C$$

ならば、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B$$

または、

$$\mathbf{H} \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to C.$$

$\mathbf{L}$ が SDP を持つ公理化を持つとき、$\mathbf{L}$ は SDP を持つと定める。

Harrop Disjunction Property (HDP)

中間命題論理 $\mathbf{L}$ が Harrop Disjunction Property (HDP) を持つとは、次が成り立つこととする。

Harrop 論理式 H に対し、

$$\mathbf{L} \vdash H \to B \vee C$$

ならば、

$$\mathbf{L} \vdash H \to B \text{ または } \mathbf{L} \vdash H \to C.$$

Harrop Disjunction Property (HDP)

中間命題論理 $\mathbf{L}$ が Harrop Disjunction Property (HDP) を持つとは、次が成り立つこととする。

Harrop 論理式 H に対し、

$$\mathbf{L} \vdash H \to B \vee C$$

ならば、

$$\mathbf{L} \vdash H \to B \text{ または } \mathbf{L} \vdash H \to C.$$

Theorem (Minari-Wroński [7])

$\mathbf{L}$ が DP を持つならば、HDP を持つ。

Strong Harrop Disjunction Property (SHDP)

中間命題論理 **L** の公理化が Strong Harrop Disjunction Property (SHDP) を持つとは、次が成り立つこととする。

L の公理の代入例 (instances) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ と Harrop 論理式 H に対し、

$$\mathbf{H} \vdash H \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \vee C$$

ならば、

$$\mathbf{H} \vdash H \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B$$

または、

$$\mathbf{H} \vdash H \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to C.$$

SDP を持つ論理の基本的な性質

1. 論理式の集合 $\mathcal{S}$ による公理化が SDP を持つとする。
論理式の集合 $\mathcal{S}'$ に属する各論理式が $\mathcal{S}$ の代入例ならば、
$\mathcal{S}'$ を公理に持つ論理 $\mathbf{H} + \mathcal{S}'$ も SDP を持つ。
2. 任意の SDP を持つ論理は、有限公理化可能な SDP を持つ論理の列の極限となる。
3. q を p と異なる命題変数とする。
$\mathbf{H} + N_{10}(p) = \mathbf{H} + N_{10}(p) \vee q$ であるが、$N_{10}(p) \vee q$ による公理化は SDP を持たない。

Theorem (cf. [7])

SDP を持つ公理化は、SHDP を持つ。

Theorem (cf. [7])

SDP を持つ公理化は、SHDP を持つ。

証明の概要) Harrop 論理式 H に対し、 Minari-Wroński により次を満たす代入 s が与えられている。

- 任意の論理式 A に対し、$\mathbf{H} \vdash H \to (A \equiv s(A))$,
- $\mathbf{H} \vdash s(H)$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H} \vdash H \land A_1 \land \cdots \land A_m \to B \lor C \\
\Rightarrow &\mathbf{H} \vdash s(A_1) \land \cdots \land s(A_m) \to s(B) \lor s(C) \\
\Rightarrow &\mathbf{H} \vdash s(A_1) \land \cdots \land s(A_m) \to s(B) \text{ (または } s(C)) \\
\Rightarrow &\mathbf{H} \vdash H \land A_1 \land \cdots \land A_m \to B \text{ (または } C)
\end{aligned}
$$

SDP を持つ論理

問

DP を持つ論理は SDP を持つか？

SDP を持つ論理

問

DP を持つ論理は SDP を持つか？

当初の予想

- 成立は怪しい。
- 有限公理化可能ならばともかく、そうでない論理すべてについて成り立つというのは虫がよすぎる。
- 反例は大量にあるだろう。

SDP を持つ論理

問

DP を持つ論理は SDP を持つか？

当初の予想

- 成立は怪しい。
- 有限公理化可能ならばともかく、そうでない論理すべてについて成り立つというのは虫がよすぎる。
- 反例は大量にあるだろう。

現在の状況

反例の候補を探すことから始める必要がある。

DP の証明の例

DP の証明の例

1. **LJ** の cut 除去定理を用いる syntactical な証明
   - Kreisel-Putnam [4] (KP)
   - 佐々木 [9] (一変数公理 N_{4n+2} $(n \geq 2)$)
   - SDP を直接証明している。

DP の証明の例

1. **LJ** の cut 除去定理を用いる syntactical な証明
   - Kreisel-Putnam [4] (KP)
   - 佐々木 [9] (一変数公理 N_{4n+2} $(n \geq 2)$)
   - SDP を直接証明している。
2. Kleene/Aczel slash + 許容規則の semantical な証明
   - Anderson[1] (一変数公理 N_{2n} $(n \geq 5, n \neq 7)$, Kripke モデル)
   - Wroński [11] (一変数公理 N_{2n} $(n \geq 5)$, 代数的モデル)
   - SDP の証明かどうかは詳細を確認する必要がある。

DP の証明の例

1. **LJ** の cut 除去定理を用いる syntactical な証明
   - Kreisel-Putnam [4] (KP)
   - 佐々木 [9] (一変数公理 N_{4n+2} ($n \geq 2$))
   - SDP を直接証明している。
2. Kleene/Aczel slash + 許容規則の semantical な証明
   - Anderson[1] (一変数公理 N_{2n} ($n \geq 5, n \neq 7$), Kripke モデル)
   - Wroński [11] (一変数公理 N_{2n} ($n \geq 5$), 代数的モデル)
   - SDP の証明かどうかは詳細を確認する必要がある。
3. 完全性定理に基づく semantical な証明
   - Gabbay-de Jongh [2], 小野, Minari [6]
   - Wroński [10] (Jankov formula)
   - Chagrov-Zakharyaschev [12] (canonical formula)
   - このままでは SDP の証明にはなっていない。

cut 除去定理による SDP の証明

1. KP と $\{N_{4n+2} \mid n \geq 2\}$ についての証明は与えられている。
2. $\{KP, N_{10}\}$ や $\{N_{4n} \mid n \geq 3\}$ に適用してみると、帰納法がうまく回らない。(base step で失敗する)

cut 除去定理による SDP の証明

1. KP と $\{N_{4n+2} \mid n \geq 2\}$ についての証明は与えられている。
2. $\{KP, N_{10}\}$ や $\{N_{4n} \mid n \geq 3\}$ に適用してみると、帰納法がうまく回らない。(base step で失敗する)

課題

証明すべき論理毎に、適切な許容規則を発見する必要がある。

cut 除去定理による SDP の証明

1. KP と $\{N_{4n+2} \mid n \geq 2\}$ についての証明は与えられている。
2. $\{KP, N_{10}\}$ や $\{N_{4n} \mid n \geq 3\}$ に適用してみると、帰納法がうまく回らない。(base step で失敗する)

課題

証明すべき論理毎に、適切な許容規則を発見する必要がある。

必要な許容規則は、Anderson [1] の中にあった。

許容規則

Anderson [1] が示した許容規則を精密化したものが次である。
(証明は、対偶を **H** の完全性 (有限モデル特性) と Kripke model を用いて示す。)

Lemma

Γ を $\{KP, N_{4n+2}(n \geqq 2)\}$ の代入例の列とするとき、

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to N_8(A) \text{ ならば } \mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to N_5(A).$$

Lemma

Γ を $\{N_{4n}(n \geqq 3)\}$ の代入例の列とするとき、

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to N_{10}(A) \text{ ならば } \mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to N_7(A).$$

許容規則

Chagrov-Zakharyaschev [12] は次が成立することを示した。

Lemma (Chagrov-Zakharyaschev [12])

$\neg A \vee \neg B$ の形の命題論理式を考える。
P_2 を高さが 2 の公理, W_2 を巾が 2 の公理とするとき、
$\mathbf{H} + P_2 + W_2 \vdash \neg A \vee \neg B$ ならば $\mathbf{H} \vdash \neg A$ または $\mathbf{H} \vdash \neg B$ となる。

これを利用することで、$\{KP, N_{4n+2}(n \geqq 2)\}$ を大きく広げることができる。

$\mathcal{S}_0$ を $\mathbf{H} + P_2 + W_2$ で証明可能な $A \to \neg B \vee \neg C$ の形の論理式全体とする。
$\mathcal{S}$ を KP と $\mathcal{S}_0$ を含み、

$$A \in \mathcal{S} \text{ ならば } (A \to B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C) \in \mathcal{S}$$

となる最小の集合とする。

Theorem

$\mathcal{S}$ は SDP を持つ。

$\mathcal{S}_0$ を $\mathbf{H}+P_2+W_2$ で証明可能な $A \to \neg B \vee \neg C$ の形の論理式全体とする。
$\mathcal{S}$ を KP と $\mathcal{S}_0$ を含み、

$$A \in \mathcal{S} \text{ ならば } (A \to B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C) \in \mathcal{S}$$

となる最小の集合とする。

Theorem

$\mathcal{S}$ は SDP を持つ。

注意

1. $A \in \mathcal{S}$ ならば $\mathbf{H}+P_2+W_2 \vdash A$.
2. $N_{10} \in \mathcal{S}_0$.
3. $N_{4n+2} \in \mathcal{S}$ $(n \geqq 2)$.

証明のポイント

$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to D \vee E$ の cut-free な証明の上式が、

$$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to A \tag{1}$$
$$\mathbf{LJ} \vdash \neg B \vee \neg C, \Gamma \to D \vee E \tag{2}$$

の場合を考える。

証明のポイント

$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to D \vee E$ の cut-free な証明の上式が、

$$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to A \tag{1}$$
$$\mathbf{LJ} \vdash \neg B \vee \neg C, \Gamma \to D \vee E \tag{2}$$

の場合を考える。

(1) より $\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to \neg B \vee \neg C$ であるから、
$\mathbf{H} + P_2 + W_2 \vdash \neg B \vee \neg C$ となり、$\mathbf{H} \vdash \neg B$ または $\mathbf{H} \vdash \neg C$.

証明のポイント

$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to D \vee E$ の cut-free な証明の上式が、

$$\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to A \tag{1}$$
$$\mathbf{LJ} \vdash \neg B \vee \neg C, \Gamma \to D \vee E \tag{2}$$

の場合を考える。

(1) より $\mathbf{LJ} \vdash (A \to \neg B \vee \neg C), \Gamma \to \neg B \vee \neg C$ であるから、
$\mathbf{H} + P_2 + W_2 \vdash \neg B \vee \neg C$ となり、$\mathbf{H} \vdash \neg B$ または $\mathbf{H} \vdash \neg C$.

これと、(2) より $\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to D \vee E$ となり、帰納法の仮定より、
$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to D$ または $\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \to E$.

応用

$\mathbf{H} + P_2 + W_2 \vdash A$ ならば $(A \to (\neg p \vee \neg q)) \to (\neg p \vee \neg q)$ であることを用いて、SDP を持つ論理を無数に作ることができる。

Corollary

1. $\mathbf{H}$ よりも真に強い論理 $\mathbf{L}$ に対し、$\mathbf{L}$ よりも弱い SDP を持ち $\mathbf{H}$ よりも真に強い論理がある。
2. 有限モデル特性と SDP の両方を持つ論理が連続無限濃度存在する。

Proof.

1. $\mathbf{L} \vdash A$, $\mathbf{H} \nvdash A$ のとき、$\mathbf{H} + (A \to (\neg p \vee \neg q)) \to (\neg p \vee \neg q)$ が求める論理である。

□

Lemma (cf. McKay [5])

$\vee$ のない論理式 A を用いて、$(A \to (\neg p \vee \neg q)) \to (\neg p \vee \neg q)$ と表せる論理式 *(複数)* で公理化できる論理 $\mathbf{L}$ は有限モデル特性を持つ。

Proof.

$\mathbf{L}$ で B が証明できないならば $\mathfrak{A} \not\models B$ となる Heyting 代数 $\mathfrak{A}$ で $\mathbf{L}$ が valid となるものがある。
B の部分論理式全体と、B に出現する命題変数のみからなる $\neg C$ や $\neg C \vee \neg D$ の形の論理式は有限個なので、これらが生成する $\mathfrak{A}$ の部分 $\{\to, \wedge, \neg\}$-代数 $\mathfrak{B}$ は有限代数であり、$\mathfrak{B}$ に $\vee$ を定義し、Heyting 代数とすることができる。
$\mathfrak{B}$ において、$\mathbf{L}$ の公理は valid で、$\mathfrak{B} \not\models B$ となることが示せる。 $\square$

Definition

論理式の集合 $\{C_n\}$ が、どの C_i についても

$$\mathbf{H} + \{C_j\}_{j \neq i} \nvdash C_i$$

を満たすとき、$\{C_n\}$ は独立であるという。

proposition

$\{C_n\}$ が独立ならば、$\{C_n\}$ の部分集合を公理として持つ論理はすべて異なる。

Definition

論理式の集合 $\{C_n\}$ が、どの C_i についても

$$\mathbf{H} + \{C_j\}_{j \neq i} \nvdash C_i$$

を満たすとき、$\{C_n\}$ は独立であるという。

proposition

$\{C_n\}$ が独立ならば、$\{C_n\}$ の部分集合を公理として持つ論理はすべて異なる。

Lemma (cf. Zakharyaschev [13])

Zakharyaschev が与えた、独立な $\{\to\}$-論理式の集合、$\{C_n\}_{n \in \omega}$ に対し、p, q をどの C_n にも現れない変数としたとき、
$\{(C_n \to (\neg p \vee \neg q)) \to (\neg p \vee \neg q)\}$ も独立な論理式の集合となる。

semantical な証明について

Gabbay-de Jongh [2] による、Gabbay-de Jongh の論理の DP の証明は次の事実に基づいている。

Lemma (Gabbay-de Jongh [2])

Br_2 が $\mathbf{M}_1$ と $\mathbf{M}_2$ で *valid* ならば $\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2$ でも *valid* となる。

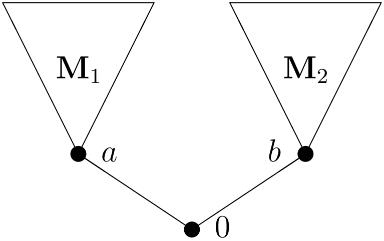


Figure: $\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2$

Corollary (Gabbay-de Jongh [2])

$\mathbf{H} + Br_2 \nvdash B$ かつ $\mathbf{H} + Br_2 \nvdash C$ ならば $\mathbf{H} + Br_2 \nvdash B \vee C$.

この corollary と完全性から SDP を導くのは難しい。

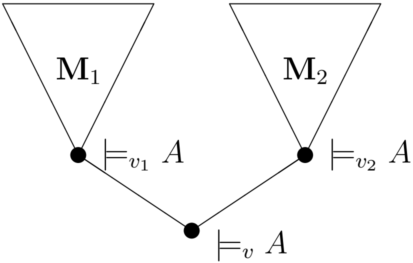
Wroński [10] や Chagrov-Zakharyaschev [12] による証明でも、同様に対応する代数モデルや general frame に関する完全性を用いて、この corollary に対応する事実を示しているため、単純に SDP を導くことはできない。

ところが

ところが

Lemma

$\mathbf{M}_1$ 上の付値 v_1 と $\mathbf{M}_2$ 上の付値 v_2 が $\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2$ 上の付値 v と整合的であるとする。
このとき、Br_2 の任意の代入例 A に対し、
$\mathbf{M}_1 \models_{v_1} A$ かつ $\mathbf{M}_2 \models_{v_2} A$ ならば、$\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2 \models_v A$ となる。



したがって、Br_2 の SDP が次のように導かれる。

Corollary

Br_2 の代入例 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ に対し、

$$\mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \text{ かつ } \mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to C$$

ならば、

$$\mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \vee C.$$

したがって、Br_2 の SDP が次のように導かれる。

Corollary

Br_2 の代入例 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ に対し、

$$\mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \text{ かつ } \mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to C$$

ならば、

$$\mathbf{H} \nvdash A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m \to B \vee C.$$

なんと、$\mathbf{H} + Br_2$ の完全性は不要だった。

Gabbay-de Jongh, Wroński, Chagrov-Zakharyaschev の証明で、公理化に用いられたのは frame formula, Jankov formura, canonical formula と呼ばれる論理式であった。

Gabbay-de Jongh, Wroński, Chagrov-Zakharyaschev の証明で、公理化に用いられたのは frame formula, Jankov formura, canonical formula と呼ばれる論理式であった。

たとえば、Jankov formula の場合は次のようになる。

Lemma

各公理 A は 代数 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ で *valid* ならば、*Kripke frame* における ∇ に対応する操作により作られる代数 $\mathfrak{B}$ でも *valid* となる。

Gabbay-de Jongh, Wroński, Chagrov-Zakharyaschev の証明で、公理化に用いられたのは frame formula, Jankov formura, canonical formula と呼ばれる論理式であった。

たとえば、Jankov formula の場合は次のようになる。

Lemma

各公理 A は 代数 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ で *valid* ならば、*Kripke frame* における ∇ に対応する操作により作られる代数 $\mathfrak{B}$ でも *valid* となる。

Fact (Jankov [3])

有限代数 $\mathfrak{A}$ から作られた *Jankov* 論理式を $X_{\mathfrak{A}}$ とするとき、代数 $\mathfrak{B}$ についての次の条件は同値である。

- $\mathfrak{B}$ において $X_{\mathfrak{A}}$ が *refute* できる。
- $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ のある商代数の部分代数となる。

Jankov の定理の証明を見ると、代数 $\mathfrak{B}$ における Jankov 論理式の validity についての証明ではなく、$\mathfrak{B}$ 上の付値 v における Jankov 論理式の truth に関する証明であることがわかる。

Lemma (Jankov)

有限代数 $\mathfrak{A}$ から作られた *Jankov* 論理式を $X_{\mathfrak{A}}$ とする。*subdirectly irreducible* な代数 $\mathfrak{B}$ 上の付値 v についての次の条件は同値である。

- v は $X_{\mathfrak{A}}$ の ω*-refutation* である。
- $\mathfrak{A}$ の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対応する $X_{\mathfrak{A}}$ を構成する変数を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする。

$$\mathfrak{A} \ni a_i \mapsto v(p_i) \in \mathfrak{B}$$

は代数 $\mathfrak{A}$ の ω*-element* を ω*-element* に写す $\mathfrak{B}$ への埋め込みである。

有限代数モデル全体と有限 Kripke model 全体は同一視できるので、次が成り立つ。

Lemma

論理式 A を *Gabbay-de Jongh, Wroński, Chagrov-Zakharyaschev* による論理の公理の代入例とする。
$\mathbf{M}_1$ 上の付値 v_1 と $\mathbf{M}_2$ 上の付値 v_2 が $\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2$ 上の付値 v と整合的であるとする。
このとき、$\mathbf{M}_1 \models_{v_1} A$ かつ $\mathbf{M}_2 \models_{v_2} A$ ならば、$\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2 \models_v A$ となる。

有限代数モデル全体と有限 Kripke model 全体は同一視できるので、次が成り立つ。

Lemma

論理式 A を *Gabbay-de Jongh*, *Wroński*, *Chagrov-Zakharyaschev* による論理の公理の代入例とする。
$\mathbf{M}_1$ 上の付値 v_1 と $\mathbf{M}_2$ 上の付値 v_2 が $\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2$ 上の付値 v と整合的であるとする。
このとき、$\mathbf{M}_1 \models_{v_1} A$ かつ $\mathbf{M}_2 \models_{v_2} A$ ならば、$\mathbf{M}_1 \nabla \mathbf{M}_2 \models_v A$ となる。

Corollary

上記の公理全体からなる集合は SDP を持つ。

公理化が知られている DP を持つ論理の証明は、多くがこれまでに SDP を証明したものと同様の議論になっている。

公理化が知られている DP を持つ論理の証明は、多くがこれまでに SDP を証明したものと同様の議論になっている。

結論

DP $\Rightarrow$ SDP の反例を見つけるためには、これまでの DP の証明と異なる方法によるものを探す必要がある。

雑多な問題

1. SDP を持つ論理の単調増加列 $\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{L}_n \subseteq \dots$ に対し、$\mathbf{L} = \bigcup \mathbf{L}_n$ は SDP を持つか。
(公理化が単調増加列となっているかはわからない。)
2. 公理 A が SDP を持つならば、勝手な論理式 B に対し、公理 $B \to A$ は SDP を持つか。
3. $\mathbf{H} + N_{14}$ や $\mathbf{H} + KP + N_{10}$ に対し、純粋に syntactical な SDP の証明を与えよ。

参考文献 I

Anderson, J. G.,
Superconstructive Propositional Calculi with Extra Axiom Schemes Containing one Variable.
Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 18 (1972), 113–130.

Gabbay, D.M. and de Jongh, D.H.
Sequences of decidable and finitely axiomatizable intermediate logics with the disjunction property,
Journal of Symbolic Logic 39 (1974), pp. 67-79.

参考文献 II

- Jankov, V.A.
  Conjunctively indecomposable formulas in propositional calculi,
  Izvestiya Akademii Nauk SSSR 33 (1969), pp. 13-38.
  (English translation) **Mathematics of USSR, Izvestiya 3** (1969), pp. 17-35.

- Kreisel, G. and Putnam, H.
  Eine unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistischen Aussgenkalkül,
  Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 3 (1957), 74–78.

参考文献 III

McKay, C.G.
The decidability of certain intermediate propositional logics,
J. Symbolic Logic, **33** (1968), 258-264.

Minari, P.
On the extension of intuitionistic propositional logic with Kreisel-Putnam's and Scott's schemes,
Studia Logica 45 (1986), no. 1, 55–68.

Minari, P. and Wronski, A.
The property (HD) in intermediate logics,
Reports on Mathematical Logic. 22 (1988), 21–25.

参考文献 IV

Nishimura, I.
On Formulas of one Variable in Intuitionistic Propositional Calculus.
J. Symbolic Logic. 25 (1960), 327–331.

Sasaki, K.
The disjunction property of the logics with axioms of only one variable,
Bull. Sect. Logic Univ Lódź 21(1992),no2,40–46.

Wroński, A.
Intermediate Logics and the Disjunction Property,
Reports on Mathematical Logic. 1 (1973), 39–52.

参考文献 V

Wroński, A.
Remarks on Intermediate Logics with Axioms Containing only one Variable,
Reports on Mathematical Logic. 2 (1974), 63–76.

Chagrov, A. and Zakharyaschev, M.
Modal Logic Oxford Univ. Press, (1997).

Zakharyaschev, M.
Canonical formulas for K4 PART II: Cofinal subframe logics,
J. Symbolic Logic. 61 (1996), 421-449.