Gentzenから始まる証明論50年

新井 敏康（千葉大学）

1 Gentzen

1.1 G. Gentzen の学位論文 [Gentzen34/35]

自然演繹 (Natural Deduction) NJ, NK

実際の推論にできる限り近い形の形式的な論理体系を作る

論理記号 $\vee, \wedge, \neg, \supset$（ならば）$\exists, \forall$ ごとに対を成す

導入規則：どのようなときにその記号を結論してよいか（記号の定義）
除去規則：導入規則が定める記号の意味からの帰結

$$\frac{A_0 \quad A_1}{A_0 \wedge A_1}\,(\wedge I) \qquad \frac{A_0 \wedge A_1}{A_i}\,(\wedge E)\,(i = 0, 1)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\,(\supset I) \qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\,(\supset E)$$

導入規則 $(\supset I)$ を用いると仮定 A が「落ちる」(closed, discharged) あるいは束縛される.

さらに NJ では矛盾 $\perp$ に関する規則 $(\perp)$ が, そして NK では二重否定の除去規則 $(\neg\neg)$ が用いられる.

$$\frac{\perp}{A}\,(\perp) \qquad \frac{\neg\neg A}{A}\,(\neg\neg)$$

> （NJ, NK は）或る独特な性質をもっているということや, さらにその点に関しては, 直観主義者が否認するところの‘排中律’が特殊な地位を占めているということもわかってきた

での「或る独特な性質」とは基本定理 (Hauptsatz), 正規化定理 (normalization theorem)

> 純粋に論理的な証明は, すべて或る特定な標準形に変形することができる.
>
> 標準形になおされた証明の最も本質的な性質を一言にして言えば, それは‘まわり道がない’ということである. 証明の最後の結論に含まれている概念は, その結論を得るために必然的に用いざるを得ないものであるが, それ以外の一切の概念は, この証明には現れない

標準形になっている証明では, 導入規則に続いて除去規則を用いるということがない. $\wedge$ なら左の証明は標準形ではなく, それは右に変形される：

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_0 \\ A_0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\ \pi_1 \\ A_1\end{matrix}}{A_0 \wedge A_1}\,(\wedge I)}{A_i}\,(\wedge E) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_i \\ A_i\end{matrix}
$$

また $\supset$ では

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots\ \rho \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\,(\supset I) \qquad \begin{matrix}\vdots\ \pi \\ A\end{matrix}}{B}\,(\supset E) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi \\ A \\ \vdots\ \rho \\ B\end{matrix}
$$

右の証明では, 証明 ρ での仮定 A のところに A に至る証明 π を代入している.

- 自然演繹の導入の影響

[Prawitz65]：正規化定理の証明の出版と自然演繹の復権, cf. [2ndScand71, Kreisel71].
[Howard82]：Curry-Howard 対応 (isomorphism), 自然演繹での証明とプログラムの対応および命題と型の対応, さらに証明の変形と型付きラムダ計算における計算との対応, cf. [Girard89].
[Martin-Löf98]：型理論
[Tait67]:[Gödel58] の T を, 型付き λ-式の拡張として, computability predicate による強正規化 (strong normalization, あらゆる計算の停止性) の証明.

- sequent calculi LJ, LK の導入

  基本定理をすっきりした形で表現し証明することができるようにするためには, 特にそれに適した論理計算を基礎におかねばならなかった. この目的のためには, 自然な論理計算が不適当であることはわかっていた. 確かにそれは基本定理を成立させるための本質的な性質をすでに示してはいる. しかし, 前にも注意しておいたように, この性質に関連して排中律が特殊な地位を占めている限りは, このことは直観主義論理にのみ限定されてしまうのである.

正規化定理としての基本定理は直観主義論理 NJ についてはきれいに述べて証明することができるが, 古典論理 NK についてはそうではない. 両方の論理に共通に成り立つ事実として定式化して証明するために論理計算自体を変更.

LK の sequent $\Gamma \to \Delta$, Γ や Δ は論理式の有限列.
公理：$A \to A$.
推論規則=構造の規則+論理記号の規則+カット (cut).

$$\frac{\Gamma \to \Delta, C \quad C, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}\ (cut)$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}\ (\supset R) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Lambda \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}\ (\supset L)$$

構造：weakening（増やす）contraction（まとめる）exchange（交換）
(cut) と $\supset$ に関する規則以外は左右対称.
(cut) 以外では推論規則の上にある sequent に現れる論理式は下にある sequent のある論理式の部分論理式, $A(t)$ は $\exists x\, A(x), \forall x\, A(x)$ の部分論理式として. cut-free な証明に現れる論理式は, 証明されている sequent に現れるどれかの論理式の部分論理式に限る.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ (wL) \quad \frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ (cL) \quad \frac{\Gamma, A, B, \Lambda \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Lambda \to \Delta}\ (eL)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}\ (wR) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}\ (cR) \quad \frac{\Gamma \to \Lambda, A, B, \Delta}{\Gamma \to \Lambda, B, A, \Delta}\ (eR)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A_i}{\Gamma \to \Delta, A_0 \vee A_1}\ (\vee R) \qquad \frac{A_i, \Gamma \to \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge L)$$

$$\frac{A_0, \Gamma \to \Delta \quad A_1, \Gamma \to \Delta}{A_0 \vee A_1, \Gamma \to \Delta}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A_0 \quad \Gamma \to \Delta, A_1}{\Gamma \to \Delta, A_0 \wedge A_1}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \to, \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\, A(x)}\ (\exists R) \qquad \frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\, A(x), \Gamma \to \Delta}\ (\forall L)$$

$$\frac{A(b), \Gamma \to \Delta}{\exists x\, A(x), \Gamma \to \Delta}\ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(b)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, A(x)}\ (\forall R)$$

$(\exists L), (\forall R)$ での b は eigenvariable で下に現れない.

直観主義論理の sequent calculus LJ は, LK において sequent を「矢印 $\to$ の右に含まれる論理式はたかだかひとつ」となるものに制限して得られる. sequent $\Gamma \to B_1, \ldots, B_n$ が LJ の sequent なのは $n = 0, 1$ の場合だけ.

自然演繹	sequent calculus
導入規則	右規則
除去規則	左規則+(cut)

$$\frac{A_0 \quad A_1}{A_0 \wedge A_1}\,(\wedge I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \to A_0 \quad \Gamma \to A_1}{\Gamma \to A_0 \wedge A_1}\,(\wedge R)$$

$$\frac{A_0 \wedge A_1}{A_i}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\Gamma \to A_0 \wedge A_1 \qquad \dfrac{A_i \to A_i}{A_0 \wedge A_1 \to A_i}\,(\wedge L)}{\Gamma \to A_i}\,(cut)$$

(cut) は自然演繹を sequent calculus で模倣するときに出現する.

基本定理, カット消去定理 (cut elimination theorem)：LK [LJ] における証明を上手に変形していくとそこから (cut) がすべて取り除かれて (cut) 無しの LK [LJ] の証明が得られ, それが証明している sequent は元の証明のそれと同じである

- [Gentzen34/35] での基本定理の応用

  直観主義命題論理の決定問題の解法と数学的帰納法を含まない古典的算術 PA^- の無矛盾性証明.

古典論理 LK の無矛盾性は one element model により明らか.
$\mathrm{PA}^- =$ 等号公理, $\forall x(x+1 \neq 0), \forall x, y(x+1 = y+1 \supset x = y), +, \cdot$ の公理.
PA^- は無限モデルしか持たない.
sequent $\mathrm{PA}^- \to$ の LK での証明から (cut) を除去すればそのような証明は存在し得ないことが分かる.

古典論理： 構造の規則を含まない one-sided sequent calculus.
論理式はすべて否定標準形（$\neg$ は原子論理式にのみ作用）

$$\frac{}{\Gamma, \neg A, A}\,(ax) \qquad \frac{\Gamma, A_i}{\Gamma, A_0 \vee A_1}\,(\vee) \quad \frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma, \exists x\, A(x)}\,(\exists)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \quad A, \Delta}{\Gamma, \Delta}\,(cut) \quad \frac{\Gamma, A_0 \quad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1}\,(\wedge) \quad \frac{\Gamma, A(b)}{\Gamma, \forall x\, A(x)}\,(\forall)$$

Γ や Δ は論理式の有限集合で $\Gamma, \Delta := \Gamma \cup \Delta$, $\Gamma, A := \Gamma \cup \{A\}$.

部分構造論理 (substructural logic) のその後の発展を考えると, 構造に関する規則を Gentzen が分離して取り出しておいてくれてよかった.

1.2 [Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38, Gentzen43]

[Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38] で示されていることを, PA の構成的な無矛盾性証明であると理解してはいけない.

[Kolmogorov25, Gödel33, Gentzen74b]：PA $\hookrightarrow$ HA.

PA の無矛盾性証明は, モデル $\mathbb{N}$ の存在, BHK 解釈での（循環を含む）構成の概念, では不可.

記号の操作程度の有限的な手法は PA で形式化できるだろうから無理, [Gödel31].

　有限的な方法の延長にありながら, それを超え出る方法を見い出すこと.
PA の論理式に, 古典的でも構成的でもない解釈を与える.

有限の証明 proof figure は, 無限の (cut) 無しの証明 cut-free ω-derivation をencodeしている, もしくは前者は後者の表記である

論理式, より一般にはsequentが正しいとは, そのcut-free ω-derivationが存在することである

$\vdash \Gamma$: sequent Γ の cut-free ω-derivation が存在.

$$\frac{\cdots \quad \Gamma, A(\bar{n}) \quad \cdots}{\Gamma}$$

ω-derivation はsequentsの ω-branching wellfounded tree となる.

示すべきは

$\mathsf{PA} \vdash \Gamma(a, \ldots)$ ならば, 任意の $n, \ldots$ について $\vdash \Gamma(\bar{n}, \ldots)$.

本質的には, [Schütte51, Tait68, Mints75] でのように ω-logic での CE.

数学的帰納法の推論規則：

$$\frac{\Gamma, A(\bar{0}) \quad \Gamma, \neg A(a), A(a+1)}{\Gamma}$$

を (cut) の連なり

$$\frac{\Gamma, A(\bar{0}) \quad \dfrac{\Gamma, A(\bar{0}) \quad \Gamma, \neg A(\bar{0}), A(\bar{1})}{\Gamma, A(\bar{1})} \quad \dfrac{\Gamma, A(\bar{1}) \quad \Gamma, \neg A(\bar{1}), A(\bar{2})}{\Gamma, A(\bar{2})} \quad \cdots}{\Gamma}$$

で置き換える.

そこで問題はつぎを示すこと：

Lemma 1.1 $\vdash \Gamma, \neg C$ かつ $\vdash C, \Delta$ ならば $\vdash \Gamma, \Delta$.

Lemma 1.1 は$\vdash \Gamma, \neg C$ および$\vdash C, \Delta$ をそれぞれ示す wellfounded trees に関する帰納法で示される.

Lemma 1.1 とそれから得られる解釈の証拠である PA で証明できる sequent Γ の cut-free ω-derivation は, wellfounded であるからその height を順序数として考えて, 順序数が表に出てくる.

関与する順序数 (ordinal term) は $\varepsilon_0 = \min\{\lambda > \omega : \forall\alpha < \lambda(2^\alpha < \lambda)\}$.
ω より大きい：数学的帰納法
指数関数 2^α で閉じている必要性は以下による.

$\vdash^\alpha_d \Gamma$: depth$\leq \alpha$, その中の (cut) の cut formula の複雑さ $< d$ という Γ の ω-derivation が存在する.

Lemma 1.2 $\vdash^\alpha_{d+1} \Gamma$ ならば$\vdash^{2^\alpha}_d \Gamma$.

$d = 0$ の場合の$\vdash^\alpha_0 \Gamma$ は Γ の cut-free ω-derivation でその depth$\leq \alpha$ なるものが存在することを意味する.

[Gentzen38]： proof figure と ordinal term という有限の対象（どちらも無限の対象を denote している）同士が直に結びつけられている. [Schütte51, Tait68, Mints75] での infinitary derivation の cut-elimination をその code あるいは embedding の preimage である有限の証明図上でしている, cf. [Buchholz97].

計算可能関数をふたつ $r : p \mapsto r(p)$, $o : p \mapsto o(p)$ つくって

> 矛盾 (empty sequent) → の証明図の code p に対して, $r(p)$ もまた矛盾の証明図の code で, また $o(p)$ は ordinal term $o(p) < \varepsilon_0$ で, $o(r(p)) < o(p)$.

が有限的に示される. 具体的につくられた ordinal terms$< \varepsilon_0$ が無限下降列にならないことを有限的数学に付け加えれば, PA の無矛盾性が従う.

就職論文 [Gentzen43]：順序数解析 (ordinal analysis) の始まり (?)
T の証明論的順序数：$T \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x\, E(x)$ となる計算可能な strict partial order(irreflexive and transitive) $\prec$ の順序型 $|\prec|$ の上限.

$\mathsf{PA}(E)$：PA に任意の述語を表す 1 変数の述語記号 E を付け加える.
order type ε_0 の順序 $<_{\varepsilon_0}$ について, 各 $\alpha < \varepsilon_0$ について

$$\mathsf{PA}(E) \vdash \forall x(\forall y <_{\varepsilon_0} x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x <_{\varepsilon_0} \alpha\, E(x)$$

逆に計算可能な strict partial order $\prec$ について

$$\mathsf{PA}(E) \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x\, E(x)$$

なら $|\prec| = \sup\{|n|_{\prec} + 1 : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon_0$. $|n|_{\prec} = \sup\{|m|_{\prec} + 1 : m \prec n\}$.

$$\mathsf{PA}(E) \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x\, E(x)$$

での仮定 $\forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x))$ のところを推論規則

$$\frac{\cdots \quad \Gamma, E(\bar{m}) \quad \cdots\ (m \prec n)}{\Gamma, E(\bar{n})}$$

で置き換えた (cut) 付きの ω-derivation において, ある $\alpha < \omega^2, d < \omega$ について $\vdash^{\alpha}_{d} E(\bar{n})$ が任意の n について成り立つ.

cut-elimination して $\beta = 2_d(\alpha) < \varepsilon_0$ について $\vdash^{\beta}_{0} E(\bar{n})$ となるので $|n|_{\prec} \leq \beta$.

PA の証明論的順序数 $|\mathsf{PA}| = \varepsilon_0$.

2　1950-70

[Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38, Gentzen43] の余波：[Gödel58]

　　現在まで用いられたことのない有限の立場のある拡張について

[Gentzen36, Gentzen38] での順序数 ε_0 からの順序数列の停止性の代替としての有限型の原始再帰的汎関数 (primitive recursive functionals of finite types) のクラス T.

　T に属する自然数上の関数の計算は $< \varepsilon_0$-recursion で行える, [Tait65]. [Schütte51] における ω-rule を伴った infinitary calculus での cut-elimination をまねて, 汎関数を無限の列に展開.

[Ackermann40]
no-counterexample interpretation [Kreisel52, Gödel95, Tait05].
prenex nf $A \equiv \exists x \forall y \exists z \forall w\, B(x,y,z,w)$.

$$\begin{array}{rcl}
\neg A & \leftrightarrow & \forall x \exists y \forall z \exists w\, \neg B(x,y,z,w) \leftrightarrow \exists f, g \forall x, z\, \neg B(x, f(x), z, g(x,z)) \\
A & \leftrightarrow & \neg \exists f, g \forall x, z \neg B(x, f(x), z, g(x,z)) \leftrightarrow \forall f, g \exists x, z\, B(x, f(x), z, g(x,z)) \\
 & \leftrightarrow & \exists F, G \forall f, g\, A' \\
A' & \equiv & B(t, f(t), s, g(t,s))\, (t \equiv F(f,g), s \equiv G(f,g))
\end{array}$$

[Kreisel52]：PA $\vdash A$ ならば, ある $< \varepsilon_0$-recursive functionals F, G が存在して A' が正しい.

とくに Π^0_2-論理式について $\mathsf{PA} \vdash \forall x \exists y\, B(x,y)$ なら, $< \varepsilon_0$-recursive function f により $\forall x\, B(x, f(x))$(combinatorial independent results).

プログラムの停止性が PA で証明できる計算可能関数 (provably recursive) は, 単に計算可能というだけでなくより小さいクラスに属す.

> ([Kreisel58]) What more do we know if we have proved a theorem by restricted means than if we merely know that it is true?

命題の形式的な証明からその命題の正しさ以上の情報を抽き出すプログラム (unwinding of proofs).

「基礎付け」としての無矛盾性証明を議論することは, 当該の「無矛盾性証明」よりもはるかに難しい. 無矛盾性ではなく他の何かを証明していると考えてみてもよかろう.

2.1 SOA

[Hilbert-Bernays39]：数学を形式化する場所としての２階算術 Second Order Arithmetic (SOA) もしくは高階の自然数論.

[Stanford Report63, BFPS81, Feferman77]：SOA の諸部分体系を摘出してそれらの相互関係や証明論的強さ, 数学のどの範囲までがどの部分体系で形式化できるのかなどの問題が組織的に取り上げられた.

２階算術 SOA ：自然数から成る集合を表す２階の変数 $X, Y, Z, \ldots$.
２階の quantification のための推論規則. 変数か関係記号 R と eigenvariable Y について

$$\frac{A(R), \Gamma}{\exists X\, A(X), \Gamma} \quad \frac{A(Y), \Gamma}{\forall X\, A(X), \Gamma}$$

等号付きなら等号に関する公理 $\forall X, x, y(x = y \to X(x) \to X(y))$.

$$\text{CA:} \qquad \exists X \forall z\,(X(z) \leftrightarrow A(z))\ (A\text{ は（2 階の）任意の論理式})$$

$\mathbb{Z}_2$ は等号付きの 2 階論理上で, 公理（図式）は PA^-, CA と
$IND :\equiv (\forall X(X(0) \land \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to \forall a\, X(a)))$.

論理式のクラス：
$\Pi^0_0 = \Sigma^0_0$ ：quantifiers がすべて bounded $\exists x < t, \forall x < t$ である論理式.
1 階の論理式/算術的論理式 $\Pi^1_0 = \Sigma^1_0$ には 2 階の quantifiers が現れない.
Π^1_n-論理式 $A \equiv \forall X_1 \exists X_2 \cdots Q X_n B\,(B \in \Pi^1_0)$.
$A \in \Sigma^1_n \Leftrightarrow \neg A \in \Pi^1_n$.

Φ-CA は公理図式 CA において $A \in \Phi$ と制限した公理図式を表す.

以下で基礎になる $\mathrm{SOA}(\Pi^0_0\text{-CA})_0$ ：等号付きの 2 階論理上で，公理（図式）は PA^-, Π^0_0-CA, IND,
$(\Phi\text{-CA})_0$ は, $(\Pi^0_0\text{-CA})_0$ に公理図式 Φ-CA を付け加える.
$(\Phi\text{-CA})$ では IND の代わりに図式 $A \in \Pi^2_0 = \bigcup_n \Pi^1_0$
$Ind : \forall Y, y[A(0, Y, y) \wedge \forall x(A(x, Y, y) \to A(x+1, Y, y)) \to \forall x\, A(x, Y, y)]$.

Δ^1_n-CA を以下の公理図式とする:

$$\forall z(A(z) \leftrightarrow \neg B(z)) \to \exists X \forall z(X(z) \leftrightarrow A(z))\,(A, B \in \Pi^1_n)$$

2.2 Predicativity, [Feferman64, Schütte65]

$S = \{x \in X | P(x)\}$ の定義は, 条件 $P(x)$ の意味が, 当の集合 S の存在と無関係に確定しているときに predicative(可述的) という.

自然数の集合 S を Π^1_1-論理式 $\forall X \subset \mathbb{N}\, B(X, n)$ により定義する $S = \{n \in \mathbb{N} | \forall X \subset \mathbb{N}\, B(X, n)\}$ のは impredicative.

条件 $\forall X \subset \mathbb{N}\, B(X, n)$ の意味を確定させるに先立って集合 $S \subset \mathbb{N}$ が作られていないといけない.

「自然数から成る集合全体」が我々の構成とは独立に存在していると考えず, 集合は構成・定義していくものと考えるなら, 循環している.

どの範囲まで predicative というより安全な方法で数学が展開できるのか？ predicative/impredicative の画定が問題.

厳密に predicative であろうとすると, 直観主義論理の BHK 解釈「ならば」や「ある条件（含む $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$）をみたす最小の自然数」によって自然数を定義することも不可.

妥協して, 自然数 $0, 1, 2, \ldots$ というものは直観的に明らかであるから自然数全体 $\mathbb{N}$ というものは存在する, 従って自然数に関する quantifications $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ は意味を持つとしよう．この仮定に立った相対的な概念として以下では predicativity を考える.

predicative $\Leftrightarrow$ 意味が確定 $\Leftarrow$ absolute.
任意の $M, N \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ について $\langle \mathbb{N}; M \rangle \models A[n] \Leftrightarrow \langle \mathbb{N}; N \rangle \models A[n]$ となっている $A[n]$ について集合生成 $\{n \in \mathbb{N} | A[n]\}$ を認めれば, Δ^1_1-CA は問題ない. しかしこれだけでは predicative につくれる集合は尽きないだろう.

predicative に定義できる自然数の集合 (Russell の ramified type theory).

ω-model $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}; M \rangle$ $(M \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上で定義可能な $S \subset \mathbb{N}$, $S \in Df(\mathcal{M})$, は, ある 2 階の論理式 $A(x, X)$ と $X \in M$ について
$S = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{M} \models A[n, X]\}$.

自然数上の計算可能な整列順序 $<$ について, 自然数の集合族 R_α を再帰的に, $R_0 = \emptyset$, $R_{\alpha+1} = Df(\mathcal{R}_\alpha) = Df(\langle \mathbb{N}; R_\alpha \rangle)$, $R_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} R_\alpha$ (λ:limit).
例：R_1=算術的階層に属す集合の集合族.

$\{R_\alpha\}_\alpha$=（整列順序 $<$ による）ramified analytic hierarchy, は predicative?
「順序数」あるいは「整列順序」という概念は predicative かな？

定義の predicativity だけでなく, その定義が well-defined であることの「証明」の predicativity も問う.

順序数 α が predicative であるとは, α までの超限帰納法 $I(\alpha) :\Leftrightarrow \forall X[\forall x(\forall y < x\, X(y) \to X(x)) \to \forall x < \alpha\, X(x)]$ が predicative に証明されるとき.

$I(\alpha)$ の証明が predicative とは, $I(\alpha)$ が α-stage よりも前に predicative と認めた体系で証明されること.

PA の言語に各 β に対して R_β の要素を走る変数 X^β を加える.
2 階の quantifiers $\forall X^\beta, \exists X^\beta$.
SOA の言語での論理式 A について, A^β で A の中の変数 X を X^β で置き換えた論理式を表すとする.

$\overline{RA}$ の公理はこの言語での数学的帰納法と

$$\exists X^\alpha \forall z (X^\alpha(z) \leftrightarrow A^\beta(z))\,(\beta < \alpha)$$

論理式が RA_α の論理式であるのは, その中に現れる変数 X^β がみな $\beta \leq \alpha$.

$\overline{RA}$ の証明が RA_α の証明であるのは, その証明に現れる論理式がすべて RA_α の論理式であるとき.

predicative に証明できる論理式の集合 RA を, $RA_0 \subset RA$（PA は predicative）$\exists\beta < \alpha(RA_\beta \vdash I^1(\alpha)) \Rightarrow RA_\alpha \subset RA$ (α までの超限帰納法が α より小さい β について RA_β で証明されたなら, RA_α で証明されたものは predicative に証明されたとみなす).

(binary) Veblen function $\varphi : \varphi_\alpha(\beta) = \varphi\alpha\beta$. $\Omega = \omega_1$ 上の写像として φ_α は狭義単調増加かつ連続 (normal function) であり, その値域 $rg(\varphi_\alpha)$ は Ω で club(closed and unbounded) となる.

$\varphi_0(\beta) = \omega^\beta$, $rg(\varphi_\alpha) = \bigcap_{\gamma<\alpha} Fx(\varphi_\gamma)\,(\alpha > 0)$, $\beta \in Fx(\varphi_\gamma) \Leftrightarrow \varphi_\gamma(\beta) = \beta$.
$|RA| = \Gamma_0 := \min\{\alpha > 0 : \forall\beta, \gamma < \alpha(\varphi_\beta(\gamma) < \alpha)\}$,

$RA = RA_{<\Gamma_0} = \bigcup_{\alpha<\Gamma_0} RA_\alpha$ が, $\mathbb{N}$:given のもとでの predicativity の限界.

$|RA| \leq \Gamma_0$ はつぎの Lemma 2.1 による. subsection 1.2 の Lemma 1.2 は Lemma 2.1 での $\alpha = 0$ の場合である. (cut) formula の複雑さはその論理式に現れる変数 X^β の superscripts β たちから決める.

Lemma 2.1 $\vdash^\beta_{d+\omega^\alpha} \Gamma$ ならば $\vdash^{\varphi_\alpha(\beta)}_d \Gamma$.

2.3 Inductive definitions

G. Kreisel は [Stanford Report63] において自然数上の正作用素による帰納的定義の公理系 ID (theories of positive inductive definitions over $\mathbb{N}$) を摘出し, impredicative theories の証明論的分析への第一歩を与えた.

1 変数関係記号 X が正にしか現れない (occurs only positively) 1 階の論理式 $\mathcal{A}(X, y)$ を positive operator form と呼ぶ. これは $\mathbb{N}$ 上で単調な (monotonic) 作用素 $\Gamma : \mathcal{X} \mapsto \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \mathcal{A}[\mathcal{X}, n]\}$ ($\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$) を引き起こす. これにより順序数 α で添数付けられた $\mathbb{N}$ の部分集合族 $\{I_\alpha\}_\alpha$ が $I_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]\}$ で定義され $\beta < \alpha \Rightarrow I_\beta \subset I_\alpha$ となる. そこで $I^{\mathcal{A}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ とおけば, これが作用素 Γ の最小不動点となる $I^{\mathcal{A}} = \bigcap\{\mathcal{X} \subset \mathbb{N} : \Gamma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}\} = \bigcap\{\mathcal{X} \subset \mathbb{N} : \Gamma(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}\}$.

公理系 ID は, positive operator form $\mathcal{A}$ の最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ を表す関係記号 $P^{\mathcal{A}}$ と, それに関する公理を PA に付け加えて得られる.

- 数学的帰納法は $P^{\mathcal{A}}$ を含む論理式に拡張.
- $\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}} :\Leftrightarrow \forall y[\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, y) \rightarrow P^{\mathcal{A}}(y)]$.
- 超限帰納法の公理：$\mathcal{A}(F) \subset F \rightarrow P^{\mathcal{A}} \subset F$ を任意の論理式 F に.

例えば計算可能関係 $\prec$ によって $\mathcal{A}(X, z) \Leftrightarrow (\forall y \prec z\, X(y))$ と定義されているときには, その最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ は関係 $\prec$ の wellfounded part を表す.

- ID と SOA $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ 互いに解釈可能.

$(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ では Π^1_1-CA を 2 階の自由変数を含まない Π^{1-}_1-論理式に制限. 但し ACA $= \Pi^1_0$-CA は含めない.

[Feferman70] は, inductive definitions を α-回繰り返すことができる公理系 ID_α を導入して, Π^1_1-CA の繰り返しが証明論的にこれらに帰着できることを示した. $\mathsf{ID}_{<\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathsf{ID}_\beta$. ID を ID_1 とも書く.

$(\Pi^1_1\text{-CA})_0$, $(\Delta^1_2\text{-CA})_0$ は $\mathsf{ID}_{<\omega}$ と, $(\Sigma^1_2\text{-DC})_0$ は $\mathsf{ID}_{<\omega^\omega}$ と, $(\Sigma^1_2\text{-DC})$ は $\mathsf{ID}_{<\varepsilon_0}$ とそれぞれ証明論的に同等.

SOA を inductive definitions の繰り返しに証明論的に帰着したことの reductive proof theory（還元論的証明論）での意義.

最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ が stages I_α に分解できて $I^{\mathcal{A}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$, 各 stage は それ以前の stages から arithmetically definable, つまり Π^1_0-CA を適用して定義される, $I_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]\}$.

positive operator form $\mathcal{A}(X,z)$ によって計算可能関係 $\prec$ の wellfounded part を帰納的に定義することは直観的に理解しやすい.

そのような inductive definitions を用いれば, 明らかに impredicative であるいくつかの SOA が証明論的に帰着できるのだから, I_α での添字の順序数 α さえ不問に付せば, SOA よりもかなり安全そうなところへ落とせているとみなせる.

但し, 問題は ID_α が古典論理に基づいた公理系であることで, この時点では未だ当該の SOA が構成的な原理に落とせたとは言えない状況だった.

3 Takeuti

2 階の論理計算 $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ を one-sided sequent calculus で与える. abstract $V \equiv \{x\}A(x)$（一般には多変数）と 2 階の変数 X および論理式 $F(X)$ について, $F(V)$ は F の中の $X(t)$ を $A(t)$ で置き換える.

$$\frac{\Gamma, F(Y)}{\Gamma, \forall X\, F(X)}\,(\forall^2) \quad \frac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\,(\exists^2)$$

$(\forall^2)$ における変数 Y は eigenvariable. $(\exists^2)$ における abstract V は任意.

$(\exists^2)$ から CA $\exists X \forall x\,(X(x) \leftrightarrow V(x))$ が出てきて, 逆に CA と V が変数の場合の $(\exists^2)$ で $(\exists^2)$ を代用できる.

同様にしてつくられる高階 (finite-order) の論理計算 sequent calculus を GLC で表す.

基本予想 (Fundamental Conjecture, FC)[Takeuti53]

$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$, GLC における証明図に対する具体的な操作を何回かすることによって, 証明図から (cut) が取り除かれる. その操作の回数の有限性は, 有限的数学の延長上にある方法で示される.

$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ での cut-elimination theorem「$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ で証明できる sequent は (cut) 無しでも証明できる」から 2 階自然数論 $\mathbb{Z}_2 = (\Pi^2_0\text{-CA})_0$ の (1-)consistency が有限的に従う（実は同等）. GLC と高階自然数論 $\mathbb{Z}_\omega$ も同様.

CE の仮定のもとで $\mathbb{Z}_2 \vdash \bot \Longrightarrow \mathrm{PA}^- \vdash \bot$.

$$N(a) :\equiv (\forall X(X(0) \wedge \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to X(a)) \tag{1}$$

$IND :\equiv (\forall X(X(0) \wedge \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to \forall a\, X(a)))$
$\mathsf{G}^1\mathsf{LC} \vdash \forall X\, [X(0) \wedge \forall y(N(y) \to X(y) \to X(y+1)) \to \forall a(N(a) \to X(a))]$.
$\mathbb{Z}_2$ の証明図全体を N に制限して $\mathbb{Z}_2$ が矛盾すれば
$\mathsf{G}^1\mathsf{LC} \vdash \neg \mathrm{PA}^-, \neg \forall X \forall x, y(x = y \to X(x) \to X(y))$.

$\mathcal{E}(X) :\equiv (\forall x, y(x = y \to X(x) \to X(y)))$
$\mathsf{G}^1\mathsf{LC} \vdash \forall X \forall x, y(\mathcal{E}(X) \to x = y \to X(x) \to X(y))$.
再び証明図を $\mathcal{E}$ に制限して $\mathsf{G}^1\mathsf{LC} \vdash \neg \mathrm{PA}^-$.
CE して $\mathsf{LK} \vdash \neg \mathrm{PA}^-$.

基本予想 FC は2階あるいは高階自然数論 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_\omega$ の無矛盾性を示すという, 問題自体には解法の道筋が何も示されていない問題に, 数学的方向を与えたと言える. つまり $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}, \mathsf{GLC}$ の CE を Gentzen の方法の延長において示すという数学的問題を定式化した. 但し, FC 自体には証明図への操作は具体的に与えられている訳ではなく, また「有限的数学の延長上にある方法」がいかなるものかも述べられていない. むしろそれらを同時に発見して解いていこうということであろう.

$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}, \mathsf{GLC}$ の CE 自体が成り立つことは [Schütte60b, Tait66, Takahashi67, Prawitz68] で確かめられたが, これらの証明は FC には寄与しない.

以下, FC の部分解.

3.1 [Takeuti55]

$$\frac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

abstract V が変数のときか, または $\exists X\, F(X)$ が Σ^1_1-論理式のとき (2) に $(\exists)^2$ を制限した体系を LBI. F は 1 階の論理式.

LBI での CE から PA の無矛盾性が有限的に従う.

$$\mathsf{PA} \vdash \bot \Rightarrow \mathsf{LBI} \vdash \neg\mathrm{PA}^- \Rightarrow^{CE} \mathrm{PA}^- \vdash \bot.$$

PA の証明図を (1) での自然数を定義する $N(a)$ に制限する. $N(x)$ が Π^1_1-論理式なので $V(x) \equiv (N(x) \wedge A^N(x))$ によって
LBI $\vdash \forall x(N(x) \to A^N(0) \to \forall y(N(y) \to A^N(y) \to A^N(y+1)) \to A^N(x))$.

- CE procedure for LBI.

問題なのは 2 階の quantifier が絡む (cut) である：

$$P = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} \dfrac{F(V), \Delta}{\exists X\, F(X), \Delta} (\exists^2) \\ \vdots \\ \exists X\, F(X), \Gamma \end{array}}{\Gamma} \\ \vdots \\ \Phi \end{array}$$

無矛盾性のためなら PA^- がそうだから, Φ は 1 階の sequent としてよい.

$$
P = \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \dfrac{F(V), \Delta}{\exists X\, F(X), \Delta}\ (\exists^2) \\
\vdots & \vdots \\
\Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma
\end{array} \\
\hline
\Gamma \\
\vdots \\
\Phi
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
P_0(X) =
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)} \\
\vdots \\
\Phi, \neg F(X)
\end{array}
$$

$$
\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow IH
$$

$$
P' = \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ P_0^{cf}(V) \\ \Phi, \neg F(V)\end{array} \qquad F(V), \Delta}{\exists X\, F(X), \Delta, \Phi}\ (cut) \\
\vdots & \vdots \\
\Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma, \Phi
\end{array} \\
\hline
\Gamma, \Phi \\
\vdots \\
\Phi, \Phi
\end{array}
\quad \xleftarrow[X:=V]{} \quad
P_0^{cf}(X) =
\begin{array}{c}
\vdots \\
\Phi, \neg F(X)
\end{array}
$$

$P_0^{cf}(V)$ は 1 階の証明図だから'簡単'である．よって得られた (cut) つきの証明図 P' は元の P よりも全体として'簡単'である．

証明図に現れる sequnt に [Gentzen38] と同様にして ordinal term$< \varepsilon_0$ を貼付ける．ここで 1 階の証明図が受け取る順序数は有限である．だから予め $(\exists^2)$ のところでは ω を足しておけばよい．

こうして LBI の 1 階の sequent Φ に至る証明図 P に, 同じく Φ の cut-free な証明図を対応させる $P \mapsto CE(P)$ が ε_0-recursion で作れることが分かる．

3.2 [Takeuti57, Takeuti58, Takeuti61]

$(\Pi^1_1\text{-CA})_0$ に相当する $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ の部分体系の CE.

[Takeuti58]：

$$\frac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

$$\text{abstract } V \text{ が変数のときか, または } \exists X\, F(X) \text{ が isolated であるとき} \tag{3}$$

に制限. isolated な論理式ではその中に現れている 2 階の quantifiers が nest せず, Σ^1_1-論理式を含み, 代入によって閉じている.

[Takeuti61]：$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$

$$\exists X\, F(X) \text{ が 2 階の自由変数を含まないとき} \tag{4}$$

- $\mathrm{ID}_{<\omega} \vdash \perp \;\Rightarrow\; \mathsf{G}^1\mathsf{LC}^- \vdash \neg\mathrm{PA}^- \;\Rightarrow^{CE} \mathrm{PA}^- \vdash \perp$.

なぜならば X-positive operator form $\mathcal{A}(X, z, Y)$ についてその最小不動点 $P_n^{\mathcal{A}}\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が 2 階の論理式で再帰的に 2 階の自由変数を含まないように

$$I_n^{\mathcal{A}}(z) :\Leftrightarrow \bigl(\forall X(\mathcal{A}(X, I_{<n}^{\mathcal{A}}) \subset X \to X(z))\bigr)$$

と書けてしまい, さらに (1) での自然数を表す論理式 N にも 2 階の自由変数が含まれていないから.

[Takeuti58, Takeuti61] での CE procedure において, 推論規則 $(\exists^2)$ への制限 (3), (4) は, 証明に現れる論理式（の occurrences）を適切に ω-順序に並べるために要請されたもの.

- SOA BI での CE procedure

数学的帰納法は任意の 2 階の論理式に適用可とし, 論理計算は subsection 3.1 での LBI とする．特に推論規則 $(\exists)^2$ は制限 (2) のもとにのみ使える．明らかに $\mathrm{ID}_1 \hookrightarrow$ BI.

BI で証明できる 1 階の論理式 A が $\mathbb{N}$ で正しいことを示すために, A の cut-free ω-derivation の存在を LBI のときと同様に示そうとしてみる．

$$
P = \begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \forall X \neg F(X)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{F(V), \Delta}{\exists X\, F(X), \Delta}\,(\exists^2)\\ \vdots\\ \exists X\, F(X), \Gamma\end{array}}{\Gamma}\\
\vdots\\
\Phi
\end{array}
\rightsquigarrow P_0(X) = \begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)}\\
\vdots\\
\Phi, \neg F(X)
\end{array}
\rightsquigarrow^{IH?} P_0^{cf}(X) = \begin{array}{c}\vdots\\ \Phi, \neg F(X)\end{array}
$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \dfrac{F(V),\Delta}{\exists X\, F(X),\Delta}\,(\exists^2) \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma \end{array} \\ \hline \Gamma \\ \vdots \\ \Phi \end{array} \leadsto P_0(X) = \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)} \\ \vdots \\ \Phi, \neg F(X) \end{array} \leadsto^{IH?} P_0^{cf}(X) = \begin{array}{c} \vdots \\ \Phi, \neg F(X) \end{array}$$

一般には cut-free ω-derivations たちの depth は $\Omega = \omega_1$ でしか抑えることができないので, $P_0^{cf}(X)$ の depth の上界は Ω であるから, とりあえず $(\exists^2)$ のところで順序数 Ω を足しておくことにしても, $P_0^{cf}(X)$ の depth の上界を Ω より小さいところで '計算' しないといけない.

BI で証明できる 1 階の sequent は cut-free ω-derivation を持つ

は, 超限帰納法で示すには弱過ぎる. より強く

BI での 1 階の sequent Φ の証明 P に対して, Φ の cut-free ω-derivation P^{cf} でその depth が高々 $o(P^{cf}) < \Omega = \omega_1$ となるものが存在する

を示す必要がある.

$$\begin{array}{r} \vdots \\ \dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)} \\ \vdots \\ P_0(X) = \Phi, \neg F(X) \end{array}$$

自体が推論規則 $(\exists^2)$ を含み得るのでその順序数 $\alpha = o(P_0(X))$ は, $\varepsilon_{\Omega+1}$ よりは小さいが Ω よりは大きくならざるを得ない. そこで $\alpha > \Omega$ に対して順序数 $\vartheta(\alpha) < \Omega$ を与えるなんらかの collapsing function ϑ が必要になる.

[Rathjen-Weiermann93, Takeuti57] での collapsing function $\vartheta(\alpha) < \Omega$.

$\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ について順序数の有限集合 $E(\alpha)$ を, α を ω を底とする Cantor nf で α を書いたときに現れる ε-number$< \Omega$ 全体で定義する.

$C(\alpha, \beta) \subset \varepsilon_{\Omega+1}$ $(\alpha, \beta < \varepsilon_{\Omega+1})$ と $\vartheta(\alpha) \leq \Omega$ を α に関する帰納法で同時に.

1. $\{0, \Omega\} \cup \beta \subset C(\alpha, \beta)$.
2. $\gamma, \delta \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma + \delta, \omega^\gamma \in C(\alpha, \beta)$.
3. $\gamma \in C(\alpha, \beta) \cap \alpha \Rightarrow \vartheta(\gamma) \in C(\alpha, \beta)$.
4. $\vartheta(\alpha) = \min\{\beta \leq \Omega : C(\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \beta, E(\alpha) \subset C(\alpha, \beta)\}$.

1. $\{0, \Omega\} \cup \beta \subset C(\alpha, \beta)$. $\gamma, \delta \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma + \delta, \omega^\gamma \in C(\alpha, \beta)$.
   $\gamma \in C(\alpha, \beta) \cap \alpha \Rightarrow \vartheta(\gamma) \in C(\alpha, \beta)$.

2. $\vartheta(\alpha) = \min\{\beta \leq \Omega : C(\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \beta, E(\alpha) \subset C(\alpha, \beta)\}$.

可算順序数 β について集合 $C(\alpha, \beta)$ も可算であり, Ω は regular だから任意の $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ について $\vartheta(\alpha) < \Omega$ となることが分かる.

$\vartheta(\alpha)$ は ε-数で, $E(\alpha) \subset C(\alpha, \vartheta(\alpha)) \cap \Omega$ より $E(\alpha) < \vartheta(\alpha)$.

$\vartheta(\alpha) < \vartheta(\beta) \Leftrightarrow (\alpha < \beta \wedge E(\alpha) < \vartheta(\beta)) \vee \vartheta(\alpha) \leq E(\beta)$.

$C(\varepsilon_{\Omega+1}, 0)$ は, 記号 $0, \Omega, \omega, +, \vartheta$ 上の terms の集合とみなせ, そこでの大小関係 $\alpha < \beta$ は計算可能.

NB. Collapsing function は $\Omega < \alpha \mapsto \vartheta(\alpha) < \Omega$ なるものであるから, 順序は保存しない. 例えば $\Omega > \vartheta(\Omega)$ だが $\vartheta(\Omega) < \vartheta(\vartheta(\Omega))$.

- $o(P_0^{cf}(X))$ の上界は $\alpha = o(P_0(X))$ について $\vartheta(\alpha)$ で与えられる.

一連の操作

$$P_0(X) = \Phi, \overset{\vdots}{\neg F}(X) \rightsquigarrow P_0^{cf}(X) = \Phi, \overset{\vdots}{\neg F}(X) \rightsquigarrow^{X:=V} P_0^{cf}(V) = \Phi, \overset{\vdots}{\neg F}(V)$$

全体をひとつの推論規則 substitution (sub) のかたちで書いて,

$$\frac{\Phi, \neg F(X) : \alpha}{\Phi, \neg F(V) : \vartheta(\alpha)}\ (sub)$$

と表す.

$$
\dfrac{F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta : \delta + \Omega}\ (\exists^2)
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \forall X \neg F(X)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \exists X\, F(X), \Gamma\end{array}}{\Gamma : \gamma}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\Phi : \alpha
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\Phi, \neg F(X) : \alpha_1}{\Phi, \neg F(V) : \vartheta(\alpha_1)}\ (sub) \qquad F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta, \Phi : \delta + \vartheta(\alpha_1)}\ (cut)
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \forall X \neg F(X)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \exists X\, F(X), \Gamma, \Phi\end{array}}{\Gamma, \Phi : \gamma_2}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\Phi, \Phi : \alpha_2
$$

$(\exists^2)$ の主論理式 $\exists X\, F(X)$ が下の (cut) までの間で (sub) で変化することはない．なぜなら (sub) の上にある論理式 $\Phi, \neg F(X)$ は1階だから．従ってそこでは collapsing function ϑ が作用していないので, 関係 $\vartheta(\alpha_1) < \Omega$ が遺伝して $\gamma_2 < \gamma$ を得る．

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \forall X \neg F(X)\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta : \delta + \Omega}\,(\exists^2)\\ \vdots\\ \exists X\, F(X), \Gamma\end{array}}{}}{\Gamma : \gamma}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \forall X \neg F(X)\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Phi, \neg F(X) : \alpha_1\end{array}}{\Phi, \neg F(V) : \vartheta(\alpha_1)}\,(sub) \quad F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta, \Phi : \delta + \vartheta(\alpha_1)}\,(cut)\\ \vdots\\ \exists X\, F(X), \Gamma, \Phi\end{array}}{\Gamma, \Phi : \gamma_2}
$$

Γ から Φ の間に (sub) がないとして, $\alpha_2 < \alpha$ かつ $\vartheta(\alpha_2) < \vartheta(\alpha)$.
なぜなら $E(\alpha_2) \subset E(\alpha) \cup \{\vartheta(\alpha_1)\}$ であり, $E(\alpha) < \vartheta(\alpha)$.
また $\vartheta(\alpha_1) < \vartheta(\alpha)$. 後者は $\alpha_1 < \alpha$ かつ $E(\alpha_1) \subset E(\alpha) < \vartheta(\alpha)$.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \begin{array}{c} \dfrac{F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta : \delta + \Omega}\,(\exists^2) \\ \vdots \end{array} \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma \end{array}}{\Gamma : \gamma} \\ \vdots \\ \Phi : \alpha
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\Phi, \neg F(X) : \alpha_1}{\Phi, \neg F(V) : \vartheta(\alpha_1)}\,(sub) \qquad F(V), \Delta : \delta}{\exists X\, F(X), \Delta, \Phi : \delta + \vartheta(\alpha_1)}\,(cut) \\ \vdots \end{array} \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma, \Phi \end{array}}{\Gamma, \Phi : \gamma_2} \\ \vdots \\ \Phi : \alpha_2
\end{array}
$$

こうして「BI で証明できる 1 階の sequent は, その depth が $\vartheta(\varepsilon_{\Omega+1})$ より小さい cut-free ω-derivation を持つ」が示される.

[Takeuti58, Takeuti61] では有限の階層に分けられた論理式を扱うために, 順序数 $\alpha > \Omega_n = \omega_n$ を $\alpha' < \Omega_n$ につぶす collapsing functions が必要になる. さらに [Takeuti67] ではこの階層が ω まで延ばされて, 2 階の自然数論 Π^1_1-CA+BI あるいは証明論的には同等な ID_ω の無矛盾性証明が [Gentzen38] の延長線上で与えられている. そこで使われたのが [Takeuti57] を無限にまで延ばした [Takeuti60] であった.

4 Buchholz-Pohlers-Jäger

[IPT70] の後に残された証明論の大きな課題 (S. Feferman)

> ID_α を直観主義論理に基づく $\mathsf{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ に証明論的に帰着させ, ID_α の証明論的順序数を意味が分かる notation systems で表すこと

前者は, より意味がはっきりした Kleene $\mathcal{O}$ の inductive definitions に限り, しかも直観主義上でのみそれを議論することで, 添字の順序数 α がよく分る順序（例えば ε_0）である限り, $\mathsf{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ は構成的とみなせる. また後者の課題は, [Takeuti57, Takeuti60] での ordinal diagrams はいわば図形そのものなので, ordinal diagram を生成する演算の意味が集合論的に分らない.

[Takeuti67] の手法により, [Pohlers77, Pohlers78, Buchholz-Pohlers78] でこの課題は一応の解決をみたが満足がいく解決ではなかった.

[BFPS81] で導入された方法をふたつ略述しよう.

4.1 $\Omega_{\mu+1}$-rule [Buchholz77]

これによって Π^1_1-CA あるいはそれと同等な ID の証明論的分析が infinitary derivations を通じて得られる．ここでは最も簡単な $\mathsf{ID} = \mathsf{ID}_1$ とそのための規則 Ω-rule について考える．先ず数学的帰納法の公理は ω-rule によって「証明」してしまう．つぎに subsection 2.3 での公理 $\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}}$ を推論規則で表して

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, n)}{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)}$$

ここまでの規則による体系を ID^{∞}_0 と書く．ID^{∞}_0 では negative な $\neg P^{\mathcal{A}}(n)$ を導入する規則が無いことに注意．よってそれは本質的には initial sequent において $\Gamma, \neg P^{\mathcal{A}}(n), P^{\mathcal{A}}(n)$ としてのみ現れる．

- 超限帰納法の公理 $\mathcal{A}(F) \subset F \to P^{\mathcal{A}}(n) \to F(n)$ を「証明」する.

$P^{\mathcal{A}}(n)$ が negative に現れている論理式 $P^{\mathcal{A}}(n) \to F(n)$ を「証明」する規則を導入するため, その意味を [Gentzen34/35] もしくは BHK-解釈により

$P^{\mathcal{A}}(n)$ の「証明」から $F(n)$ の「証明」を得る操作

ここで「$P^{\mathcal{A}}(n)$ の証明」と言っているものを,「$P^{\mathcal{A}}(n)$ の ID_0^∞ での cut-free derivation d」と理解する. そのとき操作 π はこのような derivations d を $F(n)$ の「証明」$\pi(d)$ に変換する.

そこで derivations d に $P^{\mathcal{A}}$ が positive にしか現れていない論理式から成る sequent Δ_d が付け加わった場合も許すことにしてそのような derivations 全体を $\mathcal{D}_n$ で表す.

$d \in \mathcal{D}_n$ は, d が ID_0^∞ でのなんらかの positive sequent $\Delta_d, P^{\mathcal{A}}(n)$ の cut-free derivation であることを示す. さらに「$F(n)$ の証明」をより一般に「sequent Γ の証明」にしておき, 変換する操作の内実を問わないことにして $\mathcal{D}_n$-branching な rule を得る：

$$\frac{\cdots \quad \begin{array}{c} \vdots \, \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots \, (d \in \mathcal{D}_n)}{\neg P^{\mathcal{A}}(n), \Gamma}$$

ここで Γ は任意の sequent で, rule の上は positive sequent $\Delta_d, P^{\mathcal{A}}(n)$ の derivation $d \in \mathcal{D}_n$ ごとに Δ_d, Γ の derivation $\pi(d)$ が並んでいる.

cut elimination を考えるとき, この rule の直下での cut

$$
\dfrac{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \qquad \dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c} \vdots\, \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_n)}{\neg P^{\mathcal{A}}(n), \Gamma}}{\Gamma}
$$

を rule に組み込んでおいたほうがよいので, こうしてつぎの Ω-rule に至る：

$$
\dfrac{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \vdots\, \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_n)}{\Gamma}\ (\Omega)
$$

Ω-rule の入った infinitary derivations の体系を ID_1^∞ と書く. ID_1^∞ の derivations による $\vdash_c^\alpha \Gamma$ を得る. 但し Ω-rule では次のように定める.

ordinal term α の中の Ω の occurrence ひとつに着目して $\alpha = \alpha[\Omega]$. 但しこの Ω の occurrence は collapsing function ϑ の scope 内にはないとする. $z \leq \Omega$ について $\alpha[z]$ でその Ω の occurrence を z で置き換える.

$$\frac{\vdash_c^{\alpha[0]} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \quad \cdots \quad \dfrac{\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)}{\vdash_c^{\alpha[z]} \Delta, \Gamma} \quad \cdots \ (z < \Omega, \Delta \subset Pos)}{\vdash_c^{\alpha[\Omega]} \Gamma}$$

- $\vdash_0^{\Omega+\omega} \Gamma = \{\neg\mathcal{A}(F) \subset F, \neg P^{\mathcal{A}}(n), F(n)\}$.

論理式 F の複雑さ $k < \omega$ について $\alpha[\Omega] = 2k + 2\Omega$. 先ず $\vdash_0^0 \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$.
$z < \Omega$ について $\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$ を示す cut-free derivation d において結論の中の $P^{\mathcal{A}}(n)$ に繋がる論理式 $P^{\mathcal{A}}$ をすべて F で置き換えて $\vdash_0^{\alpha[z]} \Delta, \Gamma$ を得る. こうして Ω-rule により $\vdash_0^{\alpha} \Gamma$.

$\vdash^z_0 \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$ を示す cut-free derivation d において結論の中の $P^{\mathcal{A}}(n)$ に繋がる論理式 $P^{\mathcal{A}}$ をすべて F で置き換える：

$$\frac{\vdash^z_0 \Pi, P^{\mathcal{A}}(m), \mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, m)}{\vdash^{z+1}_0 \Pi, P^{\mathcal{A}}(m)} \leadsto \dfrac{\dfrac{\vdash^{2k+2z}_0 \Pi', \Gamma, F(m), \mathcal{A}(F, m) \quad \vdash^{2k}_0 \neg F(m), F(m)}{\vdash^{2k+2z+1}_0 \Pi', \Gamma, F(m), \mathcal{A}(F, m) \land \neg F(m)}}{\vdash^{2k+2(z+1)}_0 \Pi', \Gamma, F(m)}$$

$\Gamma = \{\neg \mathcal{A}(F) \subset F, \neg P^{\mathcal{A}}(n), F(n)\}$.

$\mathsf{ID}_1 \vdash P^{\mathcal{A}}(n)$ であるなら, ある $c < \omega$ について ID^{∞}_1 において $\vdash^{\Omega+\omega^2}_c P^{\mathcal{A}}(n)$. これより $\alpha = 2_c(\Omega + \omega^2)$ について $\vdash^\alpha_0 P^{\mathcal{A}}(n)$. ここから $|n|_{\mathcal{A}} = \min\{\beta | n \in I_{\beta+1}\}$ を抑えるためには $\alpha > \Omega$ を $< \Omega$ に collapse できればよい.

Lemma 4.1 (Collapsing Lemma)
positive な Γ について $\vdash_0^{\alpha} \Gamma$ であるとする．このとき $\vdash_0^{\vartheta(\alpha)} \Gamma$.

Proof. α に関する超限帰納法による. $\vdash_0^{\alpha} \Gamma$ が Ω-rule の結論である場合には, $\vdash_0^{\alpha[0]} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$ より $\vdash_0^{\vartheta(\alpha[0])} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$. positive な $\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$ と $z = \vartheta(\alpha[0])$ について Ω-rule の仮定より $\vdash_0^{\alpha[z]} \Gamma$. よって $\vdash_0^{\vartheta(\alpha[z])} \Gamma$. ここで $z < \Omega$ と $\alpha[\Omega]$ での Ω の occurrence に関する仮定より $\alpha[z] < \alpha[\Omega]$. さらに $E(\alpha[z]) \subset E(\alpha[\Omega]) \cup \{z\} < \vartheta(\alpha[\Omega])$. よって $\vartheta(\alpha[z]) = \vartheta(\alpha[\vartheta(\alpha[0])]) < \vartheta(\alpha[\Omega])$. $\Box$

そこで $\alpha = 2_c(\Omega + \omega^2)$ について $\vdash_0^{\alpha} P^{\mathcal{A}}(n)$ であったから, Lemma 4.1 より $\vdash_0^{\vartheta(\alpha)} P^{\mathcal{A}}(n)$. これより $|n|_{\mathcal{A}} \leq \vartheta(\alpha) < \vartheta(\varepsilon_{\Omega+1})$.
Ω-rule による証明と [Takeuti57] との類似は明らかだろう, cf. [Buchholz01].

4.2 Local predicativity [Pohlers81, BFPS81]

positive operator form $\mathcal{A}$ の最小不動点 $I^{\mathcal{A}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ の各 stage $I_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]\}$ はそれまでの $\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ から Π^1_0-CA によりつくられている. 従ってこの hierarchy $\{I_\alpha\}_\alpha$ は local には predicative であると考えられるし, それに関わる CE は subsection 2.2 での RA_α と同様.

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]}{\Gamma, I_\alpha(n)} \quad \frac{\Gamma, \neg\mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]}{\Gamma, \neg I_\alpha(n)}$$

このように Π^1_1-CA によってつくられた集合 $I^{\mathcal{A}}$ を stages にスライスすることは極めて自然でありながら, [Pohlers81, BFPS81] 以前にはあまり見られなかったアプローチである. これによって subsection 4.3 で触れる集合論や, より強い公理系の証明論的分析も可能となった.

- ID の infinitary derivations へ埋め込み

$\mathcal{A}(F) \subset F \to I^{\mathcal{A}} \subset F$ は, 仮定 $\mathcal{A}(F) \subset F$ のもとで α に関する超限帰納法により $I^{\mathcal{A}}(n) :\equiv (\exists\alpha\, I_\alpha(n)) \subset F$.

公理 $\mathcal{A}(I^{\mathcal{A}}) \subset I^{\mathcal{A}}, \forall x\, (\mathcal{A}(\{y|\exists\alpha\, I_\alpha(y)\}, x) \to \exists\alpha\, I_\alpha(x))$. は推論規則

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A}(\{y|\exists\alpha\, I_\alpha(y)\}, n)}{\Gamma, \exists\alpha\, I_\alpha(n)}\ (Cl)$$

ここでの順序数 $\alpha, \beta, \ldots$ はsubsection 3.2 でのnotation system $C(\varepsilon_{\Omega+1}, 0)\cap \Omega$ に属する ordinal terms を走る.

$\exists\alpha\, I_\alpha(n)$ を Σ_1-論理式と呼ぶ. ID $\vdash \Gamma$ ならば, ある $k < \omega$ について $\vdash^{\Omega\cdot k}_{2+k} \Gamma$ となる. これより $\alpha = \omega_k(\Omega \cdot k) < \varepsilon_{\Omega+1}$ について $\vdash^{\alpha}_{2} \Gamma$ を得る. 添字の 2 は, Σ_1-cut formula が残っていることを表す.

- $\Gamma \subset \Sigma_1$, $\alpha < \Omega$ について $\vdash^{\alpha}_{1} \Gamma \Rightarrow \Gamma^{(\alpha)} := \{B^{(\alpha)} | B \in \Gamma\}$.

ここで $(\exists \xi\, I_\xi(n))^{(\alpha)} :\equiv (\exists \xi < \alpha\, I_\xi(n))$. これより $\vdash^{\alpha}_{1} \exists \xi\, I_\xi(n) \Rightarrow |n|_{\mathcal{A}} < \alpha$.

$$\frac{\vdash^{\alpha_0}_{k} \Gamma, I_\eta(n)}{\vdash^{\alpha}_{k} \Gamma, \exists \xi\, I_\xi(n)}$$

で $\alpha_0 < \alpha$ であるのみならず $\eta < \alpha$ となっていないといけない.
$\vdash^{\alpha}_{k} \Gamma$ という関係が subsection 2.2 での predicative な RA_α に対する単純なものではなく, 一定の条件がついたものに変える必要がある.

Lemma 4.2 $\Gamma \subset \Sigma_1$.

1. (Boundeness) $\alpha < \Omega$ について $\vdash^{\alpha}_{1} \Gamma \Rightarrow \Gamma^{(\alpha)}$.

2. (Collapsing) $\vdash^{\alpha}_{2} \Gamma$ から適当な $\alpha' < \Omega$ が見出せて $\vdash^{\alpha'}_{1} \Gamma$.

- $\vdash_2^\alpha \Gamma$ から適当な $\alpha' < \Omega$ が見出せて $\vdash_1^{\alpha'} \Gamma$.

「適当な α'」のひとつの解は $\alpha' = \vartheta(\alpha)$ である． 一般に $\alpha < \beta$ からは $\vartheta(\alpha) < \vartheta(\beta)$ は言えないので, 示すべき事実が遺伝していかない. そこで単なる大小関係よりも強い関係 (collapsibly less than relation) を導入する.

$$\alpha \ll \beta :\Leftrightarrow \alpha < \beta \,\&\, E(\alpha) < \vartheta(\beta).$$

すると $\alpha \ll \beta \Rightarrow \vartheta(\alpha) < \vartheta(\beta)$ であるから, $\vdash_k^\alpha \Gamma$ の定義において, 仮定の α_0 と結論の α とが $\alpha_0 \ll \alpha$ となっていればよさそうであるが

$$\frac{\vdash_k^{\alpha(\eta)} \Gamma, B(\eta)\ (\eta < \Omega)}{\vdash_k^{\alpha} \Gamma, \forall\xi\, B(\xi)}\ (\forall) \quad \frac{\vdash_k^{\alpha_0} \Gamma, I_\eta(n)}{\vdash_k^{\alpha} \Gamma, \exists\xi\, I_\xi(n)}\ (\exists)$$

- $(\forall)$ で $\forall\eta < \Omega(\alpha(\eta) \ll \alpha)$ は無理. $\forall\eta < \Omega(\vartheta(\alpha(\eta)) < \vartheta(\alpha))$ で $\eta = \vartheta(\alpha)$. $\alpha(\eta) < \alpha$ かつ $\alpha(\eta) \ll \alpha + \eta$.
- $(\exists)$ では $\alpha_0 \ll \alpha$ のみならず $\eta \ll \alpha$. $\alpha < \Omega \Rightarrow \alpha < \vartheta(\alpha)$ より, これで Boundedness 4.2.1 $\vdash_1^{\alpha} \Gamma \Rightarrow \Gamma^{(\alpha)}\ (\alpha < \Omega)$ は満たされる.

- $\vdash_2^{\alpha} \Gamma \Rightarrow \vdash_1^{\vartheta(\alpha)} \Gamma \, (\Gamma \subset \Sigma_1)$.

$$\dfrac{\vdash_2^{\beta} \Gamma, \forall \xi \, \neg I_{\xi}(n) \qquad \dfrac{\vdash_2^{\delta} \mathcal{A}(\{y | \exists \zeta \, I_{\zeta}(y)\}, n), \Gamma}{\vdash_2^{\delta+1} \exists \xi \, I_{\xi}(n), \Gamma}\,(Cl)}{\vdash_2^{\alpha} \Gamma}$$

ここで $\beta + \delta \ll \alpha$. $\delta \geq \Omega$ として

$$\delta_0 = \vartheta(\delta) \text{ について } I_{\delta_0}(n), \Gamma^{(\delta_0)}$$

$\vdash_1^{\vartheta(\delta)} \mathcal{A}(\{y | \exists \zeta \, I_{\zeta}(y)\}, n), \Gamma$ と Boundedness より $\mathcal{A}(\{y | \exists \zeta < \delta_0 \, I_{\zeta}(y)\}, n), \Gamma^{(\delta_0)}$.

$\vdash_2^{\beta} \Gamma, \forall \xi \, \neg I_{\xi}(n)$ から inversion して $\vdash_2^{\beta+\delta_0} \Gamma, \neg I_{\delta_0}(n)$.
$\delta_0 \leq \vartheta(\beta + \delta_0) < \vartheta(\alpha)$ に注意して $\Gamma^{(\vartheta(\alpha))}$ を得る.

4.3 集合論へ

[Jäger82] は順序数解析の対象を, それまでの SOA から集合論へと転換した．手法としてはなんら新しいことはなかったのだが, この転換により証明の意味が捉え易くなったのみならず, 進むべき道を指し示した意義は大きい.

ここでの分析の対象となったのは, 無限公理付きの Kripke-Platek 集合論 KPω である．その公理は extensionality, pair, union, infinity に加えて foundation scheme $\forall x(\forall y \in x\, A(y) \to A(x)) \to \forall x\, A(x)$, Δ_0-Separation $\forall a \exists b[b = \{x \in a | B(x)\}]$, Δ_0-Collection $\forall x \in a \exists y\, B \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, B$. ここで A は任意の論理式で B は Δ_0-論理式, つまりその中の quantifiers はすべて bounded $\forall z \in c, \exists z \in c$.

Gödel の constructible universe $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$ について $L_\alpha \models \mathsf{KP}\omega$ であるときに順序数 α は recursively regular と呼ばれる．最小の recursively regular ordinal は ω_1^{CK}.

$\mathsf{KP}\omega$ は ID_1 と証明論的に同等, $|\mathsf{KP}\omega| = |\mathsf{ID}_1|$. 例えば subsection 2.3 での ID_1 での positive operator form $\mathcal{A}$ による最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ は $\mathsf{KP}\omega$ では $\{I_\alpha\}_\alpha$ を Σ-recursion で定義して $n \in I^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \exists\alpha(n \in I_\alpha)$ と Σ-論理式で定義される．これから分るように, 自然数の集合が $\mathbb{N}$ 上で Π^1_1-論理式で定義されることと, $L_{\omega_1^{CK}}$ 上で Σ_1-論理式で定義できることは同値である．ということは $\mathsf{KP}\omega$ の証明論的順序数を考えるには, そこで証明できる Σ_1-論理式の witness を抑えればよい：つまり順序数

$$|\mathsf{KP}\omega|_\Sigma = \min\{\alpha \leq \omega_1^{CK} | \forall A \in \Sigma_1(\mathsf{KP}\omega \vdash A \Rightarrow L_\alpha \models A)\}$$

の上界である.

上界を求めるための CE による議論の粗筋はこうである.

constructible universe の定義は subsection 2.2 の analytic hierarchy $\{R_\alpha\}_\alpha$ とそっくりである: $L_0 = \emptyset$, $L_{\alpha+1} = Df(L_\alpha)$ そして極限順序数 λ については $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$. ここで $Df(L_\alpha)$ は構造 $\langle L_\alpha; \in\rangle$ 上で定義可能な集合全体.

よって RA_α に対する補題 2.1 は L_α を constants として含む論理式による sequent calculus に適切に修正して成り立つ. あとは Δ_0-Collection もしくは $V = L$ のもとでそれと同等な Π_2-Reflection

$$\forall x \exists y\, B \to \exists b[tran(b) \land \forall x \in b \exists y \in b\, B]$$

について, $\Gamma, \forall x \exists y\, B\, (\Gamma \subset \Sigma_1)$ のほぼ cut が無い infinitary derivation を, $< \Omega$ へ collapse できることを示せばよい. 証明は subsection 4.2 での local predicativity とほぼ同じである.

• 順序数解析の集合論への転換の意味

Π^1_1-CA もしくはそれと同等な recursively regular ordinals の順序数解析が一応の完成を見た後, 次にどこを目指すか考えると, SOA では Π^1_1 の次だから Π^1_2 となってしまうが, そう一挙には進めない.

ところが集合論であれば, 正則基数の上に巨大基数の階層がある. (weakly) inaccessible cardinals, (weakly) Mahlo cardinals, (weakly) compact cardinals, etc. だからそれらの recursive analogues を考えて, recursively inaccessible ordinals, recursively Mahlo ordinals, Π_3-reflecting ordinals, etc. を universes に持つ集合論を順々に考えて行くという段取りができあがるわけである.

これで Gentzen から 50 年の時が過ぎた.

続きはまたいずれ

References

[Ackermann40] W. Ackermann, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Ann. 117(1940), 162-194.

[Ackermann51] W. Ackermann, Konstruktiver aufbau eines abschnitts der zweiten cantorschen zahlenklasse, Math. Zeitschrift, 53(1951), 403-413.

[Barwise75] J. Barwise, Admissible Sets and Structures, 1975, Springer.

[Bernays70] P. Bernays, On the original Gentzen consistency proof for number theory, in [IPT70], pp. 409-418.

[Beth55] E. W. Beth, Semantic entailment and formal derivability, Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (Amsterdam), Afdeling Letterkunde. Nieuwe Reeks 18 (1955), 309-342.

[Buchholz75] W. Buchholz, Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen, in: Proof Theory Symposion Keil 1974, Lect. Notes Math. 500(1975), 4-25.

[Buchholz77] W. Buchholz, Eine Erweiterung der Schnitteliminationsmethode, Habilitattionsschrift, München.

[Buchholz97] W. Buchholz, Explaining Gentzen's consistency proof within infinitary proof theory, in: G. Golttlob, A. Leitsch and D. Mundici (eds), Computational logic and proof theory. 5th Kurt Gödel Colloquium, KGC'97. Lect. Notes Comp. Sci. 1298, 1997, pp. 4-17.

[Buchholz01] W. Buchholz, Explaining the Gentzen-Takeuti reduction steps: A second-order system, Arch. Math. Logic 40(2001), 255-272.

[Buchholz15] W. Buchholz, On Gentzen's first consistency proof for arithmetic, in [Centenary15], pp. 63-87.

[BFPS81] W. Buchholz, S. Feferman, W. Sieg and W. Pohlers, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies, Lect. Notes Math. 897, Springer, 1981.

[Buchholz-Pohlers78] W. Buchholz and W. Pohlers, Provable well orderings of formal theories for transfinitely iterated inductive definitions, Jour. Symb. Logic 43, 118-125.

[Feferman64] S. Feferman, Systems of predicative analysis, Jour. Symb. Logic 29(1964), 1-30.

[Feferman70] S. Feferman, Formal theories for transfinite iteration of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis, in [IPT70], pp. 303-325.

[Feferman77] S. Feferman, Theories of finite type related to mathematical practice, in J. Barwise (ed), Handbook of Mathematical Logic, Horth-Holland, 1977, pp. 913-971.

[Friedman70] H. Friedman, Iterated inductive definitions and Σ^1_2-AC, in [IPT70], pp. 435-442.

[Gentzen34/35] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Zeitschr. 39(1934/35), I, 176-210: II, 405-431.

[Gentzen36] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. 112(1936), 493-565.

[Gentzen38] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge 4(1938), 19-44.

[Gentzen43] G. Gentzen, Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. 119(1943), 143-161.

[Gentzen69] G. Gentzen, The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Translated and edited by M. E. Szabo, North-Holland, 1969.

[Gentzen74a] G. Gentzen, Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie, Arch. Math. Logik u. Grundl. 16(1974), 97-118.

[Gentzen74b] G. Gentzen, Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Logik, Arch. Math. Logik u. Grundl. 16(1974), 119-132.

[Centenary15] Gentzen's Centenary. The Quest for Consistency. R. Kahle and M. Rathjen (eds), Springer, 2015.

[Girard89] J.-Y. Girard, P. Taylor and Y. Lafont, Proofs and types, Cambridge UP, 1989.

[Gödel31] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. Math. Phys. 38(1931), 173-198.

[Gödel33] K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheori, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4 (1933), 34-38.

[Gödel58] K. Gödel, Über eine bisher noch benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12(1958), 280-287.

[Gödel95] K. Gödel, Lecture at Zilsel's. in: S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons and R. M. Solovay (eds), Kurt Gödel: Collected Works III, Oxford UP, 1995, pp. 87-133.

[Hilbert-Bernays34] D. Hilbert and P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I, 1934. Die Grundlehren der math. Wissenschaften 40, Springer.

[Hilbert-Bernays39] D. Hilbert and P. Bernays, Grundlagen der Mathematik II, 1939, Die Grundlehren der math. Wissenschaften 50, Springer.

[Howard72] W. Howard, A system of abstract constructive ordinals, Jour. Symb. Logic 37(1972), 355-374.

[Howard82] W. Howard, The formulae-as-types notion of construction, in J. P. Seldin, J. R. Hindley (eds), To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic Press, 479-490(1982).

[IPT70] Intuitionism and proof theory, Proceedings of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. A. Kino, J. Myhill, R. E. Vesley (eds), North-Holland, 1970.

[Jäger82] G. Jäger, Zur Beweistheorie der Kripke-Platek Mengenlehre über den natürlichen Zahlen, Arch. Math. Logik u. Grundl. 22(1982),121-139.

[Kohlenbach08] U. Kohlenbach, Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics, Springer, 2008.

[Kolmogorov25] A. N. Kolmogorov, On the principle of the excluded middle (Russian), Matematischekij Sbornik Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Mathematicheskoe Obshchestvo 32 (1925), 646-667.

[Kreisel52] G. Kreisel, On the interpretation of non-finitist proofs II, Jour. Symb. Logic 17(1952), 43-58.

[Kreisel58] G. Kreisel, Mathematical significance of consistency proofs, Jour. Symb. Logic 23(1958), 155-182.

[Kreisel68] G.Kreisel, A survey of proof theory, Jour. Symb. Logic 33(1968),321-388.

[Kreisel71] G. Kreisel, A survey of proof theory II, [2ndScand71], 109-170.

[前原 73] 前原 昭二, 数理論理学 数学的理論の論理的構造, 培風館.

[Martin-Löf98] Per Martin-Löf, An intuitionistic theory of types, Twenty-five years of constructive type theory, Oxford Logic Guides 36, pp. 127–172, Oxford UP(1998).

[Mints75] G. Mints, Finite investigations of transfinite derivations, J. Soviet Math.(1978), 548-596.

[Plato08] J. von Plato, Gentzen's proof of normalization for natural deduction, Bull. Symb. Logic 14(2008), 240-257.

[Pohlers77] W. Pohlers, Beweistheorie der iterierten induktiven Definitionen, Habilitationsschrift, München.

[Pohlers78] W. Pohlers, Ordinals connected with formal theories for transfinitely iterated inductive definitions, Jour. Symb. Logic 43(1978),161-182.

[Pohlers81] W. Pohlers, Cut-elimination for impredicative infinitary systems part I. Ordinal-analysis for ID_1, Arch. Math. Logik u. Grundl. 21(1981), 113-129.

[Prawitz65] D. Prawitz, Natural deduction. A proof-theoretical study, Almqvist and Wiksell, 1965.

[Prawitz68] D. Prawitz, Hauptsatz for higher order logic, J. Symb. Logic 33 (1968) 452-457.

[Rathjen-Weiermann93] M. Rathjen and A. Weiermann, Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem, Ann. Pure Appl. Logic 60(1993), 49-88.

[Schütte51] K. Schütte, Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie, Math. Ann. 122(1951), 369-389.

[Schütte60a] K. Schütte, Beweistheorie. Springer, 1960

[Schütte60b] K. Schütte, Syntactical and semantical properties of simple type theory, Jour. Symb. Logic 25 (1960) 305-326.

[Schütte65] K. Schütte, Predicative well-orderings, in: Formal systems and recursive functions, J. N. Crossley and M. Dummett (eds), North-Holland, 280-303(1965).

[2ndScand71] Proc. 2nd Scandinavian Logic Symposium, J. E. Fenstad(ed), North-Holland, 1971.

[Spector62] C. Spector, Provably recursive functions of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, in: J. C. E. Dekker(ed.), Recursive Function Theory, pp. 1-27, AMS(1962).

[Smullyan68] R. M. Smullyan, First-order logic, Springer, 1968.

[Stanford Report63] G. Kreisel, et. al., Seminar on the Foundations of Analysis. (Mimeographed) Stanford 1963.

[Tait65] W. W. Tait, Infinitely long terms of transfinite type I, in: Formal systems and recursive functions, J. N. Crossley and M. Dummett (eds), North-Holland, 176-185(1965).

[Tait66] W. W. Tait, A non-constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic. Bull. AMS 72 (1966) 980-983.

[Tait67] W. W. Tait, Intensional interpretations of functionals of finite type, Jour. Symb. Logic 32(1967), 198-212.

[Tait68] W. W. Tait, Normal derivability in classical logic, in: Syntax and semantics of infinitary languages, J. Barwise (ed), Lect. Notes Math 72(1968), 204-236.

[Tait05] W. W. Tait, Gödel's reformulation of Gentzen's first consistency proof for arithmetic: the no-counterexample interpretation, Bull. Symb. Logic 11(2005), 225-238.

[Tait15] W. W. Tait, Gentzen's original consistency proof and the bar theorem, in [Centenary15], pp. 213-228.

[Takahashi67] M. Takahashi, A proof of cut-elimination theorem in simple type theory, J. Math. Soc. Japan 19 (1967) 399-410.

[Takeuti53] G. Takeuti, On a generalized logic calculus, Japan. J. Math. 23(1953), 39-96.

[Takeuti55] G.Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC I, J. Math. Soc. Japan 7(1955), 249-275.

[Takeuti57] G. Takeuti, Ordinal diagrams, J. Math. Soc. Japan 9(1957), 386-394.

[Takeuti58] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC V, J. Math. Soc. Japan 10(1958), 121-134.

[Takeuti60] G. Takeuti, Ordinal diagrams II, J. Math. Soc. Japan 12(1960), 385-391.

[Takeuti61] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC VI, Proc. Japan Acad. 37(1961), 440-443.

[Takeuti67] G. Takeuti, Consistency proofs of subsystems of classical analysis, Ann. Math. 86(1967), 299-348.

[Takeuti75] G. Takeuti, Proof Theory, North-Holland, 1975.