局所条件を付けた二次体の一様な計数

谷口隆

概要

局所条件付き二次体計数に関する Bhargava, Thorne と著者の一様評価を改良する．Burgess 評価と Pólya–Vinogradov の不等式を組み合わせ，誤差項の局所条件を課す素数への依存を改善する．さらに，従来はそれらの素数の積の任意の ϵ 乗に吸収されていた因子を明示し，暗黙の定数が絶対定数である評価を与える．

1 序

素数 p に対し，A_p を二次エタール $\mathbb{Q}_p$-代数の同型類の集合とする．n を正の無平方数とする．各素数 $p \mid n$ に対し，A_p の空でない真部分集合 σ_p を一つずつ指定する．この族 $\sigma = (\sigma_p)_{p|n}$ を二次体の**局所条件**と呼び，n を σ の**台**と呼ぶ．二次体 F は，すべての $p \mid n$ に対して $F \otimes \mathbb{Q}_p \in \sigma_p$ であるとき，局所条件 σ をみたすという．局所条件 σ をみたす二次体の同型類の集合を $\mathcal{F}(\sigma)$ と書き，各符号 $\pm$ と $X > 0$ に対して

$$N_2^{\pm}(X, \sigma) := \#\{F \in \mathcal{F}(\sigma) \mid 0 < \pm \mathrm{Disc}(F) < X\}$$

とおく．本稿の主定理は、この計数関数の X と σ についての一様な評価である．すべての奇素数 $p \mid n$ に対して，σ_p が不分岐代数と分岐代数の両方を含んではいないとき，局所条件 σ を**純粋**という．本節では，応用上重要な、σ が純粋な場合に主定理を述べる．一般の局所条件については第 4 節の系 6 を参照されたい．

主定理を述べるために，純粋な局所条件 σ に伴う量をいくつか定義する．$i = 1, 2$ に対し，σ_p が i 個の不分岐代数からなる奇素数 $p \mid n$ の積を u_i，i 個の分岐代数からなる奇素数 $p \mid n$ の積を r_i とする．n が奇数なら $n = u_1u_2r_1r_2$，偶数なら $n = 2u_1u_2r_1r_2$ である．各奇素数 $p \mid n$ における局所密度 $c_p(\sigma_p)$ は，$p \mid u_i$ のとき $c_p(\sigma_p) := ip/(2(p+1))$，$p \mid r_i$ のとき $c_p(\sigma_p) := i/(2(p+1))$ と定める（$i = 1, 2$）．$2 \mid n$ の場合，判別式の 2-進付値が e である $\mathbb{Q}_2$ 上の 2 次エタール代数の局所密度を $1/(3 \cdot 2^e)$ とし，それを σ_2 の元について足し合わせたものを $c_2(\sigma_2)$ とする．

無平方な正整数 q に対し，$\omega(q)$ で q の相異なる素因子の個数を表し，$\lambda_2(q) := \prod_{p|q}(1 + p^{-1/2})$ とおく．本論文の主結果は次のとおりである．

定理 1. 純粋な局所条件 σ と $X > 0$ に対して次が成り立つ。

$$N_2^{\pm}(X, \sigma) = \frac{3}{\pi^2} X \prod_{p|n} c_p(\sigma_p) + O\left(\frac{X^{1/2}\, u_1^{3/16}}{r_1^{5/16} r_2^{1/2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(u_1 r_1)} (\log(2u_1r_1))^{5/4} \lambda_2(u_2r_2) \right). \tag{1}$$

暗黙の定数は絶対定数である．

局所条件を課さない $n = 1$ の場合の計数は，Gegenbauer [7] による無平方数の計数に帰着される．固定された局所条件 σ に対しては，合同類内の無平方整数を [7] と同様に数えることができ，(1) の誤差項を $O_\sigma(X^{1/2})$ とした評価が得られる．この誤差項の σ への依存を精密に評価するのが本稿の目的である。

局所条件への依存を明示した一様評価にも古くから研究がある．本稿の $u_1 = r_1 = r_2 = 1$ の場合に対応する互いに素条件付き計数については，Cohen [3, Lemma 5.2] が一様評価を与え，Suryanarayana [15, Corollary 1] や Robert と Tenenbaum [12, (10.1)] が誤差項の法への依存を精密化した．定理 1 は，この場合の誤差項の法への依存をさらに改善する．また，合同類内の無平方整数の計数については，Cohen と Robinson [4, Corollary 1] や Schwarz [13, Lemma 8] が，法と剰余類に関する一様評価を与えている．Bhargava, Thorne と著者 [1, Proposition 4.2] は任意の σ の場合を扱い、純粋な σ に対しては、(1) の誤差項について

$$O_\epsilon\Big(X^{1/2}\, u_1^{1/4} u_2^{1/4} r_1^{-1/4} r_2^{-1/2} (u_1 u_2 r_1 r_2)^\epsilon\Big) \tag{2}$$

の評価を得た．ただし $\epsilon > 0$ は任意で，暗黙の定数は ϵ にのみ依存する．この評価では，分岐する局所拡大を個別に指定する条件を許しながら，分岐を指定する素数の積に関する明示的な減衰因子 $r_1^{-1/4} r_2^{-1/2}$ が得られている．(1) は，その冪因子 $u_1^{1/4} u_2^{1/4} r_1^{-1/4}$ を $u_1^{3/16} r_1^{-5/16}$ に改善するとともに，(2) では台 の ϵ 乗に吸収されていた因子を明示している．

定理 1 の証明の中心となるのは，無平方な整数上の指標和 (9) の評価である．各素数 $p \mid u_1 r_1$ における局所条件の指示関数を二次指標で表し、積を展開すると，このような和が現れる．この種の和については，Granville と Soundararajan [8, Lemma 4.1] が Pólya–Vinogradov の不等式による評価を，Munsch [10, Lemma 2.3] が Burgess [2] の不等式による評価を与えている．本稿では，Möbius 反転の後に現れる (11) の内側の指標和に対し，和を取る区間の長さに応じて，Pólya–Vinogradov の不等式と Jain-Sharma, Khale と Liu [9, Theorem 1.1] による Burgess 評価を使い分ける．また，局所条件に依存する因子を最後まで追跡し，誤差項の局所条件への依存を、素数ごとの因子の積として明示する．

Thorne と著者 [16]，および Bhargava, Thorne と著者 [1] による局所条件付き三次体計数の一様評価は，数論統計のさまざまな問題に応用されている．こうした数体計数の証明では，可約エタール代数の寄与を分離するために，局所条件付きの低次数体計数が必要となることがある．例えば，[1, §4] では，可約三次エタール代数 $\mathbb{Q} \times F$（$F/\mathbb{Q}$ は二次体）の寄与を評価するために，局所条件付き二次体計数が用いられる．また，Shankar と Tsimerman [14, §3.1] は，四次体計数に現れる可約四次エタール代数の寄与を評価する際に，同様の二次体計数を用いている．本稿は，これらの議論で用いられる二次体の一様計数評価を改善する．局所条件付き二次体計数の他の応用例としては，Pollack [11, §5.2] による二次体の最小惰性素数の平均値の研究や，Ellenberg, Pierce と Wood [6, §6] によるイデアル類群の ℓ-等分点の評価が挙げられる．後者では，二次体計数が篩の入力として用いられている．本稿の定理 1 とその一般化である系 6 も，数論統計へのさらなる応用をもつことが期待される．

本稿の構成は次のとおりである．第 2 節では Burgess 評価と Pólya–Vinogradov の不等式を組み合わせることで，指標和の絶対値の総和の一様評価を与える．第 3 節では，これと Möbius 反転を用いて，合同条件と Legendre 記号の値を指定した無平方数の一様な計数公式を得る．第 4 節では，二次体判別式の計数を第 3 節の計数問題に帰着させ，定理 1 を証明する．さらに，一般の局所条件に対する系 6 を導く．特に断らない限り、Landau の O や Vinogradov の $\ll$ の暗黙定数は絶対定数である。

謝辞

この研究は科研費 JP23K22386, JP24K21512 と京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の助成を受けた。本研究の一部は、著者が Lodha Mathematical Sciences Institute で開催された Arithmetic Statistics をテーマとするプログラムに参加している間に行われた。著者は、極めて優れた研究環境を提供してくださったプログラムの主催者およびスタッフの方々に心から感謝申し上げる。

翻訳および AI の利用に関する注記

著者はこの論文を母語である日本語でまず執筆し、その後、2026 年 10 月から 11 月にかけて、ChatGPT（GPT-6）の支援を受けて英語版へ翻訳した。また、著者はこの間、数学的な記法や用語についても ChatGPT に相談した。著者は翻訳全体を慎重に確認・修正しており、論文の内容について全責任を負う。日本語版と英語版はいずれも著者のウェブサイトから取得できる。

2 指標和の評価

本節では，χ を非自明な原始 Dirichlet 指標とし，その導手を q とする．非負整数 N と実数 b に対し，N 項の指標和

$$S(\chi, N; b) := \sum_{b<j\le b+N} \chi(j)$$

を定める．正整数 q に対して $\omega(q)$ を q の相異なる素因数の個数, $\tau(q)$ を q の正の約数の個数，$\varphi(q)$ を $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ の位数とし，また

$$\kappa(q) := q^{3/16}(2^{\omega(q)}\tau(q))^{3/4}\left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{1/2} \tag{3}$$

と定める．$2^\omega, \tau, \varphi$ はいずれも乗法的関数なので，κ も乗法的関数である。Burgess [2] の指標和評価の明示的な形として，Jain-Sharma, Khale と Liu [9, Theorem 1.1] による次の評価を用いる．

補題 2 (Burgess 評価 [9])**.** $N \le q^{5/8}$ のとき，次が成り立つ．

$$|S(\chi, N; b)| \ll \sqrt{N}\,\kappa(q)(\log q)^{1/4}. \tag{4}$$

[9, Theorem 1.1] における導手が十分大きいという仮定は，暗黙の定数を大きくすることで除ける．次はよく知られた Pólya–Vinogradov の不等式である．証明はたとえば Davenport [5, §23] を参照のこと．

補題 3 (Pólya–Vinogradov)**.** 任意の χ, N, b に対し，次が成り立つ．

$$|S(\chi, N; b)| \ll \sqrt{q}\,\log q.$$

Burgess 評価と Pólya–Vinogradov の不等式を組み合わせて，次を示す．

命題 4. $Y > 0$ とし，各整数 $a \ge 1$ に対し、非負整数 N_a が $N_a \le Y/a^2$ を満たしているとする．このとき

$$\sum_{a\ge 1} |S(\chi, N_a; b_a)| \ll \sqrt{Y}\,\kappa(q)(\log q)^{5/4} \tag{5}$$

である．ただし各 b_a は任意の実数である。

証明. $A = \sqrt{Y}\,q^{-5/16}$ とおく．$a \le A$ の部分には補題 3 を用いて

$$\sum_{a\le A} |S(\chi, N_a; b_a)| \ll A\sqrt{q}\,\log q = \sqrt{Y}\,q^{3/16}\log q \ll \sqrt{Y}\,\kappa(q)(\log q)^{5/4}$$

を得る．$a > A$ とすると $N_a \le Y/A^2 = q^{5/8}$ である。また、$N_a > 0$ なら，整数性より $N_a \ge 1$ だから $a \le \sqrt{Y}$ である．従って補題 2 より

$$\sum_{a>A} |S(\chi, N_a; b_a)| \ll \sum_{A<a\le\sqrt{Y}} \sqrt{N_a}\,\kappa(q)(\log q)^{1/4} \le \sqrt{Y}\,\kappa(q)(\log q)^{1/4} \sum_{A<a\le\sqrt{Y}} \frac{1}{a}.$$

最後の和は

$$\sum_{A<a\le\sqrt{Y}} \frac{1}{a} \le 1+\log\frac{\sqrt{Y}}{A} = 1+\frac{5}{16}\log q$$

で抑えられる．これを Burgess 側の評価に代入し，Pólya–Vinogradov 側の評価と合わせればよい． □

3 平方因子を除く基本計数

n_1, n_2 を互いに素な正の奇数の無平方整数，$c \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ とする．$\varepsilon = (\varepsilon(p))_{p\mid n_1}$ は各 $p \mid n_1$ における符号 $\varepsilon(p) \in \{+1,-1\}$ の族とする．$Y>0$ に対し，$T(Y; c, n_1, n_2, \varepsilon)$ で，次の条件を満たす整数 $0<d<Y$ の個数を表す．

$$d \text{ は無平方数;} \quad d \equiv c \pmod 8; \quad (d, n_1n_2)=1; \quad \text{すべての } p\mid n_1 \text{ に対し } \left(\frac{d}{p}\right)=\varepsilon(p).$$

定義から、この計数関数は次の表示をもつ．

$$T(Y; c, n_1, n_2, \varepsilon) = \sum_{\substack{0<d<Y\\ d\equiv c\ (8)\\ (d,n_1n_2)=1}} \mu(d)^2 \prod_{p\mid n_1} \frac{1+\varepsilon(p)\left(\frac{d}{p}\right)}{2} \tag{6}$$

ここで μ は Möbius 関数である．無平方な正整数上の乗法的関数 λ_1 を，素数 p における値を

$$\lambda_1(p) := \frac{\kappa(p)+\lambda_2(p)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(1-p^{-1})^{1/2}}\,p^{3/16} + \frac{1+p^{-1/2}}{2} \tag{7}$$

とすることで定める．本節の目標は次の一様評価である。

命題 5.

$$T(Y; c, n_1, n_2, \varepsilon) = \frac{Y}{2^{\omega(n_1)}\pi^2} \prod_{p\mid n_1n_2} \frac{p}{p+1} + O\Big(\sqrt{Y}\,(\log(2n_1))^{5/4}\lambda_1(n_1)\lambda_2(n_2)\Big). \tag{8}$$

証明. 各 $h \mid n_1$ に対して $\varepsilon(h) := \prod_{p\mid h}\varepsilon(p)$ と定めることで，ε を n_1 の約数上の乗法的関数とみなす．(6) の積は

$$\prod_{p\mid n_1} \frac{1+\varepsilon(p)\left(\frac{d}{p}\right)}{2} = \frac{1}{2^{\omega(n_1)}} \sum_{h\mid n_1} \varepsilon(h)\left(\frac{d}{h}\right)$$

と展開できる．ここで $\left(\frac{d}{h}\right)$ は Jacobi 記号である．したがって，各 $h \mid n_1$ に対して

$$T_h(Y) := \sum_{\substack{0<d<Y\\ d\equiv c\ (8)\\ (d,n_1n_2)=1}} \mu(d)^2 \left(\frac{d}{h}\right) \tag{9}$$

とおくと，

$$T(Y; c, n_1, n_2, \varepsilon) = \frac{1}{2^{\omega(n_1)}} \sum_{h\mid n_1} \varepsilon(h) T_h(Y) \tag{10}$$

である．$T_h(Y)$ の c, n_1, n_2 への依存は記号から省略する．次に，各 $T_h(Y)$ に $\mu(d)^2 = \sum_{a^2\mid d}\mu(a)$ を代入し，$d=a^2k$ と置く．もとの条件から $(a, 2n_1n_2) = (k, n_1n_2) = 1$ であり，$a^2 \equiv 1 \pmod 8$，$\left(\frac{a^2}{h}\right)=1$ より，

$$T_h(Y) = \sum_{\substack{a\le\sqrt{Y}\\ (a,2n_1n_2)=1}} \mu(a) \sum_{\substack{0<k<Y/a^2\\ k\equiv c\ (8)\\ (k,n_1n_2)=1}} \left(\frac{k}{h}\right)$$

となる．$\left(\frac{k}{h}\right)$ は $(k,h)>1$ なら零になるため，内側の和の条件 $(k,n_1n_2)=1$ を $(k,n_1n_2/h)=1$ に置き換えてよい．この条件を包除公式

$$\mathbf{1}_{(k,n_1n_2/h)=1}=\sum_{e|(n_1n_2/h,k)}\mu(e)=\sum_{\substack{e|n_1n_2/h\\ e|k}}\mu(e)$$

で展開し，$k=e\ell$ と置く．e は奇数なので $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ で逆元 e^{-1} を持ち，$k\equiv c\pmod 8$ は $\ell\equiv ce^{-1}\pmod 8$ となる．e と a の和の順序を入れ替え，以下を得る：

$$T_h(Y)=\sum_{e|n_1n_2/h}\mu(e)\left(\frac{e}{h}\right)\sum_{\substack{a\le\sqrt{Y/e}\\(a,2n_1n_2)=1}}\mu(a)\sum_{\substack{0<\ell<Y/ea^2\\ \ell\equiv ce^{-1}\ (8)}}\left(\frac{\ell}{h}\right)\tag{11}$$

まず $h=1$ の項 $T_1(Y)$ を評価する．この場合，(11) の ℓ に関する和は $Y/(8ea^2)+O(1)$ である．これを a について足すと，$O(1)$ の総和も，主項の a についての和を無限和に延長する誤差も $O(\sqrt{Y/e})$ である．従って，$\sum_{e|n_1n_2}e^{-1/2}=\lambda_2(n_1n_2)$ より，

$$\begin{aligned}T_1(Y)&=\frac{Y}{8}\sum_{e|n_1n_2}\frac{\mu(e)}{e}\sum_{\substack{a\ge1\\(a,2n_1n_2)=1}}\frac{\mu(a)}{a^2}+O\Big(\sqrt{Y}\,\lambda_2(n_1n_2)\Big)\\&=\frac{Y}{8}\prod_{p|n_1n_2}(1-p^{-1})\prod_{p\nmid 2n_1n_2}(1-p^{-2})+O\Big(\sqrt{Y}\,\lambda_2(n_1n_2)\Big).\end{aligned}$$

$\prod_{p\neq2}(1-p^{-2})=8/\pi^2$ より，$2^{-\omega(n_1)}T_1(Y)$ の主項は (8) の主項と一致する．

次に $h>1$ の項 $T_h(Y)$ を評価する．$e\mid n_1n_2/h$ に対し、$r\equiv ce^{-1}\pmod 8$ となる $r\in\mathbb{Z}$ を選び、さらに $8b\equiv r\pmod h$ を満たす整数 b を選ぶ。N_a を $0<\ell<Y/ea^2$，$\ell\equiv r\pmod 8$ を満たす整数 ℓ の個数とする．$\ell=r+8j$ と書けば，$\ell>0$ は $j>-r/8$ と同値であり，$\left(\frac{\ell}{h}\right)=\left(\frac{8}{h}\right)\left(\frac{j+b}{h}\right)$ である．従って

$$\sum_{\substack{0<\ell<Y/ea^2\\ \ell\equiv ce^{-1}\ (8)}}\left(\frac{\ell}{h}\right)=\left(\frac{8}{h}\right)S\Big(\Big(\frac{\cdot}{h}\Big),N_a;b-\frac{r}{8}\Big),\qquad N_a\le\frac{Y}{ea^2}$$

である。ヤコビ記号 $\left(\frac{\cdot}{h}\right)$ は導手 h の原始指標なので、命題 4 から

$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{Y/e}\\(a,2n_1n_2)=1}}\Big|S\Big(\Big(\frac{\cdot}{h}\Big),N_a;b-\frac{r}{8}\Big)\Big|\ll\sqrt{\frac{Y}{e}}\,\kappa(h)(\log h)^{5/4}$$

を得る．よって，$h<2n_1$ と $\sum_{e|n_1n_2/h}e^{-1/2}=\lambda_2(n_1n_2/h)$ を用いると，

$$\sum_{1\neq h|n_1}|T_h(Y)|\ll\sqrt{Y}\,(\log(2n_1))^{5/4}\sum_{1\neq h|n_1}\kappa(h)\lambda_2(n_1n_2/h).\tag{12}$$

$\kappa(1)=1$ なので，$T_1(Y)$ の誤差評価と (12) を $h\mid n_1$ 全体の和にまとめられる．λ_2,κ の乗法性と (7) により

$$\sum_{h|n_1}\kappa(h)\lambda_2(n_1n_2/h)=\lambda_2(n_2)\prod_{p|n_1}\big(\lambda_2(p)+\kappa(p)\big)=2^{\omega(n_1)}\lambda_1(n_1)\lambda_2(n_2).\tag{13}$$

(10) と合わせれば，(8) が得られる． □

4　主定理の証明と一般の局所条件

本節ではまず局所条件 σ が純粋な場合の定理 1 を示し、次に一般の σ の場合の系 6 を導く。

定理 *1* の証明. まず $p=2$ における局所条件を、二次体 F の判別式 $D=\mathrm{Disc}(F)$ の合同条件で表す．F に対し、

$$e=\mathrm{ord}_2(D)\in\{0,2,3\},\qquad c\equiv D/2^e\pmod 8,\quad c\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$$

とおくと、$F\otimes\mathbb{Q}_2$ の同型類は (e,c) のみで決まる．可能な (e,c) の組は次の 8 組である：

$$(0,1),(0,5),(2,3),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)$$

それぞれに対応する 2 次 $\mathbb{Q}_2$ 代数の密度は $1/(3\cdot 2^e)$ である．

$2\mid n$ かつ σ_2 が一つの元からなる場合に定理を示せば十分である．実際，$F\otimes\mathbb{Q}_2$ の同型類によって分割すれば（必要に応じて台を n から $2n$ に変更して），一般の場合の計数はこの形の高々 8 個の計数の和となり，u_1,u_2,r_1,r_2 は変わらない．主項は局所密度の加法性（A_2 上の密度の総和は 1）により足し合わされ，誤差評価は絶対定数倍を除いてそのまま保たれる．

以下，この場合を考え，σ_2 の唯一の元に対応する組を (e,c) とする．このとき $c_2(\sigma_2)=1/(3\cdot 2^e)$ である．

分岐を指定する奇素数の積は r_1r_2 である．したがって、$N_2^{\pm}(X,\sigma)$ によって数えられる 2 次体 F の判別式 D は、ある整数 d によって $D=\pm 2^e r_1r_2d$ と表される。D がみたす条件を d の条件で表す。$Y=X/(2^er_1r_2)$ とおけば，d は以下をみたす：

$$d\text{ は無平方};\qquad 0<d<Y;\qquad (d,n)=1;\qquad d\equiv\pm c(r_1r_2)^{-1}\pmod 8.$$

また，奇素数 $p\mid n$ のうち $\#\sigma_p=1$ となるものの積は u_1r_1，$\#\sigma_p=2$ となるものの積は u_2r_2 である．$p\mid u_1r_1$ では条件 $\left(\frac{d}{p}\right)=\varepsilon(p)$ が課される。実際，$p\mid u_1$ では $\left(\frac{D}{p}\right)$，$p\mid r_1$ では $\left(\frac{D/p}{p}\right)$ によって $F\otimes\mathbb{Q}_p$ が決まり，$D=\pm 2^er_1r_2d$ を代入すれば、これらはいずれも $\left(\frac{d}{p}\right)=\pm 1$ の形の条件になる．また，$p\mid u_2r_2$ では，すでに課した $(d,p)=1$ のほかに条件はない．逆に，これらの条件を満たす d は，$D=1$ の場合を除き，数える二次体 F と一対一に対応する．したがって，

$$N_2^{\pm}(X,\sigma)=T\big(Y;\pm c(r_1r_2)^{-1},u_1r_1,u_2r_2,\varepsilon\big)-\delta_1$$

である．ただし $\delta_1\in\{0,1\}$ で，$\delta_1=1$ は $D=1$ に対応する d が数えられたときの補正である．

命題 5 より、$N_2^{\pm}(X,\sigma)$ の主項は

$$\frac{X}{2^{e+\omega(u_1r_1)}r_1r_2\pi^2}\prod_{2\neq p\mid n}\frac{p}{p+1}=\frac{3X}{\pi^2}\prod_{p\mid n}c_p(\sigma_p)$$

である．従って，

$$N_2^{\pm}(X,\sigma)=\frac{3}{\pi^2}X\prod_{p\mid n}c_p(\sigma_p)+O\left(\sqrt{\frac{X}{r_1r_2}}\,(\log(2u_1r_1))^{5/4}\lambda_1(u_1r_1)\lambda_2(u_2r_2)\right)\tag{14}$$

を得る．δ_1 の影響はこの誤差に吸収できる．素数 $p\to\infty$ に対して $\lambda_1(p)/p^{3/16}\to\sqrt{2}<3/2$ なので，無平方な正整数 q に対し $\lambda_1(q)\ll q^{3/16}(3/2)^{\omega(q)}$ である．これを (14) に用いれば (1) を得る．　□

次に，一般の局所条件 $\sigma=(\sigma_p)_{p\mid n}$ に対する計数を考える．奇素数 $p\mid n$ に対し，σ_p の元のうち不分岐なもの全体を σ_p^{ur}，分岐するもの全体を σ_p^{rm} と書き，それぞれの元の個数を $a_p:=\#\sigma_p^{\mathrm{ur}},b_p:=\#\sigma_p^{\mathrm{rm}}$

とする．$a_pb_p=0$ のとき σ_p を純粋，そうでないとき混合と呼ぶ．σ が純粋であることは、すべての奇素数 $p\mid n$ で σ_p が純粋であることと同値である。

各 σ_p に含まれる不分岐代数と分岐代数の個数 (a_p,b_p) に応じて，奇素数 $p\mid n$ を分類し，n の次の五つの因子を定める：

$$u_1:=\prod_{a_p=1}p,\quad u_2:=\prod_{\substack{a_p=2\\ b_p=0}}p,\quad u_2':=\prod_{\substack{a_p=2\\ b_p=1}}p,\quad r_1:=\prod_{\substack{a_p=0\\ b_p=1}}p,\quad r_2:=\prod_{\substack{a_p=0\\ b_p=2}}p. \tag{15}$$

これら五つの整数は互いに素で，その積は n の奇数部分に等しい．また，σ が純粋な場合には $u_2'=1$ であり，u_1,u_2,r_1,r_2 の定義は第 1 節のものと一致する．各奇素数 $p\mid n$ に対し，局所密度を $c_p(\sigma_p):=(a_pp+b_p)/(2(p+1))$ と定め，$p=2$ における局所密度の定義は変えない．

Bhargava, Thorne と著者 [1, Proposition 4.2] は一般の局所条件 σ と任意の $\epsilon>0$ に対し，

$$N_2^{\pm}(X,\sigma)=\frac{3}{\pi^2}X\prod_{p\mid n}c_p(\sigma_p)+O_\epsilon\Big(X^{1/2}\,u_1^{1/4}(u_2u_2')^{1/4}r_1^{-1/4}r_2^{-1/2}(u_1u_2u_2'r_1r_2)^{\epsilon}\Big) \tag{16}$$

を得た．ただし暗黙定数は ϵ にのみ依存する．次の系は定理 1 の一般化であり，またこの評価を改善する．

系 6. すべての局所条件 σ と $X>0$ に対し、以下が成り立つ。

$$N_2^{\pm}(X,\sigma)=\frac{3}{\pi^2}X\prod_{p\mid n}c_p(\sigma_p)+O\left(\frac{X^{1/2}\,u_1^{3/16}}{r_1^{5/16}r_2^{1/2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(u_1r_1u_2')}(\log(2u_1r_1))^{5/4}\lambda_2(u_2r_2)\right). \tag{17}$$

証明. 定理 1 の証明と同様に，$2\mid n$ かつ σ_2 が一つの元からなる場合を示せば十分である．σ_p が混合である奇素数 p の積を m とする．定義より，$u_2'\mid m\mid u_1u_2'$ である．m の各約数 t に対して，σ と同じ台 n をもつ局所条件 $\sigma^{(t)}=(\sigma_p^{(t)})_{p\mid n}$ を，$p\mid m$ においては

$$\sigma_p^{(t)}:=\begin{cases}\sigma_p^{\mathrm{rm}}, & p\mid t,\\ \sigma_p^{\mathrm{ur}}, & p\mid m/t\end{cases}$$

とし，$p\nmid m$ においては $\sigma_p^{(t)}:=\sigma_p$ とすることによって定める．混合な局所条件 σ_p を σ_p^{ur} と σ_p^{rm} に分けることにより，$\mathcal{F}(\sigma)$ は $\mathcal{F}(\sigma)=\sqcup_{t\mid m}\mathcal{F}(\sigma^{(t)})$ と無縁和に分割されるから、

$$N_2^{\pm}(X,\sigma)=\sum_{t\mid m}N_2^{\pm}(X,\sigma^{(t)}) \tag{18}$$

である．各 $\sigma^{(t)}$ は純粋であるから，主定理の証明で得た (14) を右辺の各項に適用する．それぞれの主項を足すと，局所密度の加法性から所望の主項を得る．

局所条件 $\sigma^{(t)}$ のもとで，許される局所代数が一つである奇素数 $p\mid n$ の積を $n_1^{(t)}$，二つである奇素数 $p\mid n$ の積を $n_2^{(t)}$ とする．両者の積は n の奇数部分に等しい。各 $t\mid m$ に対して $t_0:=(t,u_2')$ とおく．$p\mid u_2'$ では，分岐側を選ぶ $p\mid t$ の場合に限って $\#\sigma_p^{(t)}=1$ となる．このことと (15) より，$n_1^{(t)}\mid u_1r_1t_0$ である．したがって，

$$\log(2n_1^{(t)})\le\log(2u_1r_1t_0)\ll\log(2u_1r_1)\cdot t_0^{1/5}$$

が成り立つ．$\sigma^{(t)}$ で分岐を指定する奇素数の積は r_1r_2t なので，$N_2^{\pm}(X,\sigma^{(t)})$ の (14) による誤差を $t\mid m$ について足すことで，

$$\begin{aligned}\left|N_2^{\pm}(X,\sigma)-\frac{3X}{\pi^2}\prod_{p\mid n}c_p(\sigma_p)\right|&\ll\sqrt{\frac{X}{r_1r_2}}\sum_{t\mid m}t^{-1/2}(\log(2n_1^{(t)}))^{5/4}\lambda_1(n_1^{(t)})\lambda_2(n_2^{(t)})\\&\ll\sqrt{\frac{X}{r_1r_2}}(\log(2u_1r_1))^{5/4}\sum_{t\mid m}\frac{t_0^{1/4}}{t^{1/2}}\lambda_1(n_1^{(t)})\lambda_2(n_2^{(t)})\end{aligned} \tag{19}$$

を得る．以下の補題から所望の誤差評価が従う． □

補題 7. 系 *6* の証明中の記号を用いると，次が成り立つ．

$$\sum_{t\mid m}\frac{t_0^{1/4}}{t^{1/2}}\lambda_1(n_1^{(t)})\lambda_2(n_2^{(t)}) \ll \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(u_1r_1u_2')}(u_1r_1)^{3/16}\lambda_2(u_2r_2) \tag{20}$$

証明．乗法性により，(20) の左辺の約数和は次のように素数ごとの積に分解される：

$$\prod_{\substack{2\neq p\mid n\\ p\nmid m}}\lambda_{a_p+b_p}(p)\prod_{p\mid m/u_2'}\bigl(\lambda_{a_p}(p)+p^{-1/2}\lambda_{b_p}(p)\bigr)\prod_{p\mid u_2'}\bigl(\lambda_2(p)+p^{-1/4}\lambda_1(p)\bigr) \tag{21}$$

実際、$p\mid m$ かつ $p\nmid u_2'$ における因子は，$p\nmid t$ の場合の $\lambda_{a_p}(p)$ と $p\mid t$ の場合の $p^{-1/2}\lambda_{b_p}(p)$ の和である．$p\mid u_2'$ では，$(a_p,b_p)=(2,1)$ と追加の重み $t_0^{1/4}$ により，因子は $\lambda_2(p)+p^{-1/4}\lambda_1(p)$ となる．一方，$p\nmid m$ では $p\nmid t$ に限られるので因子は単項であり，$a_pb_p=0$ に注意するとそれは $\lambda_{a_p+b_p}(p)$ と書ける．

$\lambda_2(p)<\kappa(p)$ より $\lambda_2(p)<\lambda_1(p)$ なので，(21) の $p\mid u_1$ における因子は，混合の場合には

$$\lambda_1(p)+p^{-1/2}\lambda_{b_p}(p)\le\lambda_1(p)(1+p^{-1/2})=\lambda_1(p)\lambda_2(p)$$

であり，純粋の場合には $\lambda_1(p)$ であるから、いずれの場合も $\lambda_1(p)\lambda_2(p)$ 以下である。また、(21) の $p\mid u_2$ における因子は $\lambda_2(p)$ であり、$p\mid r_i$ における因子は $\lambda_i(p)$ である。従って，

$$\begin{aligned}\sum_{t\mid m}\frac{t_0^{1/4}}{t^{1/2}}\lambda_1(n_1^{(t)})\lambda_2(n_2^{(t)}) &\le \lambda_1(r_1)\lambda_2(u_2r_2)\prod_{p\mid u_1}\lambda_1(p)\lambda_2(p)\prod_{p\mid u_2'}\bigl(\lambda_2(p)+p^{-1/4}\lambda_1(p)\bigr)\\ &\le \lambda_2(u_2r_2)\prod_{p\mid u_1r_1}\lambda_1(p)\lambda_2(p)\prod_{p\mid u_2'}\bigl(\lambda_2(p)+p^{-1/4}\lambda_1(p)\bigr)\end{aligned}$$

である．素数 $p\to\infty$ において

$$\frac{\lambda_1(p)\lambda_2(p)}{p^{3/16}}\longrightarrow\sqrt{2}<\frac{3}{2},\qquad \lambda_2(p)+p^{-1/4}\lambda_1(p)\longrightarrow 1<\frac{3}{2}$$

である．以上より (20) が従う． □

注 8. (1) と (17) の誤差項，および (20) の右辺に現れる $3/2$ は，任意の固定された実数 $B>\sqrt{2}$（例えば $B=1.42$）に置き換えられる．このとき暗黙定数は B に依存しうる．

参考文献

[1] M. Bhargava, T. Taniguchi and F. Thorne, *Improved error estimates for the Davenport–Heilbronn theorems*, Math. Ann. **389** (2024), no. 4, 3471–3512. DOI: 10.1007/s00208-023-02684-w.

[2] D. A. Burgess, *On character sums and L-series. II*, Proc. London Math. Soc. (3) **13** (1963), 524–536. DOI: 10.1112/plms/s3-13.1.524.

[3] E. Cohen, *Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer*, Math. Z. **74** (1960), 66–80. DOI: 10.1007/BF01180473.

[4] E. Cohen and R. L. Robinson, *On the distribution of the k-free integers in residue classes*, Acta Arith. **8** (1962/63), 283–293; errata, **10** (1965), 443; correction, **16** (1970), 439. DOI: 10.4064/aa-8-3-283-293.

[5] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 74, Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] J. Ellenberg, L. B. Pierce and M. Matchett Wood, *On ℓ-torsion in class groups of number fields*, Algebra Number Theory **11** (2017), no. 8, 1739–1778. DOI: 10.2140/ant.2017.11.1739.

[7] L. Gegenbauer, *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, Denkschr. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Cl. **49** (1885), 37–80.

[8] A. Granville and K. Soundararajan, *The distribution of values of $L(1,\chi_d)$*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 5, 992–1028; errata, **14** (2004), no. 1, 245–246. DOI: 10.1007/s00039-003-0438-3; errata DOI: 10.1007/s00039-004-0456-9.

[9] N. Jain-Sharma, T. Khale and M. Liu, *Explicit Burgess bound for composite moduli*, Int. J. Number Theory **17** (2021), no. 10, 2207–2219. DOI: 10.1142/S1793042121500834.

[10] M. Munsch, *Character sums over squarefree and squarefull numbers*, Arch. Math. **102** (2014), no. 6, 555–563. DOI: 10.1007/s00013-014-0658-9.

[11] P. Pollack, *The average least quadratic nonresidue modulo m and other variations on a theme of Erdős*, J. Number Theory **132** (2012), no. 6, 1185–1202. DOI: 10.1016/j.jnt.2011.12.015.

[12] O. Robert and G. Tenenbaum, *Sur la répartition du noyau d'un entier*, Indag. Math. (N.S.) **24** (2013), no. 4, 802–914. DOI: 10.1016/j.indag.2013.07.007.

[13] W. Schwarz, *Über die Summe $\sum_{n\le x}\varphi(f(n))$ und verwandte Probleme*, Monatsh. Math. **66** (1962), 43–54. DOI: 10.1007/BF01418877.

[14] A. Shankar and J. Tsimerman, *Secondary terms in the counting functions of quartic fields II*, arXiv:2508.08527 (2025).

[15] D. Suryanarayana, *Uniform O-estimates of certain error functions connected with k-free integers*, J. Austral. Math. Soc. **11** (1970), 242–250. DOI: 10.1017/S144678870000642X.

[16] T. Taniguchi and F. Thorne, *Secondary terms in counting functions for cubic fields*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508. DOI: 10.1215/00127094-2371752.

657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1
神戸大学大学院理学研究科数学専攻
tani@math.kobe-u.ac.jp