

一対比較型測定における 因子構造の探索的推定

分寺 杏介

神戸大学 経営学研究科

杉山 剛

株式会社リクルートマネジメントソリューションズ

岡田 謙介

東京大学 教育学研究科



bunji@bear.kobe-u.ac.jp

日本計算機統計学会第39回シンポジウム

2025年11月9日

■ リッカート尺度

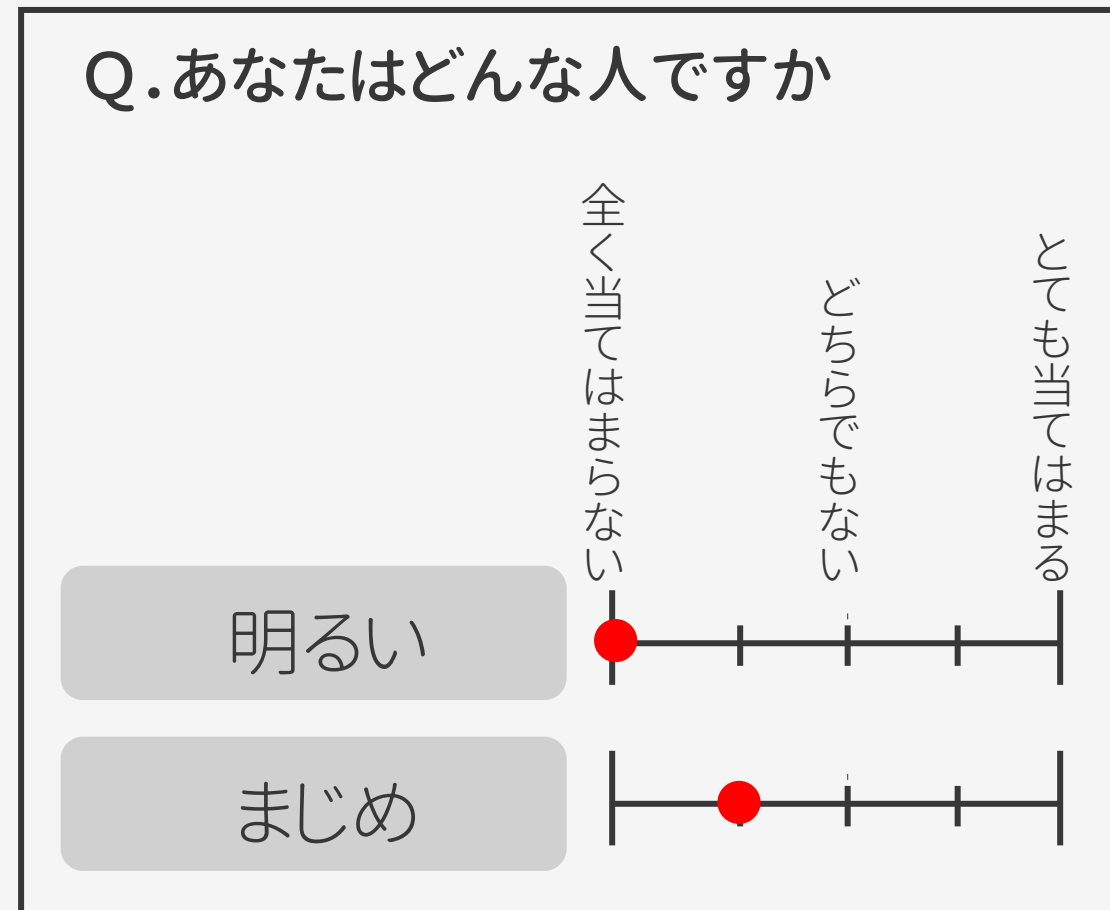
一つ一つの項目について「程度」を答える
e.g., 自分に当てはまる程度, 賛成する程度

■ 系統的バイアスの影響を受けやすい

中心化傾向…5段階なら3を選びやすい

黙従傾向(寛大化傾向)…内容とは無関係に「あてはまる」を選びやすい

フェイキング…自分がよく見えるように意図的に回答を変える など



Single-Stimulus (SS); Likert scale

この場合
1つの項目に
2つの項目要素
が含まれている

Q.どっちがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても

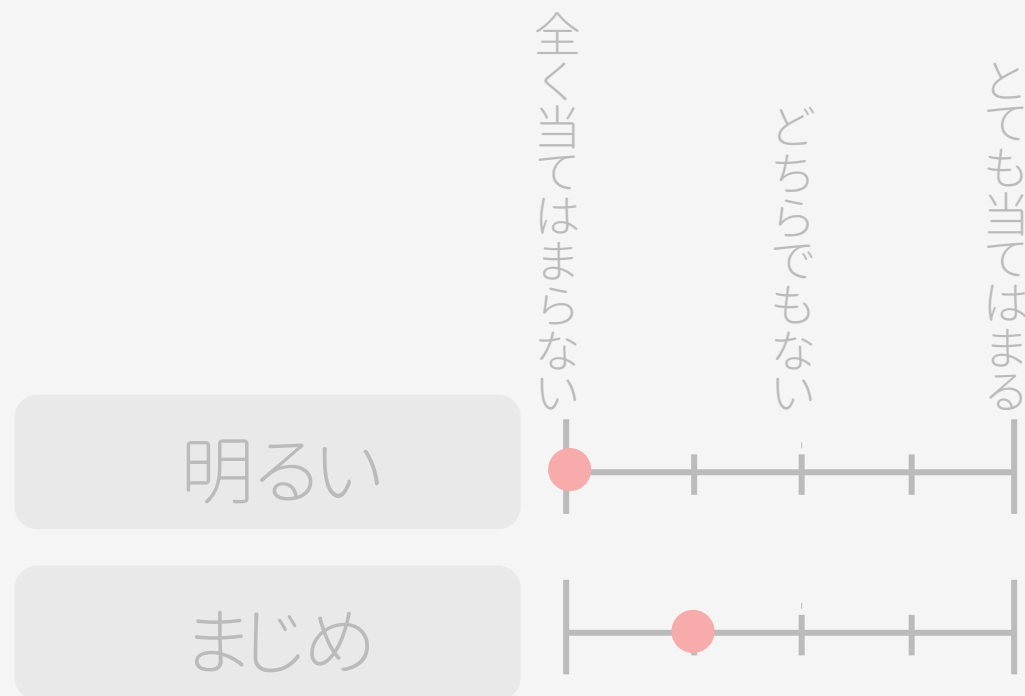
明るい まじめ

■ (多肢)強制選択式(Forced-Choice; FC)

複数の項目要素の中から回答する形式

- 最も当てはまる／らないもの
- 当てはまる順にランキング
- ▶ 中心化傾向などは起こり得ない
フェイキングもかなり抑えられる

Q.あなたはどんな人ですか



Single-Stimulus (SS); Likert scale

FCのほうが妥当性が高いという先行研究あり (e.g., Christiansen et al., 2005 ; Salgado & Táuriz, 2014)

基本的な流れ

1 因子構造を決める

項目(要素)を用意

- ▶ リッカート式などによってデータを収集
- ▶ EFAまたはCFAによって因子構造を決定

2 異なる因子の項目要素を組み合わせる

様々な条件を考慮して

(因子の組のバランス, 逆転項目, 社会的望ましさ etc.)

3 項目(要素)パラメタを推定する

例: OPQ32

(職務行動に関するアセスメントツールとして最も有名なものの一つ)

Relationships with People:

- Influence: Persuasive, Controlling, Outspoken, Independent Minded
- Sociability: Outgoing, Affiliative, Socially Confident
- Empathy: Modest, Democratic, Caring

Thinking Style:

- Analysis: Data Rational, Evaluative, Behavioural
- Creativity and Change: Conventional, Conceptual, Innovative, Variety Seeking, Adaptable
- Structure: Forward Thinking, Detail Conscious, Conscientious, Rule Following

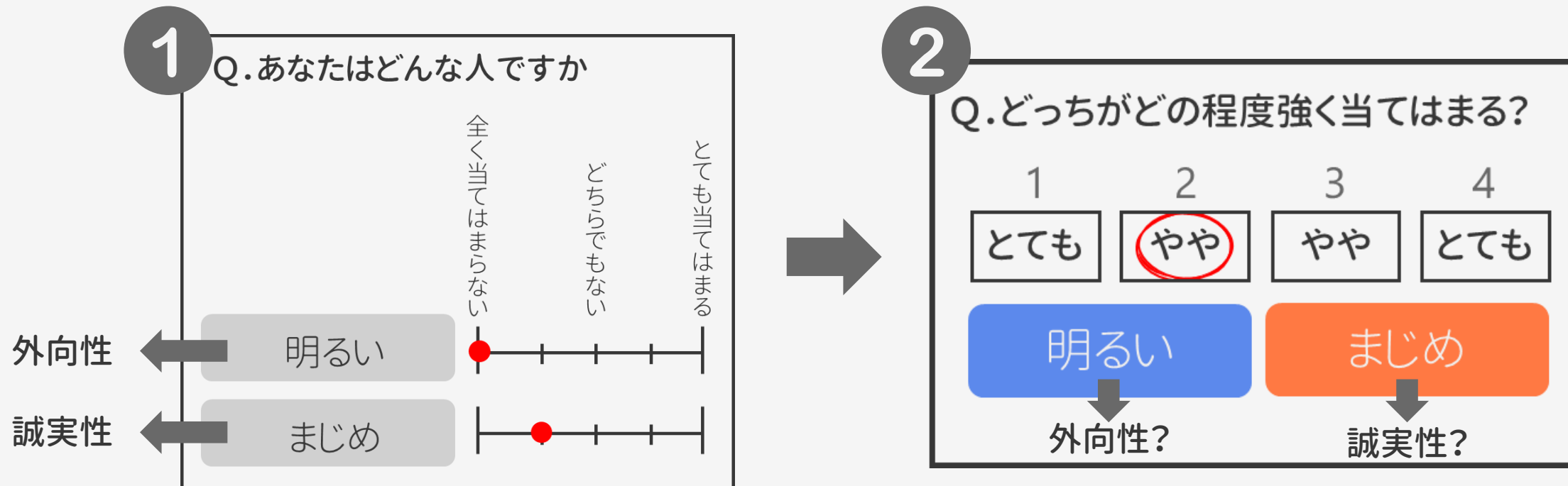
Feelings and Emotions:

- Emotions: Relaxed, Worrying, Tough-minded, Optimistic, Trusting, Emotionally Controlled
- Dynamism: Vigorous, Competitive, Achieving, Decisive

	Most	Least
I like to discuss abstract concepts	☒	☐
I enjoy interpreting statistics	☒	☐
I feel that people are honest	☒	☐

▶ リッカート測定で推定された因子構造が 一対比較でも同一である

項目要素と因子の対応関係



比較対象によらず因子構造が同じなのか?
という点についてはほぼ検証されていない

- 一対比較型測定を前提とした状況で因子構造を探索的に決定したい
- 【メリット1】因子構造の不変性をデータから検証できるようになる
一般的なモデル(TIRT: 後述)でもモデル適合度は評価可能だが
項目(要素)レベルでの評価を行うためにはモデル拡張が必要
- 【メリット2】自然な形で新規項目要素を提示して因子構造を推定できる

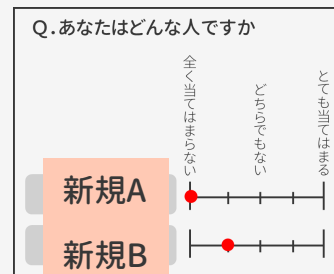
従来の方法だと

Q. どちらがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても

既存A 既存B

同じ見た目には新規項目を入れられない



提案手法がうまくいけば

Q. どちらがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても

既存A 新規A

Q. どちらがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても

既存B 新規B

同じ見た目の中に
混ぜられるようになる

項目(要素)セットを
拡張したい



人力で



自動で

表	因子A	因子B	因子C	因子D
要素1	○			
要素2		○		
要素3	○			
要素4			○	
要素5				○
要素6			○	
要素7		○		
要素8				○
新要素1	?	?	?	?
新要素2	?	?	?	?

すでに因子構造と
項目要素が用意されている
尺度において

作った新しい項目要素が
どの因子にかかるのかを
推定したい

e.g., Hommel et al. (2021)

■ Thurstonian IRTモデル多値版 (Brown and Maydeu-Olivares, 2018)

多肢選択

Q.どっちがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても

明るい

まじめ

f_{j_1} : 外向性
 f_{j_2} : 誠実性

μ : 項目要素の選好の平均

λ : 因子負荷

η : 因子得点(特性値)

- 2つの項目要素 (j_1, j_2) はそれぞれ異なる因子 (f_{j_1}, f_{j_2}) を測定する

■ 一方の潜在変数 u_{ij_2} について見ると

$$X_{ij}^* = u_{ij_2} - u_{ij_1}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{ij}^* < \alpha_{j,2} \\ c & \text{if } \alpha_{j,c} \leq X_{ij}^* < \alpha_{j,c+1} \\ C & \text{if } X_{ij}^* \geq \alpha_{j,C} \end{cases}$$

$$u_{ij_2} = \mu_{j_2} + \lambda_{j_2} \eta_{if_{j_2}} + \varepsilon_{ij_2} \quad \varepsilon_{ij_2} \sim N(0, \Psi_{j_2}^2)$$

- したがって (j_1, j_2) 間の比較における選択確率は

正規累積
モデル

$$P(X_{ij} = c | \eta_i) = \begin{cases} 1 - \Phi(u_{j_2} - u_{j_1} - \alpha_{j,2}) & \text{if } c = 1 \\ \Phi(u_{j_2} - u_{j_1} - \alpha_{j,c}) - \Phi(u_{j_2} - u_{j_1} - \alpha_{j,c+1}) & \text{if } 1 < c < C \\ \Phi(u_{j_2} - u_{j_1} - \alpha_{j,C}) & \text{if } c = C \end{cases}$$

$\Phi(\cdot)$ ▶ 標準正規分布の累積分布関数

- ▶ 以後 $OP(X_{ij} = c)$ と表記します。

Ordered Probit の略です。

■ TIRTでは通常,各項目要素は1つの因子にのみ負荷量を持つ

例:6因子構造の尺度の項目 j について $(f_{j1}, f_{j2}) = (1, 3)$ のとき

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{j2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \Lambda = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \cdots \quad \Lambda_J]'$$

Q.どっちがどの程度強く当てはまる?

1	2	3	4
とても	やや	やや	とても
明るい ↓ 外向性?		まじめ ↓ 誠実性?	

■ 今回は「どの因子に負荷量をもつか」を推定したい

▶ すべての因子負荷を独立に推定する ([Chen et al., 2021](#)の考え方を利用)

例: 項目 j の要素 j_2 の因子を推定したいとき

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{j2}^{(1)} & \lambda_{j2}^{(2)} & \lambda_{j2}^{(3)} & \lambda_{j2}^{(4)} & \lambda_{j2}^{(5)} & \lambda_{j2}^{(6)} \end{bmatrix}$$

 λ_{jk}

上付き添字なし
CFA要素

 $\lambda_{jk}^{(f)}$

上付き添字あり
EFA要素

項目		因子A	因子B	因子C	因子D
1	要素1	○			
	要素2		○		
2	要素3	○			
	要素4			○	
3	要素5				○
	要素6			○	
4	要素7		○		
	要素8				○
5	要素9	○			
	要素10				○

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{41} \\ \lambda_{42} \\ \lambda_{51} \\ \lambda_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} \\ 0 & 0 & \lambda_{32} & 0 \\ 0 & \lambda_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{52} \end{bmatrix}$$

項目		因子A	因子B	因子C	因子D
1	要素1	○			
	要素2	?	?	?	?
2	要素3	○			
	要素4	?	?	?	?
3	要素5				○
	要素6			○	
4	要素7		○		
	要素8				○
5	要素9	○			
	要素10				○

EFA要素とCFA要素を組み合わせて
ペアを作成する

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{41} \\ \lambda_{42} \\ \lambda_{51} \\ \lambda_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12}^{(1)} & \lambda_{12}^{(2)} & \lambda_{12}^{(3)} & \lambda_{12}^{(4)} \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{22}^{(1)} & \lambda_{22}^{(2)} & \lambda_{22}^{(3)} & \lambda_{22}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} \\ 0 & 0 & \lambda_{32} & 0 \\ 0 & \lambda_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{52} \end{bmatrix}$$

■ 実用上は(完全)単純構造が望ましい

TIRTモデルは一般的にこれを仮定しているため

リッカート尺度でも最終的には単純構造を勝手に(?) 与えている場合もある

■ 因子負荷パラメータの非ゼロ成分の数を制限する

例: 項目 j の要素 j_2 の因子を推定したいとき

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{j1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{j2}^{(1)} & \lambda_{j2}^{(2)} & \lambda_{j2}^{(3)} & \lambda_{j2}^{(4)} & \lambda_{j2}^{(5)} & \lambda_{j2}^{(6)} \end{bmatrix}$$

この中で1つだけが
非ゼロになってくれるとGood

**Horseshoe事前分布を利用した
スパース推定にしよう!**

事前分布のscaleパラメータをうまく変えることで

- あまり大きくないパラメータはshrinkが効いてゼロに近づく
- 十分に大きいパラメータはshrinkがほぼ効かなくなり過小推定を抑える

具体的な設定 (Piironen & Vehtari, 2017 に基づく)

抄録から改良しました

$$\lambda_{jk}^{(f)} \sim \text{Normal}\left(0, \tau^2 \tilde{\lambda}_{jk}^{(f)^2}\right)$$

【グローバル shrinkage】
すべての係数をゼロに近づける

【ローカル shrinkage】
各係数をshrinkするかを決める

こちらのほうが強ければ

これらのバランスによって
各係数の事前分布が決まる

こちらのほうが強ければ

($\tau^2 = 0.001$)のとき

e.g., $\tilde{\lambda}_{jk}^{(f)} = 1 \rightarrow \lambda_{jk}^{(f)} \sim \text{Normal}(0, 0.001)$

e.g., $\tilde{\lambda}_{jk}^{(f)} = 100 \rightarrow \lambda_{jk}^{(f)} \sim \text{Normal}(0, 10)$

$$\lambda_{jk}^{(f)} \sim \text{Normal}\left(0, \tau^2 \tilde{\lambda}_{jk}^{(f)^2}\right)$$

■ グローバルshrinkageの強さで非ゼロ要素の数を制限する

▶ Piironen & Vehtari, 2017 に基づいて設定

(例) 6因子構造で, 各項目について1つだけ非ゼロが想定される場合

$$\tau \sim \text{Cauchy}^+(0, \tau_0), \quad \tau_0 = \frac{1}{(6-1)\sqrt{n}} \leftarrow \text{サンプルサイズ}$$

■ その他のパラメータの事前分布

他のパラメータは一般的なTIRTと同様

$$\tilde{\lambda}_{jk}^{(f)} \sim \text{Cauchy}^+(0, 1), \quad \alpha_j \sim \text{Normal}(0, 5), \quad \lambda_{jk} \sim \text{Normal}^+(1, 3)$$

$$\boldsymbol{\eta}_i \sim \text{MVN}(\mathbf{0}_M, \boldsymbol{\Sigma}_{M \times M}) \quad \boldsymbol{\Sigma}_{M \times M} \sim \text{LKJCorr}(2)$$

EFA要素の因子負荷の符号は既知

▶ 正の制約で推定して, 必要に応じて反転

まずは「理想的な状況」での挙動を見ておく

■ 条件設定 ※因子数 $M = 6$ で固定

回答者数 $N = 200, 500, 1000$

総項目要素数 $J_T = (30, 60)$ ▶ 実際には2つの選択肢で1項目

探索する項目要素の数 $J_E = (1, 5, 15)$

探索する項目要素の因子負荷 $\lambda_{jk}^{(\text{true})} = (0.5, 1, 1.5)$

因子間相関 $r = (0, 0.3)$

■ 真値 各因子の項目要素数が J_T/M 個ずつ、かつペアが同じ因子にならないように

$\lambda_{jk} \sim \text{Unif}(0.5, 1.5)$ ▶ 因子構造と符号はランダムに決定

$\alpha_{j,2} \sim \text{Unif}(-3, -1.5)$, for $(c \text{ in } 3:C)$ $\gamma_{j,c} \sim \text{Unif}(\gamma_{j,c-1} + 0.5, \gamma_{j,c-1} + 1)$

$\eta \sim \text{MVN}(\mathbf{0}_M, \Sigma_{M \times M})$

【例】 $(J_T, J_E) = (60, 5)$ の場合

項目ID	要素1	要素2
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8
5	9	10
6	11	12
⋮	⋮	⋮
29	57	58
30	59	60

まずは「理想的な状況」での挙動を見ておく

■ 結果の指標

- α, η および「CFA要素の λ_{jk} 」のRMSE, $\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta - \hat{\theta}}$, Bias, $\text{Cor}(\theta, \hat{\theta})$ (真値との相関)
- EFA要素について真の因子(true)の $\lambda_{jk}^{(f)}$ の割合, その他の因子の因子負荷 $|\widehat{\lambda_{jk}^{(\text{other})}}|$

$$\downarrow$$

$$P(\text{true}) = \frac{\lambda_{jk}^{(\text{true})^2}}{\sum_{f=1}^F \lambda_{jk}^{(f)^2}}$$

- EFA要素について真の因子の因子負荷が最大値になった割合 $P(\text{max})$

■ MCMC設定

Stanによる推定 (chain=4, warmup=150, sampling=500) ► $\max(\hat{R}) < 1.1$ の結果のみ使用

■ 条件設定 ※因子数 $M = 6$ で固定回答者数 $N = 200, 500, 1000$ 総項目要素数 $J_T = (30, 60)$ ▶ 実際には2つの選択肢で1項目探索する項目要素の数 $J_E = (1, 5, 15)$ 探索する項目要素の因子負荷 $\lambda_{jk}^{(\text{true})} = (0.5, 1, 1.5)$ 因子間相関 $r = (0, 0.3)$

■ 理想的な状況では問題ない挙動を確認

 $J_T = 30$ を記録し忘れていました……

N	J_T	J_E	$\lambda_{jk}^{(\text{true})}$	r	RMSE			bias			EFA要素		
					λ_{jk}	α	η	λ_{jk}	α	η	P(true)	$ \lambda_{jk}^{(\text{other})} $	P(max)
1000	60	1	1.5	0	0.111	0.108	0.534	0.028	-0.008	-0.008	0.986	0.017	1.000
200	60	1	1.5	0	0.328	0.269	0.545	0.146	-0.043	0.001	0.953	0.040	1.000
1000	60	15	1.5	0	0.115	0.114	0.497	0.035	-0.005	0.002	0.969	0.029	1.000
1000	60	1	0.5	0	0.113	0.107	0.539	0.026	-0.009	0.004	0.925	0.012	1.000
1000	60	1	1.5	0.3	0.116	0.107	0.519	0.020	-0.005	0.000	0.983	0.018	1.000
200	60	15	0.5	0.3	0.433	0.286	0.591	0.163	-0.055	-0.006	0.399	0.038	0.706
1000	60	15	0.5	0.3	0.129	0.105	0.558	0.031	-0.004	0.002	0.799	0.028	0.993
200	60	15	1.5	0.3	0.344	0.289	0.506	0.159	-0.061	-0.001	0.885	0.077	1.000

厳しすぎる条件では流石に難しそう

結果に強く影響する条件は N と $\lambda_{jk}^{(\text{true})}$

参加者

クラウドソーシング (Prolific) で募集した英語話者210名(18歳以上)

シミュレーションの結果を踏まえて
もう少し増やす予定です

使用した項目

HEXACO形容詞版 ([Romano et al., 2023](#)) ▶ 5因子で計60単語(30ペア)

- 予備調査で社会的望ましさを求めて、これが近くなるようにペアを構成
- +因子のペアのバランスを取るよう & 異方向ペアを一定数含むように構成

回答方法

Which statement describes you better, and to what extent?

Sensitive			Non-sensitive		
Much more	More	Slightly more	Slightly more	More	Much more

赤枠内のボタンをクリックして回答

使用した単語(=項目要素)および組み合わせ

item_1	fac_1	sign_1	item_2	fac_2	sign_2
conventional	O	-1	extraverted	X	1
asocial	X	-1	disorganized	C	-1
accurate	C	1	intellectual	O	1
undisciplined	C	-1	quarrelsome	A	-1
aggressive	A	-1	shy	X	-1
fragile	E	1	inaccurate	C	-1
attentive	C	1	honest	H	1
inattentive	C	-1	hypersensitive	E	1
impassive	E	-1	uncreative	O	-1
sociable	X	1	humble	H	1
curious	O	1	tolerant	A	1
cheerful	X	1	diligent	C	1
fearful	E	1	overbearing	A	-1
calm	A	1	courageous	E	-1
hostile	A	-1	dishonest	H	-1

item_1	fac_1	sign_1	item_2	fac_2	sign_2
unemotional	E	-1	poser	H	-1
choleric	A	-1	silent	X	-1
secure	E	-1	exuberant	X	1
tranquil	A	1	who appreciates art	O	1
vivacious	X	1	traditional	O	-1
haughty	H	-1	solitary	X	-1
emotional	E	1	introverted	X	-1
hypocritical	H	-1	unoriginal	O	-1
innovative	O	1	sincere	H	1
conscientious	C	1	original	O	1
loyal	H	1	stable (emotionally)	E	-1
peaceful	A	1	faithful	H	1
patient	A	1	organized	C	1
vulnerable	E	1	uninterested in art	O	-1
greedy	H	-1	reckless	C	-1

	因子		1	-1	計
H	Honesty-Humility	正直さ	5	5	10
E	Emotionality	情動性	5	5	10
X	eXtroversion	外向性	5	5	10
A	Agreeableness	協調性	5	5	10
C	Conscientiousness	誠実性	5	5	10
O	Openness	開放性	5	5	10

【制約条件】

- すべての因子が,他の因子と2回ずつペアになっている
- signが1と-1の組み合わせが6個以上含まれている

■ 全60項目要素のうち1つだけを探索的に推定してみる

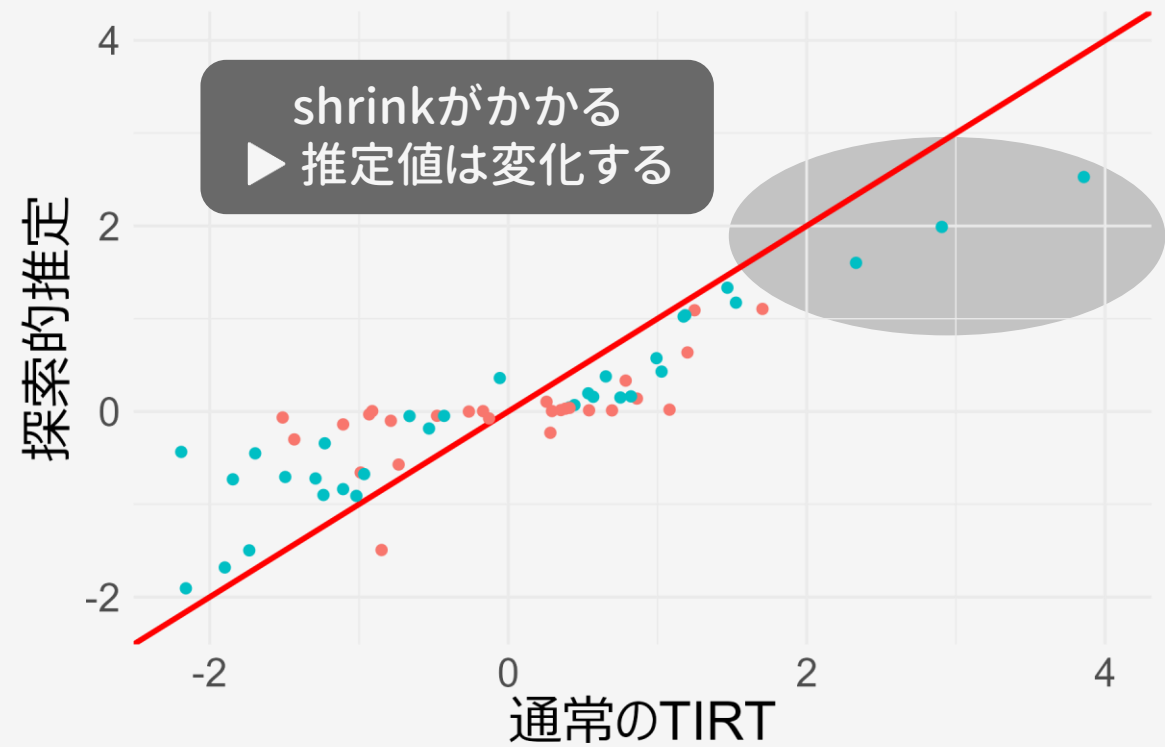
「正解」の因子はとりあえず元論文に示されていたものとする(前ページ参照)

■ 以下の観点からチェックする

1. CFA(通常のTIRT)で推定したときとの $\lambda_{jk}^{(f)}$ の推定値の差
2. Prop(true) ► 単純構造に近ければ高い値になっているはず
3. 「正解」の因子の因子負荷が最大値になっているか

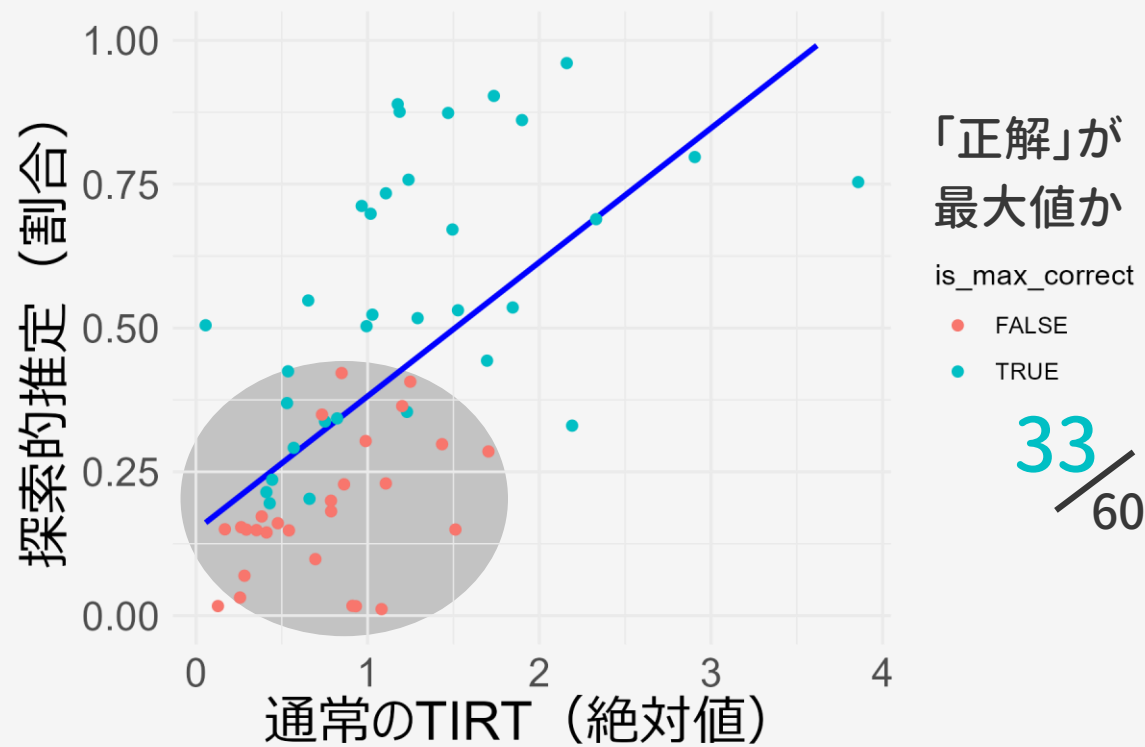
■ MCMC推定の設定

シミュレーション時よりもiteration数を増やしています(500→2000)



$|\hat{\theta}| - |\theta| \longrightarrow$

RMSD	0.651
Bias	0.034
絶対値のBias	-0.501
相関係数	.891



そもそも因子負荷が
高くないと因子が安定しない

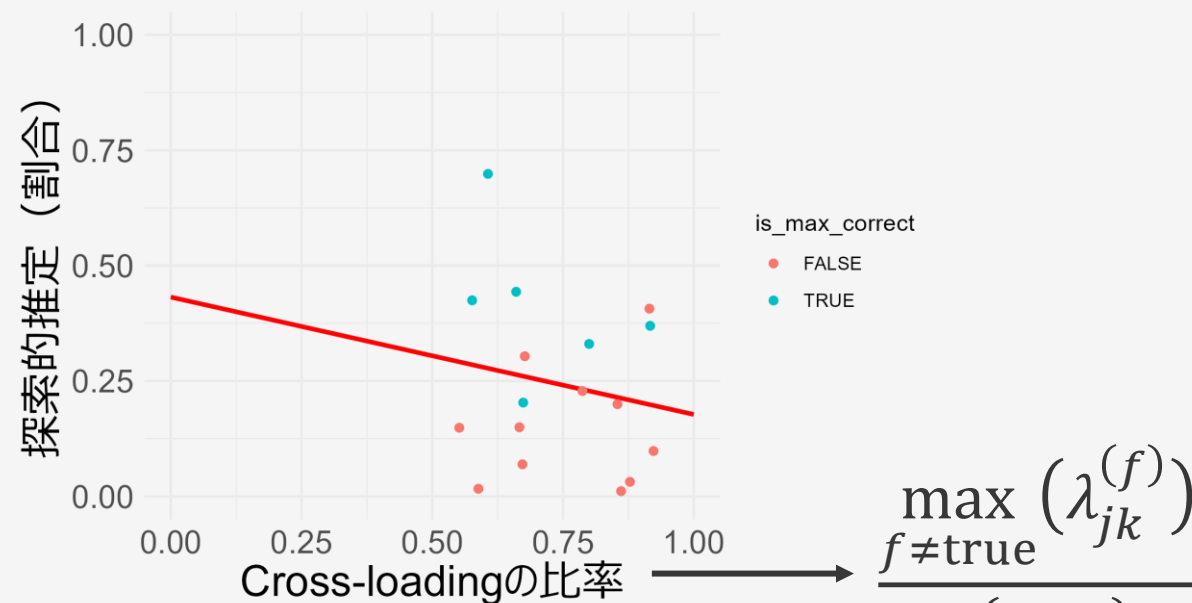
Romano et al. (2023)では「絶対値0.3以上」のloadingが報告されている

▶ これとの関係を見てみる

cross-loadingの 個数	「正解」 一致率
0	0.605
1	0.429
2	0.333

0.3以上のcross-loadingがあると
一致率は低下する傾向が見られる

Adjective	Reverse Code	H	E	X	A	C	O
haughty	R	-0.48	0.34		0.41		
greedy	R	-0.48				0.32	
dishonest	R	-0.53				0.35	
faithful		0.47					



cross-loadingの相対的な大きさは
あまり関係がなさそう?

- 一対比較データから因子構造を部分的に探索的に推定する方法を提案した
とりあえず理想的な(人工)データではうまくいくことを確認
実データにも当てはめてみた

【今後の課題】

- もう少し厳しい状況下での挙動の確認
 - cross-loadingの影響
 - EFA要素の「真の因子」がたまたまペアの相手と同じであった場合 etc.

■ 実データでの検証の継続

まずはサンプルサイズを増やすことから

【ちなみに】CFA(Mplus)で推定した際のモデル適合度は
CFI=0.807; RMSEA=0.055; SRMR=0.064 でした