導出可能性条件の様相論理に関するこれまでの研究

倉橋太志　（神戸大学システム情報学研究科）

第 60 回 MLG 数理論理学研究集会@神戸大学
2025 年 12 月 20 日 (土)

概要

- 「証明可能性論理」は証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の性質を様相論理を用いて分析する研究分野．
- 我々は第 2 不完全性定理の成立に関わる導出可能性条件を証明可能性論理の枠組みを用いて分析する研究を進めている．
- そのような方向での研究成果が一定数蓄積されたので，導出可能性条件と不完全性現象の関係を構造的に整理する．

この研究の目的

第 2 不完全性定理は，単一の定理というよりも複数の定理群であり，
「どの導出可能性条件が，どのように本質的に働いているのか」
という，構造に関する興味がある．
本研究は，その構造を様相論理の枠組みで精密に捉え直すことが目的．

参考文献

1. **Kurahashi, Arithmetical completeness theorem for modal logic K, *Studia Logica*, 2018.**
2. **Kurahashi, Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerations, *Studia Logica*, 2018.**
3. **Kurahashi, Rosser provability and normal modal logics, *Studia Logica*, 2020.**
4. **Kogure and Kurahashi, Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics, *APAL*, 2023.**
5. **Kurahashi, The provability logic of all provability predicates, *JLC*, 2024.**
6. **Kurahashi and Sato, The finite frame property of some extensions of the pure logic of necessitation, *Studia Logica*, 受理**
7. **Kogure, Arithmetical completeness for some extensions of the pure logic of necessitation, arXiv:2409.00948, 投稿中**
8. **Kurahashi, Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, arXiv:2507.00955m 投稿中**
9. **Kogure, Provability interpretation of non-normal modal logics having neighborhood semantics, arXiv:2511.16488, 準備中**
10. **Kogure and Kurahashi, Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements, arXiv:2511.15531, 準備中**

アウトライン

証明可能性述語

以降は T を PA の計算可能な拡大理論とする．

定義（弱表現）

論理式 $\varphi(x)$ が集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ を PA において**弱表現する**
$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}(n \in X \iff \mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n}))$.

事実

任意の c.e. 集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ に対して，X を PA において弱表現する論理式が存在する．

定義（証明可能性述語）

理論 T の定理全体の集合 $\mathrm{Th}(T)$ を PA において弱表現する論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を
T の**証明可能性述語**という．
つまり，$T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

不完全性定理の証明の概略

不動点定理

任意の 1 変数論理式 $\varphi(v)$ に対して，文 ψ が存在して

$$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931)

$\mathsf{PA} \vdash \chi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$ を満たす T の **Gödel** 文 χ をとる．

- T が無矛盾なら $T \nvdash \chi$.
- T が Σ_1-健全なら $T \nvdash \neg\chi$.

$\mathrm{Con}_T :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ とする．

第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931)

T の **Gödel** 文 χ の証明不可能性の証明を形式化すれば $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$.
つまり $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \chi$.
T が無矛盾なら $T \nvdash \mathrm{Con}_T$.

導出可能性条件

- しかし，$T \nvdash \chi$ の証明を形式化して $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$ を導くためには，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が単に $\mathrm{Th}(T)$ を PA において弱表現する論理式であるだけでは不十分．

導出可能性条件

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たせば $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \chi$ となることが示せ，第 2 不完全性定理が成立する．

更には次が成立する．

Löb の定理 (Löb, 1955)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たすとする．

- $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.
- $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- **D2** $+$ **D3**$+$ 不動点定理 $\Rightarrow$ **Löb**

導出可能性条件と様相論理

D2 と **D3** と形式化された **Löb** の定理は，それぞれ様相論理の公理 K, 4, GL に対応．

$$\text{K: } \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$
$$\text{4: } \Box A \to \Box\Box A$$
$$\text{GL: } \Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

$$\textbf{D2: } T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$
$$\textbf{D3: } T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$
$$\textbf{Löb: } T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

研究テーマ

導出可能性条件の性質を様相論理を用いて分析する！

動機

- 導出可能性条件間の関係をつかみたい
- 第 2 不完全性定理を理解したい
- **Kripke** モデルなどを不完全性定理の分析に使いたい，など

算術的解釈と証明可能性論理

$\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とする．
様相論理と算術をつなげるために，様相論理式の算術的解釈を導入する．

定義（算術的解釈）

様相論理式から算術の文への写像 f で次の条件を満たすものを，
$\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく**算術的解釈**という：

- $f(\bot)$ は $0 = 1$
- $f(\neg A)$ は $\neg f(A)$
- $f(A \circ B)$ は $f(A) \circ f(B)$ （$\circ \in \{\land, \lor, \to\}$）
- $f(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) := \{A \mid \forall f\colon \mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈，$T \vdash f(A)\}$
を $\mathrm{Pr}_T(x)$ の**証明可能性論理**という．

問

様相論理 $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ を公理化できるか？

Solovay の算術的完全性定理

事実

- $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ は一様代入とネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$ で閉じている．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D2}$ を満たせば $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ は正規様相論理．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ を満たせば $\mathsf{GL} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$．

事実

"x は T において証明可能" を算術の言語で自然に書き下すことによって得られる Σ_1 論理式 $\mathrm{Prov}_T(x)$ は $\mathbf{D2}$ と $\mathbf{D3}$ を満たす．

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T) = \mathsf{GL}$．

さらなる導出可能性条件

- 導出可能性条件 **D2** と **D3** は第 **2** 不完全性定理を導くために十分であった．
- もっと条件を弱めることで見えるものはあるだろうか？

定義（証明可能性述語の反復）

- $\mathrm{Pr}_T^0(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi$
- $\mathrm{Pr}_T^{n+1}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T^n(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

導出可能性条件

$$\begin{aligned}
\textbf{E:}\quad & T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \\
\textbf{M:}\quad & T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \\
\textbf{C:}\quad & T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \land \psi\urcorner) \\
\textbf{D3}^n_m\textbf{:}\quad & T \vdash \mathrm{Pr}_T^n(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T^m(\ulcorner\varphi\urcorner)
\end{aligned}$$

- **E, M, C** は K より弱い非正規様相論理でよく分析される規則と公理に対応．
- $\mathbf{D3}^n_m$ は **D3** より弱い．

無矛盾性に関する規則と原理

Con_T に加えて，次の二つの無矛盾性に関連する規則・原理を導入する．

Ros: **(Rosser 規則)**
$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$**:** **(図式的無矛盾性)**

$$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}} := \{\neg(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)) \mid \varphi \text{ は文 }\}.$$

無矛盾性に関する規則と原理にも，様相論理における対応物がある．

算術	様相論理
Con_T	P: $\neg\Box\bot$
Ros	Ros: $\dfrac{\neg A}{\neg\Box A}$
$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$	D: $\neg(\Box A \land \Box\neg A)$

- 弱い導出可能性条件からでも，各種の無矛盾性に関する第 2 不完全性定理が得られる．
- この意味で，これらの条件や無矛盾性を重要視したい．

定理（K., 2025+）

$m > n \geq 1$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \\
\{\mathbf{E}, \mathbf{C}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \{\mathbf{M}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \\
\{\mathbf{E}, \mathbf{C}, \mathbf{D3}^n_m\} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \{\mathbf{C}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] & \{\mathbf{E}, \mathbf{D3}\} \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & \{\mathbf{C}, \mathbf{D3}^n_m\} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\nvdash \mathrm{Con}_T \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{failure of Ros} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, dashed, bend left=60, "\mathbf{E}"] & \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T \arrow[l, Rightarrow, dashed, bend left=60, "\mathbf{C}"]
\end{tikzcd}
$$

K., Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, 2025+.

導出可能性条件

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$

E: $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$

M: $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$

C: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \land \psi \urcorner)$

D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

$\mathbf{D3}^n_m$**:** $T \vdash \mathrm{Pr}^n_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}^m_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

Con_T: $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$

Ros: $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

$\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$: $\{\neg(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)) \mid \varphi$ は文 $\}$

これらの導出可能性条件と無矛盾性を，様相論理を用いて分析してきた．
研究成果は次の 5 つのグループに分けられる．

(1)	N	ネセシテーションだけの様相論理	K., 2024; Kogure and K., 2025+
(2)	$\mathrm{NA}_{m,n}$	4 の一般化を N に追加	Kogure, 2025+
(3)	EN	E : $\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ を N に追加	Kogure, 2025+
(4)	MN	M : $\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ を N に追加	Kogure and K., 2023
(5)	K	C を MN に追加	K., 2018, 2020, 2024

(1) 論理 N

Fitting, Marek, and Truszczyński (1992) の論理 N が分析の最下層．

定義（論理 N）

論理 N は，様相命題論理の言語において，古典命題論理にネセシテーション

$$\textbf{Nec}: \frac{A}{\Box A}$$

を加えることで得られる論理．

- **Fitting, Marek, and Truszczyński** によって **Kripke** 的な関係意味論が与えられている．
- **Nec** はすべての証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が満たす，次の性質に対応する：

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

したがって，次が成り立つ．

命題

全ての証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，$\mathsf{N} \subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$．

(1) N とその拡張の算術的完全性

定理 (K., 2024)

- $\mathsf{N} = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x)$ は証明可能性述語 $\}$.
- 特に，$\mathsf{N} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ となる証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ がある（算術的完全性）．

N の拡張の分析も行っている．

定理 (K., 2024; Kogure and K., 2025+)

次の論理は算術的完全．

- $\mathsf{N4} = \mathsf{N} + \mathsf{4}$: $\Box A \to \Box\Box A$ (**D3** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- $\mathsf{NP} = \mathsf{N} + \neg\Box\bot$ (Con_T を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- $\mathsf{NP4}$ (**D3** を満たし Con_T を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- $\mathsf{NR} = \mathsf{N} + \mathsf{Ros}$: $\dfrac{\neg A}{\neg\Box A}$ (**Rosser** 証明可能性述語の論理)
- $\mathsf{NR4} = \mathsf{NR} + \mathsf{4}$ (**D3** を満たす **Rosser** 証明可能性述語の論理)
- $\mathsf{ND} = \mathsf{N} + \neg(\Box A \land \Box\neg A)$ ($\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- $\mathsf{ND4}$ (**D3** を満たし $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)

K., The provability logic of all provability predicates, 2024.
Kogure and K., Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements, 2025+.

(1) 未解決問題

- N 上での公理 C: $\Box A \land \Box B \to \Box(A \land B)$ の取り扱いがよく分からない．
- C があれば Ros と D が同値．

事実

- **(K., 2025+)** CND4 は算術的完全でない．
- **(Mostowski, 1965)** CNP4 $\subseteq$ PL(Pr_T) となる，**E** を満たさない $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在．

未解決問題

- C を含む論理に対する **Fitting, Marek, and Truszczyński** の意味論に関する完全性が未解決．
- CN，CNP，CND，CN4，CNP4 は算術的完全？

K., Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, 2025+.

(2) N4 の一般化

導出可能性条件 $\mathbf{D3}^n_m$ は $\mathbf{D3}$ より弱いが，第 $\mathbf{2}$ 不完全性定理を導くのには十分であることが分かってきた．

定理 (K. and Sato, 2025+)

任意の $m, n \geq 1$ に対し，

$$\mathsf{NA}_{m,n} := \mathsf{N} + (\Box^n A \to \Box^m A)$$

は有限フレーム性を持つ．

この結果を用いて，次が得られている．

定理 (Kogure, 2025+)

すべての $m, n \geq 1$ に対して，論理 $\mathsf{NA}_{m,n}$ は算術的完全．

現在，$\mathbf{D3}^n_m$ に注目して研究を進めている．

K. and Sato, The finite frame property of some extensions of the pure logic of necessitation, 2025+.

Kogure, Arithmetical completeness for some extensions of the pure logic of necessitation, 2025+.

(3) 論理 EN と近傍意味論

定義 （論理 EN）

論理 EN は，N に規則

$$\textbf{RE}: \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

を加えることで得られる．

- E を含む論理は近傍意味論をもつが，例えば EN に対しては **Kripke** 意味論のような関係意味論は知られていない（はず）．

命題

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が **E** を満たせば，EN $\subseteq$ PL(Pr_T).

- RE も **E** も規則なので，この命題の逆はおそらく一般には成立しないと思われる．

(3) EN とその拡張の算術的完全性

- **一方，Kogure (2025+) は近傍モデルを算術に埋め込む手法を開発し，論理 EN およびその拡大論理の算術的完全性を証明した．**
- RE のもとで P と Ros は同値
- C のもとで Ros と D は同値．

定理 (Kogure, 2025+)

次の論理は算術的完全．

- EN (**E** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- ENP (**E** を満たし Con_T を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- END (**E** を満たし $\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$ を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- ECN (**E** と **C** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- ECNP (**E** と **C** を満たし Con_T を証明できる $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)

Kogure, Provability interpretation of non-normal modal logics having neighborhood semantics, 2025+.

(3) 未解決問題

- EN 上で，4 を含む論理の算術的完全性が分からない．
- EN4 の，近傍意味論に関する有限フレーム性は **Kopnev (2023)** による．
- ECN4 の有限フレーム性は未解決．

未解決問題

EN4,　ENP4,　ECN4 は算術的完全？

- 少なくとも **Kogure (2025+)** の手法そのままではかなり厳しい．
- EN4 が算術的完全でない？
  その場合，**E** と **D3** から，不動点定理を用いて新たな原理が導かれる．

定理 (K., 2025+)

1. ECN4 $\subseteq$ PL(Pr_T) であり，**M** を満たさない $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．
2. **E** と **D3** を満たし $T \vdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ となる証明可能性述語は存在しない．

項目 **2** から END4 が算術的完全でないことは従わない．

未解決問題

END4 $\subseteq$ PL(Pr_T) となる $\mathrm{Pr}_T(x)$ は存在するか？

K., Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, 2025+.

(4) 論理 MN と算術的完全性

定義 (論理 MN)

論理 MN は，N に規則

$$\text{RM}: \quad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

を加えることで得られる．

- これらの論理に対する近傍フレームは，適切な Kripke 型関係フレームへ変換可能．
- この場合には 4 は扱える．

定理 (Kogure and K., 2023)

次の論理は算術的完全．

- MN (M を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- MNP (M を満たす Rosser 証明可能性述語)
- MND (M を満たし $\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$ を証明できる Rosser 証明可能性述語の論理)
- MN4 (M と D3 を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- MNP4 (M と D3 を満たす Rosser 証明可能性述語の論理)

Kogure and K., Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics, 2023.

(5) 正規様相論理 K と KD

正規様相論理については **Kripke** 意味論が使える.

定理 (K., 2018, 2020, 2024)

次の論理は算術的完全.

- K = MN + C (**D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理)
- KD (**D2** を満たす **Rosser** 証明可能性述語の論理)

定理 (K., 2018, 2020)

次の条件の少なくとも一つを満たす正規様相論理 L は算術的完全でない.

- $\mathsf{K4} \subseteq L \subsetneq \mathsf{GL}$
- $\mathsf{KD4} \cap \mathsf{KD5} \cap \mathsf{KT} \subseteq L$
- $\mathsf{KB} \cap \mathsf{K5} \subseteq L$ かつ $L \neq \mathsf{K} + \Box\bot$

K., Arithmetical completeness theorem for modal logic K, 2018.

K., Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerations, 2018.

K., Rosser provability and normal modal logics, 2020.

まとめ

本研究により，

- 第 2 不完全性定理が成立する範囲と破綻する範囲，
- それが導出可能性条件のどの組合せに依存するのか，

をある程度体系的に整理できた．
特に，算術的完全性が成立する論理と成立しない論理の境界は，不完全性現象の本質を示唆しているように思われる．
非正規様相論理を使うべきというよりは，使わないと見えない構造が実際にある．