

## 1. 岩石の脆性破壊

### 1.1 理論的概念

廣瀬 仁

#### 1.1.1 歴史的展望

固体の理論的強度: 格子面を横切って、原子結合を切断するために必要な応力

固体の原子間力の非調和型モデル

応力-変位関係を正弦関数で近似 (応力がピークに達する前を考えれば十分)

$$\sigma = \sigma_t \sin \frac{2\pi(r-a)}{\lambda} \quad (1)$$

微分して

$$\frac{d\sigma}{d(r-a)} = \frac{E}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_t \cos \frac{2\pi(r-a)}{\lambda} \quad (2)$$

$(r-a)/\lambda \ll 1$  であるから  $\cos \approx 1$ 。したがって

$$\sigma_t = \frac{E\lambda}{2\pi a} \quad (3)$$

E: ヤング率

モデルより  $a \approx \lambda$ 。理論的強度はおおよそ  $E/2\pi$  となる。

$\gamma$  (固有表面エネルギー): 結合を破壊するために必要な単位面積あたりのエネルギー

これは、格子面を  $\lambda/2$  だけ引き離す仕事に等しい。そこで

$$2\gamma = \int_0^{\lambda/2} \sigma_t \sin \frac{2\pi(r-a)}{\lambda} d(r-a) = \frac{\lambda\sigma_t}{\pi} \quad (4)$$

ここで  $\sigma_t \approx E/2\pi$  とすると、 $\gamma \approx Ea/4\pi^2$  と見積もれる。

以上のように理論強度の値を見積もると 5-10 GPa

現実の材料の強度より数桁大きい。

→ 現実の材料はすべて欠陥 (defect) を含む。

- クラック (crack)

- 面状の欠陥
- 巨視的に脆性 (brittle) 破壊をもたらす

- 転位 (dislocation)

- 線状の欠陥
- 塑性 (plastic) 流動; 永久変形が残る

欠陥の存在による応力集中 域で、局所的に理論強度が達成される

→ 理論強度よりもずっと小さい応力で材料を破壊できる

リソスフェア: 脆性領域 schizosphere  
延性領域 plastosphere

## 1.1.2 Griffith 理論

応力集中の例:

円孔をもつ平板が遠方で一様な引っ張り応力  $\sigma_\infty$  をうけている。付録 B. に示したように、円孔の端で  $3\sigma_\infty$  の引っ張り応力を受ける。このような応力集中は孔の部分が応力をになえないために生じる。また、応力集中の大きさは孔の幾何学的形状だけで決まる。

楕円孔の場合は、短軸  $b$ , 長軸  $c$  とすると、長軸端の応力集中は  $c/b$  に比例して増加する。これから、狭くて長いクラックでは  $\sigma_\infty \ll \sigma_t$  のときでも、クラック先端で理論強度に達しうる。

$$\sigma \approx \sigma_\infty(1 + 2c/b) \quad (5)$$

$c \gg b$  のときには

$$\sigma \approx \sigma_\infty(1 + 2\sqrt{c/\rho}) \approx 2\sigma_\infty\sqrt{c/\rho} \quad (6)$$

### クラック伝播のエネルギーバランス

図のような系を考える。静的なクラックに対するシステムのトータルエネルギー  $U$  は

$$U = (-W + U_e) + U_s \quad (7)$$

$W$ : 外力の仕事;  $U_e$ : 歪エネルギー;  $U_s$ : 表面エネルギー。カッコに囲まれた項は力学的エネルギーと呼ばれる。

クラック伸長 - 力学的エネルギー減少  
 - 表面エネルギー増加

また、平衡状態に達しているときには、力学的エネルギーの減少と表面エネルギーの増加がバランスしていなければならないので

$$\frac{dU}{dc} = 0 \quad (8)$$

クラック導入前の歪エネルギー:

$$U_e = \frac{1}{2}E \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 \cdot 1 \cdot y = \frac{y\sigma^2}{2E} \quad (9)$$

力学的エネルギーの変化分は、まず後の議論で出てくるエネルギー解放レートが以下のように見積もれる:

$$\mathcal{G}_I = \frac{K_I^2}{E}, \quad K_I = \sqrt{\pi c} \sigma \\ \therefore \mathcal{G}_I = \frac{\pi \sigma^2 c^2}{2E}$$

これから力学的エネルギー増分は

$$\Pi = \int_0^c \mathcal{G}_I dc = \frac{\pi \sigma^2 c^2}{2E} \quad (10)$$

クラック導入後の歪エネルギーは

$$\underline{U}_e = \frac{\sigma^2(y + \pi c^2)}{2E} \quad (11)$$

(11) から実効弾性係数を求めると

$$\underline{E} = \frac{yE}{y + \pi c^2} \quad (12)$$

外力のした仕事は

$$W = \sigma y \left( \frac{\sigma}{\underline{E}} - \frac{\sigma}{E} \right) = \frac{\pi \sigma^2 c^2}{E} \quad (13)$$

表面エネルギーの変化は

$$U_s = 4c\gamma \quad (14)$$

(11), (13), (14) を (7) に代入すると

$$U = -\frac{\pi\sigma^2 c^2}{2E} + 4c\gamma \quad (15)$$

さらに平衡条件 (8) を適用すると

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi c}} \quad (16)$$

これはクラックが平衡に達しているときの限界応力の表現。

この系の歪エネルギーと表面エネルギーが図に示されている。この図から (16) が不安定平衡の位置を決めることが分かる。

Griffith の条件が満たされたとき、クラック先端の応力が結合を実際に切るのに十分なほど大きくなっているか？

(3), (4) から  $\lambda$  を消去して

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{E\gamma}{a}} \quad (17)$$

ミクロに見たら  $\rho \sim a$ 。遠方で  $\sigma_f$  が加えられたとき、クラック先端では (6) より

$$\sigma_t = 2\sigma_f \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (18)$$

(17), (18) より

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma}{4c}} \quad (19)$$

このミクロな考察から導かれた式と、先のマクロなエネルギーの考察から導かれた (16) は酷似している。→ クラック伝播の必要十分条件

## 安定に伝播するクラック (Obreimoff の実験)

	境界条件
Griffith の定式化	応力一定
Obreimoff の実験	変位一定

外部仕事は  $W = 0$ 。曲げられた薄片の歪エネルギーは (付録 C. 参照)

$$U_e = \frac{Ed^3 h^2}{8c^3} \quad (20)$$

$U_s = 2c\gamma$  と  $dU/dc = 0$  の条件から、平衡にあるクラックの長さ:

$$c = \left( \frac{3Ed^3 h^2}{16\gamma} \right)^{1/4} \quad (21)$$

クラックは静的な平衡状態にある。クラックの安定性は、材料の物性よりも、系の応答によってコントロールされる。

### 1.1.3 線形破壊力学

- クラックまわりの応力場の解析
- ある種の限界パラメタに準拠する破壊基準の定式化

弾性論

クラックの変位場の 3 つのモード (図 1.5)

- モード I: 引っ張り, 開口モード

- モード II： 面内 (in-plane) 剪断クラック
- モード III： 面外 (antiplane) 剪断クラック

クラックが平面状で完全にとがっており、クラック内壁には結合力は働かないと仮定。クラック先端近傍 (near field) の応力場と変位場は (付録 D. 参照)

$$\sigma_{ij} = K_n / \sqrt{2\pi r} f_{ij}(\theta) \quad (22)$$

$$u_i = \left( \frac{K_n}{2E} \right) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) \quad (23)$$

ここで  $r$  はクラック先端からの距離、 $\theta$  はクラック面からはかった角度。(図 1.6 参照)

$K_n$  : 応力拡大係数 (stress intensity factor);  $K_I, K_{II}, K_{III}$  は 3 つのクラックモードに対応している。クラックの幾何学と課せられた応力の大きさによって決まる。それ以外の項は応力の分布だけを記述する。

線形破壊力学と Griffith のエネルギーバランスを関係づけるために、エネルギー解放レート (energy release rate)  $\mathcal{G}$  を定義する。(7) 式参照。

$$\mathcal{G} \equiv - \frac{d(-W + U_e)}{dc} \quad (24)$$

付録 E. より、 $\mathcal{G}$  と応力拡大係数が以下のように関係づけられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_I &= \frac{K_I^2}{E'} \\ \mathcal{G}_{II} &= \frac{K_{II}^2}{E'} \\ \mathcal{G}_{III} &= \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

ただし

$$E' = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) & (\text{平面歪}) \end{cases} \quad (26)$$

(7), (8) より

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dc} &= \frac{d(-W + U_e)}{dc} + \frac{dU_s}{dc} = 0 \\ &= -\mathcal{G} + 2\gamma = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

となるので、モード I のクラックが伸展するための条件は

$$\mathcal{G}_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E'} = 2\gamma \quad (28)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_c & \text{ 限界 (critical) エネルギー解放レート} \\ K_c & \text{ 限界応力拡大係数} \end{aligned}$$

両者とも材料の物性。応力解析を通じて材料に課せられた応力と関係づけることができるので、有力かつ一般的な破壊基準となる。

## 一様な遠方からの応力による応力拡大係数

図のような場合、応力拡大係数は付録 F. より

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_{yy} \sqrt{\pi c} \\ K_{II} &= \sigma_{xy} \sqrt{\pi c} \\ K_{III} &= \sigma_{zy} \sqrt{\pi c} \end{aligned} \quad (29)$$

(25) より

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_I &= \frac{\pi c}{E'} \sigma_{yy}^2 \\ \mathcal{G}_{II} &= \frac{\pi c}{E'} \sigma_{xy}^2 \\ \mathcal{G}_{III} &= \frac{1+\nu}{E} (\pi c) \sigma_{zy}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

(5) の楕円クラック先端の応力集中の近似式と (22), (29) を比較する。平面クラックの場合、クラック先端に応力の特異点がある。現実の材料は無限の応力を支えられないので、クラック先端に特異点を緩和するような非線型に変形する領域があるだろう。

→ 線形破壊力学の適用限界

非線形ゾーンでは塑性流動などのエネルギー散逸過程が存在する。これらがクラック伸長力の一部に寄与する。

$$\mathcal{G}_c = 2\Gamma \quad (31)$$

これは (28) を書き換え、全てのエネルギー散逸をクラック伸長力に算入するために  $\Gamma$  (lumped parameter) を導入した。

現実の断層の性質を調べる上で、最も重大な問題は、クラック壁が stress free という仮定にある。実際には摩擦が存在し、摩擦力に抗してなされる仕事が必要。

### 1.1.4 巨視的な破壊基準

経験的 / 半経験的な基準

破壊基準の定式化 (破壊の包絡線):

$$\sigma_1 = f(\sigma_2, \sigma_3) \quad (32)$$

主応力  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (圧縮を正にとる)

- 引っ張り (tensile) 強度

$$\sigma_3 = -T_0 \quad (33)$$

引っ張り応力が引っ張り強度  $T_0$  を越えると、最小主応力軸に直交する面で、材料を二つに分けるような引っ張り破壊がおこる

- 圧縮強度

一般に Coulomb の破壊基準を使って記述される

$$\tau = \tau_0 + \mu \sigma_n \quad (34)$$

$\mu$  内部摩擦係数;  $\tan \phi$

$\phi$  内部摩擦角

図 1.8 Mohr の応力円と、この破壊基準を示す

Mohr の応力円 (力の釣り合いの式より導ける)

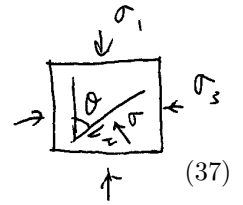
$$\left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (35)$$

図形から

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (36)$$

なる方向が破壊面となることがわかる。 $\sigma_1$  方向に関して両側に破壊が発生。

$$\mu = \tan \phi = \frac{BO}{AB}$$



なので、BO と AB を  $\sigma_1, \sigma_3, \tau_0, \mu$  を使って表し、上の式に代入して整理すると以下を得る。

$$\sigma_1 \left\{ \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right\} - \sigma_3 \left\{ \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right\} = 2\tau_0 \quad (38)$$

これは  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  面上で直線、 $\sigma_1$  軸との切片

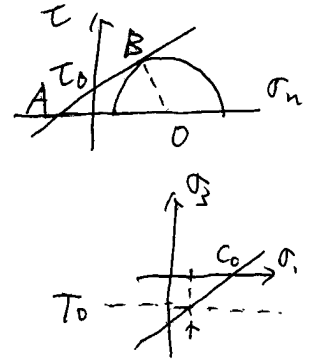
$$C_0 = 2\tau_0 \left\{ \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right\} \quad (39)$$

が 1 軸圧縮強度。

圧縮応力の破壊基準 (38) と引っ張り強度 (33) を組み合わせる:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \left\{ \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right\} - \sigma_3 \left\{ \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right\} &= 2\tau_0 & [\sigma_1 \geq C_0 (1 - C_0 T_0 / 4\tau_0^2) \text{ のとき}] \\ \sigma_3 &= -T_0 & [\sigma_1 < C_0 (1 - C_0 T_0 / 4\tau_0^2) \text{ のとき}] \end{aligned} \quad (40)$$

(Coulomb-based 基準; 実験式)



### Griffith のクラック伝播理論に基づく 2 次元の破壊基準

- 微視的な破壊のメカニズムに準拠 (理論的?)
- ただ一つの破壊基準で引っ張り・剪断破壊を両方同時に取り扱える

仮定: 巨視的な破壊は最もクリティカルな方向に向けた Griffith クラックから開始する (引っ張り応力最大の tensile crack)

方法: 2 軸応力場におかれた楕円クラックのまわりの応力場を解析

結果: (付録 I. 参照)

- 破壊基準

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8T_0(\sigma_1 + \sigma_3) &= 0 & (\sigma_1 \geq -3\sigma_3 \text{ のとき}) \\ \sigma_3 &= -T_0 & (\sigma_1 < -3\sigma_3 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (41)$$

- 対応する Mohr の包絡線

$$\tau^2 = 4T_0(\sigma_n + T_0) \quad (42)$$

- クリティカルなクラックの配向方向

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (43)$$

微視的 (理論的) なクラックのメカニズムから巨視的な破壊を予測。ただし圧縮状態では、ここで仮定された微視的なクラックメカニズムは間違っている (らしい)

### 修正 Griffith の破壊基準

Griffith の破壊基準 (41) は、十分な圧縮応力下ではクラックが閉じるという効果を見逃している。クラックが閉じた場合に働く摩擦力の効果を考慮し、Griffith の破壊基準を修正したのが McClintock and Walsh (1962) の基準。(付録 J. 参照)

仮定: 遠方で normal stress  $\sigma_y$  が  $\sigma_c$  を越えるとクラックが閉じる; 閉じたらクラック面の normal stress は  $\sigma_n = \sigma_y - \sigma_c$ ; 摩擦 stress  $\tau_f = \mu\sigma_n$  がクラック面のすべりを妨げる

破壊基準:

$$\left\{ \sqrt{1 - \mu^2} - \mu \right\} (\sigma_1 - \sigma_3) = 4T_0 \sqrt{1 + \sigma_c/T_0} + 2\mu(\sigma_3 - \sigma_c) \quad (44)$$

これに対応する Mohr の応力円:

$$\tau = 2T_0 \sqrt{1 + \sigma_c/T_0} + 2\mu(\sigma_n - \sigma_c) \quad (45)$$

Coulomb の基準と同様、 $\sigma_1 - \sigma_3$  または  $\tau$  と  $\sigma_n$  に線形関係を予測。  $\sigma_c$  が無視できるほど小さいときは

$$\left\{ \sqrt{1 - \mu^2} - \mu \right\} (\sigma_1 - \sigma_3) = 4T_0 + 2\mu\sigma_3 \quad (46)$$

$$\tau = 2T_0 + \mu\sigma_n \quad (47)$$

$\tau_0 = 2T_0$  のときには Coulomb の破壊基準と同じになり、 $\mu$  は既存のクラック壁に働く摩擦係数と見なせる。

図 1.9 は 3 つの破壊基準を比較。どの基準が適切かを実験データに基づいて区別することはできない。また、どれも破壊過程の複雑さを十分には記述できない。

参考文献

- A. H. Cottrell, The Mechanical Properties of Matter, Krieger, 1981.
- 有光隆, はじめての材料力学, 技術評論社, 1999.
- 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.
- J. C. Jaeger, N. G. W. Cook, Fundamentals of Rock Mechanics, 3rd ed., Chapman and Hall, 1979.

## 付録 A. Airy の応力関数

Airy stress function:  $U$  ( $\chi$  と書くことも多い)

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (48)$$

Compatibility equation (plane stress の場合)

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \quad (49)$$

$U$  を使って書くと

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2 U = 0 \quad (50)$$

## 付録 B. 円孔まわりの応力場

円筒座標

- 力の釣り合い

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (52)$$

- Airy の応力関数 (以下で (51), (52)) がみだされる

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\end{aligned}\tag{53}$$

- Compatibility

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 U = 0\tag{54}$$

## 円筒内の応力分布

$\theta$  依存性なし  $\rightarrow \sigma_{r\theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}$  の項は消える

(51) は

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0\tag{55}$$

(54) は

$$\frac{d^4 U}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 U}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dU}{dr} = 0\tag{56}$$

一般解:

$$\begin{aligned}U &= A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \\ \sigma_{rr} &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{r\theta} &= 0\end{aligned}\tag{57}$$

もし中心に円孔が無ければ  $A = B = 0$  であるべき ( $r = 0$  で発散してしまう)

円孔がある場合でも、 $B$  の項は dislocation に関する (らしい) ので、ここでは  $B = 0$ 。よって

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + 2C\end{aligned}\tag{58}$$

## 遠方の一様引っ張り応力による応力場

座標変換の式 (穴がない場合の応力分布)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma (1 - \cos 2\theta)\end{aligned}\tag{59}$$

これらを  $\theta$  に依存する部分と依存しない部分に分離:

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= \frac{1}{2} \sigma, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & \sigma'_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \sigma \\ \sigma''_{rr} &= \frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta, & \sigma''_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta, & \sigma''_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta\end{aligned}\tag{60}$$



$r \rightarrow \infty$  のときの応力分布と考えられる。

境界条件:

$$\sigma'_{rr} = \sigma'_{r\theta} = \sigma''_{rr} = \sigma''_{r\theta} = 0 \quad (r = r_0 \text{ のとき}) \quad (61)$$

$\sigma'$  は  $\theta$  によらないので、円筒の場合の解 (58) が当てはまる。境界条件より

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \\ \sigma'_{\theta\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

$\sigma''$  に関して

$$U'' = f(r) \cos 2\theta \quad (63)$$

とおいて試してみる。(53) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \left\{ r \frac{df(r)}{dr} - 4f(r) \right\} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{r^2} \sin 2\theta \left\{ r \frac{df(r)}{dr} - f(r) \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \cos 2\theta \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \end{aligned}$$

(59) とくらべてみて  $\theta$  に関する項は表現できている。(54) は以下のようになる。

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) f(r) = 0 \quad (64)$$

この一般解は

$$f(r) = Er^2 + Fr^4 + \frac{G}{r^2} + H \quad (65)$$

境界条件を考慮すると

$$E = \frac{\sigma}{4}, \quad F = 0, \quad G = -\frac{r_0^4}{4}\sigma, \quad H = \frac{r_0^2}{2}\sigma \quad (66)$$

$\sigma'$  と  $\sigma''$  を加えれば、円孔のまわりの応力場が求められる:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left\{ 1 - \frac{r_0^2}{r^2} + \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left\{ 1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

$r = r_0$  で 0 にならない成分は

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (68)$$

これは  $\theta = \pm\pi/2$  で最大値  $\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma$  となる。

## 付録 C. はりの弾性論

図 1.4 の状況は、右図のようなはりのたわみの問題を考えればよい。曲げモーメントを  $M$  とする。くさびのところで

$$M(c) = Fc \quad (69)$$

中立面と下面での幾何から伸び歪が計算できる。

$$\frac{\rho + y}{\rho} = \frac{(1 + \varepsilon)dx}{dx} \quad (70)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (71)$$

$y$  の位置での引っ張り応力は

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (72)$$

これを断面内で積分して  $M$  が出せる。

$$M = \int_A \sigma(y) dA \quad (73)$$

$$= \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho} \quad (74)$$

ここで  $I$  は断面 2 次モーメントで  $I \equiv \int_A y^2 dA$ 。この場合は

$$I = \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^1 y^2 dx dy \quad (75)$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} y^2 dy \quad (76)$$

$$= d^3/12 \quad (77)$$

(74) より

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (78)$$

(78) を (72) に代入して

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (79)$$

一方、はりのたわみの関係から

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad (80)$$

(78) に代入して

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) \quad (81)$$

$M(x) = Fx$  が成り立つので積分できて

$$y = \frac{F}{6EI} (x^3 - 3c^2 x + 2c^3) \quad (82)$$

$y$  の最大値は

$$y_{max} = \frac{Fc^3}{3EI} = h \quad (83)$$

これから

$$F = \frac{3EIh}{c^3}. \quad (84)$$

曲げ応力による単位体積あたりの歪エネルギーは

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2E} \left( \frac{My}{I} \right)^2 \quad (85)$$

はり全体に積分して

$$\begin{aligned}
 U_e = \int_V u dV &= \int_0^c \int_A \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dA dx \\
 &= \int_0^c \frac{M^2}{2EI} dx \\
 &= \frac{F^2}{2EI} \int_0^c x^2 dx \\
 &= \frac{F^2 c^3}{6EI} \\
 &= \frac{9E^2 I^2 h^2}{c^6} \frac{c^3}{6EI} \\
 &= \frac{3EIh^2}{2c^3} \\
 &= \frac{Eh^2 d^3}{8c^3}
 \end{aligned} \tag{86}$$

## 付録 D. 応力関数, 応力拡大係数

### Goursat の応力関数

$$U(x, y) = x \operatorname{Re} \phi(z) + y \operatorname{Im} \phi(z) + \operatorname{Re} \int^z \psi(z) dz \tag{87}$$

応力

$$\begin{aligned}
 (\sigma_y + \sigma_x)/2 &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) \\
 (\sigma_y - \sigma_x)/2 + i\tau_{xy} &= \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)
 \end{aligned} \tag{88}$$

変位

$$2G(u + iv) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{89}$$

ここで

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面ひずみ}) \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & (\text{平面応力}) \end{cases} \tag{90}$$

ねじりの応力関数

$$Gw = \operatorname{Re} \zeta(z) \tag{91}$$

### Westergaard の応力関数

$$\begin{aligned}
 Z_I(z) &= 2\phi'_I(z) \\
 Z_{II}(z) &= 2i\phi'_{II}(z)
 \end{aligned} \tag{92}$$

ここで微分・積分の関係にある解析関数を

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{Z}}_I(z)}{dz} = \widetilde{\widetilde{Z}}_I(z) \tag{93}$$

のように $\sim$ をつけて表すと

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \widetilde{\widetilde{Z}}_I(z) + y \operatorname{Im} \widetilde{\widetilde{Z}}_I(z) - y \operatorname{Re} \widetilde{\widetilde{Z}}_{II}(z) \tag{94}$$

応力

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Z_I & -y \operatorname{Im} Z'_I \\ \operatorname{Re} Z_I & +y \operatorname{Im} Z'_I \\ -y \operatorname{Re} Z'_I & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Im} Z_{II} & +y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ & -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \operatorname{Re} Z_{II} & -y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{pmatrix} \tag{95}$$

変位

$$2G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \widetilde{Z}_I & -y \operatorname{Im} Z_I \\ \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \widetilde{Z}_I & -y \operatorname{Re} Z_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \widetilde{Z}_{II} & +y \operatorname{Re} Z_{II} \\ -\frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \widetilde{Z}_{II} & -y \operatorname{Im} Z_{II} \end{pmatrix} \quad (96)$$

回転

$$2G\omega = \frac{\kappa+1}{2}(\operatorname{Im} Z_I - \operatorname{Re} Z_{II}) \quad (97)$$

ねじりの応力関数

$$Z_{III}(z) = i\zeta'(z) \quad (98)$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \zeta'(z) \quad (99)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Im} Z_{III}(z) \\ \operatorname{Re} Z_{III}(z) \end{Bmatrix} \quad (100)$$

一様応力場を与える応力関数

$z = x + iy$  によらず一様な応力分布  $\sigma_x = \sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty$  を与える Goursat の応力関数は (88) より  $z$  の一次式。  $A, B, \alpha_0, \beta_0$  を複素定数として

$$\phi(z) = Az + \alpha_0, \quad \psi(z) = Bz + \beta_0$$

となるが、これは応力場に影響を与えない付加的な項を含んでいるのでこれを除くと

$$\phi(z) = A'z, \quad \psi(z) = (B' + iB')z$$

を考えれば良い ( および ' はそれぞれ実部, 虚部を表す)。これらを (88) に代入すると

$$\frac{\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty}{2} = 2A', \quad \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + i\tau_{xy}^\infty = B' + iB'$$

となり、  $A', B', B'$  が決まる。結局

$$\phi(z) = \frac{\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty}{4}z, \quad \psi(z) = \left( \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + i\tau_{xy}^\infty \right)z \quad (101)$$

Westergaard の応力関数で表すと

$$Z_I(z) = \sigma_y^\infty, \quad Z_{II}(z) = \tau_{xy}^\infty + i(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)/2 \quad (102)$$

同様にモード III の場合、一様応力場  $\tau_{xz} = \tau_{xz}^\infty$  および  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^\infty$  を生じる応力関数は

$$\zeta(z) = (\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty)z, \quad \text{または} \quad Z_{III}(z) = \tau_{yz}^\infty + i\tau_{xz}^\infty \quad (103)$$

で与えられる。

クラック先端近傍の応力・変位の一般解

モード I および II

$\lambda_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) を実数の固有値とし、  $A_n = A_{In} + iA_{IIn}$ ,  $B_n = B_{In} + iB_{IIn}$  を複素係数とする。

$$\phi(z) = \sum_n A_n z^{\lambda_n}, \quad (104)$$

$$\psi(z) = \sum_n B_n z^{\lambda_n} \quad (105)$$

と表されるとする。応力を求める式 (88) に現れる関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \sum_n A_n \lambda_n r^{\lambda_n - 1} e^{i(\lambda_n - 1)\theta} \\ \overline{\phi'(z)} &= \sum_n \overline{A_n} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} e^{-i(\lambda_n - 1)\theta} \\ \phi''(z) &= \sum_n A_n \lambda_n (\lambda_n - 1) r^{\lambda_n - 2} e^{i(\lambda_n - 2)\theta} \\ \psi'(z) &= \sum_n B_n \lambda_n r^{\lambda_n - 1} e^{i(\lambda_n - 1)\theta}\end{aligned}$$

(88) の 1 式と 2 式の和をとって  $\sigma_x$  を消去

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \sum_n \lambda_n r^{\lambda_n - 1} [A_n + B_n + (\lambda_n - 1)A_n e^{2i\theta} e^{i(\lambda_n - 1)\theta} + \overline{A_n} e^{-i(\lambda_n - 1)\theta}]$$

クラック内面での境界条件から、 $\theta = \pi, -\pi$  のとき、 $r$  によらず  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。それぞれの場合を書くと

$$(\lambda_n A_n + B_n) e^{i\pi\lambda_n} + \overline{A_n} e^{-i\pi\lambda_n} = 0 \quad (106)$$

$$(\lambda_n A_n + B_n) e^{-i\pi\lambda_n} + \overline{A_n} e^{i\pi\lambda_n} = 0 \quad (107)$$

$A_n, B_n$  がともに 0 以外の解を持つためには

$$\begin{vmatrix} e^{i\pi\lambda_n} & e^{-i\pi\lambda_n} \\ e^{-i\pi\lambda_n} & e^{i\pi\lambda_n} \end{vmatrix} = 0$$

よって固有方程式は  $\sin 2\pi\lambda_n = 0$  であり、固有値は

$$\lambda_n = n/2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

このうち、 $n \leq 0$  のときは解として不適。結局固有値は

$$\lambda_n = n/2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (108)$$

(107) にこの固有値を代入すれば

$$B_n = -\frac{n}{2} A_n - (-1)^n \overline{A_n} = 0$$

以上より (88) によって応力を計算すれば以下を得る。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{In} \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \{2 + (-1)^n + \frac{n}{2}\} \cos(\frac{n}{2} - 1)\theta - (\frac{n}{2} - 1) \cos(\frac{n}{2} - 3) \\ \{2 - (-1)^n - \frac{n}{2}\} \cos(\frac{n}{2} - 1)\theta + (\frac{n}{2} - 1) \cos(\frac{n}{2} - 3) \\ -\{(-1)^n + \frac{n}{2}\} \sin(\frac{n}{2} - 1)\theta + (\frac{n}{2} - 1) \sin(\frac{n}{2} - 3) \end{bmatrix} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{IIIn} \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \{2 - (-1)^n + \frac{n}{2}\} \sin(\frac{n}{2} - 1)\theta - (\frac{n}{2} - 1) \sin(\frac{n}{2} - 3) \\ \{2 + (-1)^n - \frac{n}{2}\} \sin(\frac{n}{2} - 1)\theta + (\frac{n}{2} - 1) \cos(\frac{n}{2} - 3) \\ -\{(-1)^n - \frac{n}{2}\} \cos(\frac{n}{2} - 1)\theta - (\frac{n}{2} - 1) \cos(\frac{n}{2} - 3) \end{bmatrix} \quad (109)$$

変位も (89) により

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{In}}{2G} \right) r^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \kappa \cos \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2)\theta + \{\frac{n}{2} + (-1)^n\} \cos \frac{n\theta}{2} \\ \kappa \sin \frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \sin(\frac{n}{2} - 2)\theta - \{\frac{n}{2} + (-1)^n\} \sin \frac{n\theta}{2} \end{bmatrix} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{IIIn}}{2G} \right) r^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \kappa \sin \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \sin(\frac{n}{2} - 2)\theta + \{\frac{n}{2} - (-1)^n\} \sin \frac{n\theta}{2} \\ -\kappa \cos \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2)\theta - \{\frac{n}{2} - (-1)^n\} \cos \frac{n\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$A_{II} = K_I / \sqrt{2\pi}, \quad A_{III} = -K_{II} / \sqrt{2\pi} \quad (111)$$

と置き換えれば応力拡大係数になる。クラック近傍では  $n = 1$  の項のみをとれば、

• モード I

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (112)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{Bmatrix} \quad (113)$$

• モード II

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (114)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ -\cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{Bmatrix} \quad (115)$$

モード III

$$\zeta(z) = \sum_n C_n z^{\lambda_n} \quad (116)$$

とにおいて同様にすると

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^* r^{n/2-1} \begin{Bmatrix} \sin(n/2-1)\theta \\ \cos(n/2-1)\theta \end{Bmatrix} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^* r^{n/2-1} \begin{Bmatrix} \cos(n/2-1)\theta \\ \sin(n/2-1)\theta \end{Bmatrix} \quad (117)$$

$C_1^* = \sqrt{2/\pi} K_{III}$  とおけば応力拡大係数が得られ、near field では  $n = 1$  の項のみをとれば

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (118)$$

変位  $w$  は (91) より

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (119)$$

## 付録 E. エネルギー解放レートと応力拡大係数の関係

図 4.4(a) のように変位固定の境界条件を考える。クラックが  $\delta a$  伸びる (面積変化  $\delta A$ ) と、グラフ上の点 a から点 c' への移動に伴うポテンシャルエネルギーの解放量  $\mathcal{G}\delta A$  は歪エネルギーの解放量に等しい。

この過程を二つの過程に分けて考える:

1. クラック先端に  $\delta A$  の切込みを入れる。それ以前に面に加わっていた応力をそのまま保つように面に外力を作用させ、 $\delta A$  の面が閉じたままにしておく。
2. 面に作用させておいた力を徐々に 0 にし、新しいクラック面を開かせる。

歪エネルギーの変化は 2. の過程で生じるので、ここでの変化を追えばよい。

クラック成長前  $y = 0$  ( $\theta = 0$ ) の面に作用している応力は、この時の応力拡大係数を  $K_I(A)$  とすると (112) より

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I(A)}{\sqrt{2\pi x}} \quad (120)$$

のみ。厚さ  $\delta B$  の部分が  $x$  方向に  $\delta a$  だけクラックが進展したとき ( $\delta A = \delta B \delta a$ )、 $K_I = K_I(A + \delta A)$  とかくと、クラック内面の変位は (113) で  $\theta = \pm\pi$ ,  $r = \delta a - x$  とおくことにより

$$v(x) = \pm \frac{\kappa + 1}{2G} K_I(A + \delta A) \sqrt{\frac{\delta a - x}{2\pi}} \quad (121)$$

図 4.5 (c) のように任意の  $x$  における  $\sigma_y(x)$  と  $v(x)$  との関係は直線的に変化する。ここで弾性体は外に対して仕事をす。この分が歪エネルギーとして解放される。

クラックの上面・下面でなされる仕事は

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \delta B \delta a &= 2\delta B \int_0^{\delta a} \frac{\sigma_y v}{2} \delta B dx \\ &= \frac{\delta B}{2\pi} K_I(A) K_I(A + \delta A) \frac{\kappa + 1}{G} \int_0^{\delta a} \sqrt{\frac{\delta a - x}{x}} dx \end{aligned}$$

ここで公式集より (変数変換  $x = \delta a \sin^2 \theta$ )

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta a} \sqrt{\frac{\delta a - x}{x}} dx &= \left[ \sqrt{-x(x - \delta a)} + \delta a \arcsin \sqrt{\frac{x}{x + \delta a}} \right]_0^{\delta a} \\ &= \frac{\pi}{2} \delta a \end{aligned} \quad (122)$$

なので、結局

$$\mathcal{G} \delta B \delta a = \frac{\kappa + 1}{8G} \delta B \delta a K_I(A) K_I(A + \delta A) \quad (123)$$

$\delta a \rightarrow 0$  では

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8G} K_I^2 \quad (124)$$

または

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} K_I^2, \quad \text{ただし、} \quad E' = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1 - \nu^2) & (\text{平面歪}) \end{cases} \quad (125)$$

他の変形モードもある一般の場合は

$$\mathcal{G} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} (\sigma_y v + \tau_{xy} u + \tau_{yz} w) dx \quad (126)$$

(112) ~ (119) を代入すれば

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (127)$$

これを 3 つの成分に分け、

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} + \mathcal{G}_{III}, \quad (128)$$

$$\mathcal{G}_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad \mathcal{G}_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad \mathcal{G}_{III} = \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2$$

と書ける。

## 付録 F. 遠方の一様応力がかかっている場合の応力拡大係数

まず

$$\begin{Bmatrix} Z_I(z) \\ Z_{II}(z) \\ Z_{III}(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ \tau_{yz}^\infty \end{Bmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (129)$$

を Westergaard の応力関数と考えるとき、これがどのような問題の解になっているかを考える。以下  $Z_1(z)$  について計算する (他も同様なので)。

積分定数を無視すれば、 $Z_1(z)$  の積分は

$$\widetilde{Z}_1(z) = \sigma_y^\infty (z^2 - a^2)^{1/2} \quad (130)$$

微分は

$$Z_1'(z) = -\sigma_y^\infty a^2 (z^2 - a^2)^{-3/2} \quad (131)$$

図のような極座標を取るのが便利。

$$z = re^{i\theta}, \quad z - a = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\theta_2}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{Z_1(z)}{\sigma_y^\infty} &= \frac{re^{i\theta}}{(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2})^{1/2}} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\{\theta - (\theta_1 + \theta_2)/2\}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (132)$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{Z_1'(z)}{\sigma_y^\infty} &= -\frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} e^{i\{3(\theta_1 + \theta_2)/2\}} \\ &= -\frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[ \cos\left\{\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right\} - i \sin\left\{\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right\} \right] \end{aligned} \quad (133)$$

$y = r \sin \theta$  を考慮して (95) に代入すれば、応力分布は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_y^\infty r}{\sqrt{r_1 r_2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \quad (134)$$

さらに

$$\frac{\widetilde{Z}_1(z)}{\sigma_y^\infty} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} = \sqrt{r_1 r_2} \left[ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right] \quad (135)$$

であるから、変位は (96) より:

$$2G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sigma_y^\infty \sqrt{r_1 r_2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa - 1}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\ \frac{\kappa + 1}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (136)$$

これらはどのような問題の解となっているか？

- 十分遠方

$$r \gg a, \quad r_1 = r_2 = r, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \sigma_x = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0$$

- クラックの上下面

$$\theta = 0, \pm\pi, \quad \theta_1 + \theta_2 = \pm\pi \quad \rightarrow \quad \text{全ての応力} = 0$$



よって (129) の応力関数  $Z_I(z)$  は、十分遠方で一様な全方向引っ張り ( $\sigma_y = \sigma_x = \sigma_y^\infty$ ) を受ける内面自由なクラックの解、である。同様に (129) の  $Z_{II}(z)$ ,  $Z_{III}(z)$  はそれぞれ  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^\infty$  なる一様応力場におかれた内面自由なクラックの解。

一般に (112), (114), (118) と

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{平面歪}) \quad (137)$$

で、x 軸上 ( $\theta = 0$ ) における応力は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\nu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし上式は  $\sigma_z$  に関しては平面歪の場合であり、平面応力の場合は  $\sigma_z = 0$ 。これから、クラック先端での応力拡大係数は

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{pmatrix} \sigma_y, \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}_{\theta=0} \quad (138)$$

今の問題の場合は

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (139)$$

で求められる。

一様な応力  $\sigma_x = \sigma_x^\infty$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{xz}^\infty$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^\infty$  (残った応力成分) がさらに加わった場合でも、クラック内面の  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  に関する境界条件は乱さず、応力拡大係数は変化しない。すなわち一般の応力場  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy}^\infty$ ,  $\tau_{xz}^\infty$ ,  $\tau_{yz}^\infty$  中におかれた内面自由なクラックに対する応力関数は ( $\sigma_z^\infty$  は明らかに影響を及ぼさない)、(102), (103) をさらに重ね合わせることにより

$$\begin{pmatrix} Z_I(z) \\ Z_{II}(z) \\ Z_{III}(z) \end{pmatrix} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \begin{pmatrix} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ \tau_{yz}^\infty \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)/2 \\ \tau_{xz}^\infty \end{pmatrix} \quad (140)$$

となる。これらを (95), (100) に代入すれば応力場が得られる。特に x 軸上での応力分布は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{|x|}{\sqrt{z^2 - a^2}} \begin{pmatrix} \sigma_y^\infty \\ \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ 0 \\ \tau_{yz}^\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xz}^\infty \\ 0 \end{pmatrix} \quad (141)$$

となる。クラック先端での応力拡大係数は (139) で求められるから

$$K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{III} = \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (142)$$

となる。 $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_z^\infty$ ,  $\tau_{xz}^\infty$  は応力拡大係数には影響を及ぼさない。

## 付録 G. 曲線座標系 (Curvilinear coordinates)

以下の複素数の変換を考える:

$$z = \omega(\zeta) \quad (143)$$

ここで  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ .  $\zeta$  平面上の点  $P'$  ( $\xi_0, \eta_0$ ) は  $z$  平面上の点  $P$  ( $x_0, y_0$ ) に対応する。直線  $\eta = \eta_0$  (const.) は曲線  $PA$  に対応し、その傾きは

$$dx + idy = dz = \omega'(\zeta)d\zeta = \omega'(\zeta)[d\xi + id\eta] \quad (144)$$

$$= M e^{i\delta} [d\xi + id\eta] \quad (145)$$

ここで

$$e^{2i\delta} = \omega'(\zeta) / \overline{\omega'(\zeta)} \quad (146)$$

(145) で  $d\eta = 0$  のとき、 $P'A'$  に対応する  $P\xi$  の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \tan \delta \quad (147)$$

同様に  $\xi = \xi_0$  (const.) は  $z$  平面上の曲線に対応し、線  $P\eta$  の点  $P$  での傾きは (145) で  $d\xi = 0$  とすることにより

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \delta \quad (148)$$

つまり  $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$  に対応する  $z$  平面上の曲線は、全ての点で垂直に交わる。

座標変換 (回転)

• 応力

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \quad (149)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \cos^2 \theta \quad (150)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (151)$$

• 変位

$$u' = u \cos \theta + v \sin \theta \quad (152)$$

$$v' = v \cos \theta - u \sin \theta$$

(149), (150), (151) より

$$\sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\theta} \quad (153)$$

trace 不変

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (154)$$

(152) より

$$u' + iv' = (u + iv) e^{-i\theta} \quad (155)$$

これらと (88), (89) より

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y = 2 \left[ \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\delta} \\ &= 2 \left[ \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right] \left[ \omega'(\zeta) / \overline{\omega'(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (157)$$

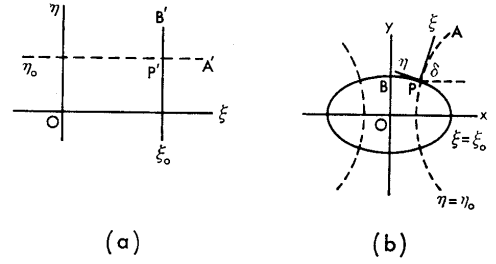


Fig. 10.10

$$\begin{aligned}
2G(u_\xi + iu_\eta) &= 2G(u + iv)e^{-i\delta} \\
&= \left[ \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right] \sqrt{\omega'(\zeta)/\omega'(z)}
\end{aligned} \tag{158}$$

ここで微分は例えば

$$\phi'(z) = \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\omega'(z)} \frac{d\phi}{d\zeta} \tag{159}$$

例として楕円座標 (elliptic coordinates) を考える。この時 (143) は

$$z = x + iy = c \cosh \zeta = c \cosh(\xi + i\eta) \tag{160}$$

よって

$$\begin{aligned}
x &= c \cosh \xi \cos \eta \\
y &= c \sinh \xi \sin \eta
\end{aligned} \tag{161}$$

$\xi = \xi_0$  (const.) のとき、x-y 平面上の対応する曲線は楕円になる。

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi_0} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi_0} = 1 \tag{162}$$

semi-axes は

$$a = c \cosh \xi_0, \quad b = c \sinh \xi_0 \tag{163}$$

これは  $\xi_0 = 0$  のとき、 $x = -c$  から  $x = c$  までの slit になる。

同様に曲線  $\eta = \eta_0$  (const.) は双曲線

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta_0} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta_0} = 1 \tag{164}$$

となる。

## 付録 H. 楕円孔まわりの応力場

(161), (162), (163) で見たような楕円座標を考える。 $\xi = \xi_0$  の穴が開いている。図 10.11.1(a) のように長軸 Ox からの角度  $\beta$  の一軸圧縮応力  $p_2$  のもとでの応力関数は以下で与えられる:

$$\phi(z) = \frac{1}{4}p_2ce^{2\xi_0} \cos 2\beta \cosh \zeta + \frac{1}{4}p_2c(1 - e^{2\xi_0+2i\beta}) \sinh \zeta \tag{165}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{4}p_2c [\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta + e^{2\xi_0} \sinh 2(\zeta - \xi_0 - i\beta)] \operatorname{cosech} \zeta \tag{166}$$

ここで  $z$  と  $\zeta$  は

$$z = \omega(\zeta) = c \cosh \zeta \tag{167}$$

で関係づけられるので、

$$\frac{dz}{d\zeta} = \omega'(\zeta) = c \sinh \zeta. \tag{168}$$

(165), (166) が無限遠とクラック面  $\xi = \xi_0$  での境界条件を満たしていることを示すことができる。(168) を使えば、

$$\phi'(z) = \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{4}p_2e^{2\xi_0} \cos 2\beta + \frac{1}{4}p_2(1 - e^{2\xi_0+2i\beta}) \coth \zeta \tag{169}$$

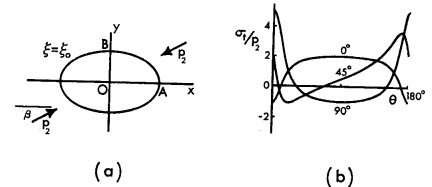


Fig. 10.11.1 (a) Elliptic hole with stress  $p_2$  at infinity. (b) The variation of the tangential surface stress  $\sigma_t$  with polar angle  $\theta$ ; numbers on the curves are the values of the angle  $\beta$  between  $p_2$  and the major axis.  $a = 2b$ .

クラック表面での引っ張り応力  $\sigma_t$  は、 $\sigma_\xi = 0, \sigma_t = \sigma_\eta$ , (169), (156) より

$$\begin{aligned}\sigma_t &= 2\{\phi'(\xi_0 + i\eta) + \phi'(\xi_0 - i\eta)\} \\ &= p_2 e^{2\xi_0} \cos 2\beta + \frac{1}{2} p_2 (1 - e^{2\xi_0 + 2i\beta}) \coth(\xi_0 + i\eta) + \frac{1}{2} p_2 (1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta}) \coth(\xi_0 - i\eta) \\ &= p_2 e^{2\xi_0} \cos 2\beta + p_2 \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - p_2 e^{2\xi_0} \frac{\cos 2\beta \sinh 2\xi_0 + \sin 2\beta \sin 2\eta}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} \\ &= p_2 \frac{\sinh 2\xi_0 + \cos 2\beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta)}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}\end{aligned}\quad (170)$$

$$= p_2 \frac{2ab + (a^2 - b^2) \cos 2\beta - (a + b)^2 \cos 2(\beta - \eta)}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\eta}\quad (171)$$

(171) の楕円座標  $\eta$  は、極座標  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  と以下のように関係づけられる。((161), (163) を使う)

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \tanh \xi_0 \tan \eta = \frac{b}{a} \tan \eta\quad (172)$$

例として  $\beta = 0$  の場合:

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{A}} \text{ 長軸の端 A } (\theta = \eta = 0) \quad \sigma_t &= -p_2 \\ \textcircled{\text{B}} \text{ 短軸の端 B } (\theta = \eta = \pi/2) \quad \sigma_t &= \left(1 + \frac{2b}{a} p_2\right)\end{aligned}$$

$\beta = \pi/2$  の場合:

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{A}} \text{ A } (\theta = \eta = 0) \quad \sigma_t &= \left(1 + \frac{2b}{a} p_2\right) \\ \textcircled{\text{B}} \text{ B } (\theta = \eta = \pi/2) \quad \sigma_t &= -p_2\end{aligned}$$

flat elliptic crack ( $\xi_0 = 0$ )

$\alpha = (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^{-1}$  とおく。(156), (169) 等を使うと

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = p_2 \cos 2\beta + \alpha p_2 \{(1 - 2 \cos 2\beta) \sinh 2\xi - \sin 2\beta \sin 2\eta\}\quad (173)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\xi - \sigma_\eta &= \alpha p_2 \cosh 2\xi \cos 2(\eta - \beta) + \alpha^2 p_2 \{(1 - 2 \cos 2\beta)(\cos 2\eta - 1) \sinh 2\xi \\ &\quad - \cosh 2\xi \cos 2\beta + \cos 2(\eta - \beta) - \cosh 2\xi \sin 2\beta \sin 2\eta\}\end{aligned}\quad (174)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} p_2 \alpha \sinh 2\xi \sin 2(\beta - \eta) + \frac{1}{2} p_2 \alpha^2 \{\sinh 2\xi \sin 2\beta (\cos 2\eta - 1) \\ &\quad + (1 - \cos 2\beta)(\cosh 2\xi - 1) \sin 2\eta\}\end{aligned}\quad (175)$$

変位

(158) を使って楕円座標で  $u_\xi$  と  $u_\eta$  を求めるか、(89) すなわち

$$2G(u + iv) = \kappa \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}\quad (176)$$

によって  $x-y$  座標で求めることができる。ここでは  $\xi_0$  が小さい場合 ( $\xi_0^2$  が無視できる) の flat crack を考える。 $p_2$  は crack に直交する向き。このとき (165), (166) は

$$\phi(z) = -\frac{1}{4} p_2 c [e^{2\xi_0} \cosh \zeta - (1 + e^{2\xi_0}) \sinh \zeta]\quad (177)$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{4} p_2 c [1 + \cosh 2\xi_0 - e^{2\xi_0} \sinh 2(\zeta - \xi_0)] \operatorname{cosech} \zeta\quad (178)$$

$$\phi'(z) = -\frac{1}{4} p_2 [e^{2\xi_0} - (1 + e^{2\xi_0}) \coth \zeta]\quad (179)$$

これらを使うと (176) は

$$\begin{aligned}\frac{8G(u + iv)}{cp_2} &= -\kappa e^{2\xi_0} \cosh \zeta + \kappa (1 + e^{2\xi_0}) \sinh \zeta + [e^{2\xi_0} - (1 + e^{2\xi_0}) \coth \bar{\zeta}] \cosh \zeta \\ &\quad + [1 + \cosh 2\xi_0 - e^{2\xi_0} \sinh 2(\bar{\zeta} - \xi_0)] \operatorname{cosech} \bar{\zeta}\end{aligned}\quad (180)$$

flat crack 表面の変位は、 $\xi = \xi_0 = 0, \zeta = i\eta, \cos \eta = x/c$  を (180) に代入して

$$v = [(\kappa + 1)p_2/4G] \sqrt{c^2 - x^2} \quad (181)$$

軸 O-y 上では  $\eta = \pi/2, \zeta = \xi + \frac{\pi}{2}i, \sinh \zeta = i \cosh \xi, \cosh \zeta = i \sinh \xi$ , さらに (180) は  $u = 0$  を与える。

$$\begin{aligned} \frac{8G(u + iv)}{cp_2} &= -\kappa e^{2\xi_0} \sinh \xi + \kappa(1 + e^{2\xi_0}) \cosh \xi + [e^{2\xi_0} - (1 + e^{2\xi_0}) \tanh \xi] \sinh \xi \\ &+ [1 + \cosh 2\xi_0 + e^{2\xi_0} \sinh 2(\xi - \xi_0)] \operatorname{sech} \xi \end{aligned} \quad (182)$$

$\xi_0^2$  を無視すると

$$\begin{aligned} \frac{8G(u + iv)}{cp_2} &= \kappa(2 \cosh \xi - \sinh \xi) + 3 \sinh \xi - 2 \cosh \xi \\ &+ 4 \operatorname{sech} \xi + 2\xi_0 [\kappa(\cosh \xi - \sinh \xi) + 3 \sinh \xi - 3 \cosh \xi + 2 \operatorname{sech} \xi] \end{aligned} \quad (183)$$

ここで  $\eta = \pi/2$  と (161) によって

$$\sinh \xi = y/c, \quad \cosh \xi = \sqrt{1 + (y^2/c^2)}, \quad (184)$$

これらを (183) に適用すると

$$\begin{aligned} \frac{8G(u + iv)}{cp_2} &= (3 - \kappa) \frac{y}{c} + 2(\kappa - 1) \sqrt{1 + (y^2/c^2)} + \frac{4}{\sqrt{1 + (y^2/c^2)}} \\ &+ 2\xi_0 \left\{ (3 - \kappa) \frac{y}{c} + (\kappa - 3) \sqrt{1 + (y^2/c^2)} + \frac{2}{\sqrt{1 + (y^2/c^2)}} \right\} \end{aligned} \quad (185)$$

平面応力状態 ( $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ) では

$$v = \frac{cp_2}{E} \left\{ \frac{\nu y}{c} + (1 - \nu) \sqrt{1 + \frac{y^2}{c^2}} + \frac{1 + \nu}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{c^2}}} \right\} + \frac{c\xi_0 p_2}{E} \left[ -2\nu \left( \sqrt{1 + \frac{y^2}{c^2}} - \frac{y}{c} \right) + \frac{1 + \nu}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{c^2}}} \right] \quad (186)$$

$p_2$  が正 (圧縮) ならクラックは閉じ、 $y = b \simeq c\xi_0$  の点での変位は  $v = c\xi_0$  となる。この時 (185) は、 $y/c = \xi_0$  かつ  $\xi_0^2$  を無視すれば

$$p_2 = \frac{4G\xi_0}{\kappa + 1} \quad (187)$$

無限遠での主応力が  $\beta$  の方向で  $\sigma_2$ 、 $\frac{\pi}{2} + \beta$  の方向に  $\sigma_1$  であるとき、この解は

$$\sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \frac{4G\xi_0}{\kappa + 1} \quad (188)$$

## 付録 I. Griffith の巨視的破壊基準

楕円の長軸短軸:

$$a = c \cosh \xi_0, \quad b = c \sinh \xi_0$$

(付録 H. 参照)

$\sigma_1, \sigma_2$  を図 10.13 のようにとる。これらは

$$\sigma_x = \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_2 \cos^2 \beta \quad (189)$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta \quad (190)$$

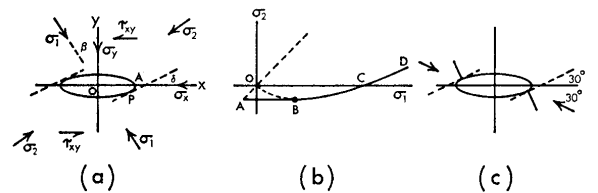


Fig. 10.13

のような成分でも書ける。(170) を  $\sigma_1, \sigma_2$  に関して重ね合わせることにより

$$\sigma_t = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \sinh 2\xi_0 + (\sigma_1 - \sigma_2) [e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta) - \cos 2\beta]}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta} \quad (191)$$

あるいは (189), (190) を使って

$$\sigma_t = \frac{2\sigma_y \sinh 2\xi_0 + 2\tau_{xy} [(1 + \sinh 2\xi_0) \cot 2\beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta) \operatorname{cosec} 2\beta]}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta} \quad (192)$$

$\xi_0$  が小さく (flat crack)、かつ  $\eta$  が小さいとき、端点 A 近くに相当するが、

$$\sigma_t = \frac{2(\xi_0 \sigma_y - \eta \tau_{xy})}{\xi_0^2 + \eta^2} \quad (193)$$

次に  $\eta$  の関数として  $\sigma_t$  の最大・最小値を探す。(193) を微分し、 $d\sigma_t/d\eta = 0$  とおくことにより

$$\eta^2 \tau_{xy} - 2\eta \xi_0 \sigma_y - \xi_0^2 \tau_{xy} = 0 \quad (194)$$

$$\text{or } \eta = \xi_0 \frac{\sigma_y \pm \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}}{\tau_{xy}} \quad (195)$$

(195) を (193) に代入すれば、その点で最大・最小となる  $\sigma_t$  の値がわかる。

$$\xi_0 \sigma_t = \sigma_y \mp \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2} \quad (196)$$

ここで符号が負のとき、 $\sigma_t$  が tensile となる。この tensile stress で材料が壊れると仮定している。最大ひっぱり応力  $\sigma_e$  は

$$\xi_0 \sigma_e = \sigma_y - \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2} \quad (197)$$

$$= (\sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta) - \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \beta + \sigma_2^2 \sin^2 \beta} \quad (198)$$

となり、これは  $\eta$  が

$$\frac{\eta}{\xi_0} = \frac{\sigma_y + \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}}{\tau_{xy}} \quad (199)$$

$$= \frac{2(\sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta) + \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \beta + \sigma_2^2 \sin^2 \beta}}{(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\beta} \quad (200)$$

のとき実現する。

次に (198) の  $\sigma_e$  を最大とするような  $\sigma_1, \sigma_2$  の方向  $\beta$  を探す。(198) を微分して

$$\xi_0 \frac{d\sigma_e}{d\beta} = \left( 2\sigma_2 - 2\sigma_1 + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \beta + \sigma_2^2 \sin^2 \beta}} \right) \sin \beta \cos \beta \quad (201)$$

これは  $\beta = 0, \pi/2$ , もしくは

$$\cos 2\beta = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (202)$$

のときに 0 となる。(202) の位置は  $|\cos 2\beta| < 1$  のときだけ存在する。ゆえに

$$\sigma_1 + 3\sigma_2 > 0. \quad (203)$$

(202) を (198) にいれると、値は

$$\sigma_e = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4(\sigma_1 + \sigma_2)\xi_0} \quad (204)$$

となる。もし  $\sigma_2$  が負なら (203) は成り立たない。この場合は (198), (200) または (191) から、 $\beta = \pi/2$  のときクラック表面で最大引っ張り応力

$$\sigma_e = \frac{2\sigma_2}{\xi_0} \quad (205)$$

をとる。

この tensile stress が、ある閾値を越えたら破壊がおこると仮定する。クラック面に垂直な一軸引っ張りの場合、 $T_0$  を一軸引っ張り強度とすると、(205),  $\sigma_2 = -T_0$  から  $\sigma_e = -2T_0/\xi_0$  が与えられ、これを (204) に適用すると

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 8T_0(\sigma_1 + \sigma_2) &= 0 & (\sigma_1 \geq -3\sigma_2 \text{ のとき}) \\ \sigma_2 &= -T_0 & (\sigma_1 < -3\sigma_2 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (206)$$

$\sigma_2 = 0$  のときの  $\sigma_1 = C_0$  とすると

$$C_0 = 8T_0 \quad (207)$$

$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ ,  $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  とおくと (206) は

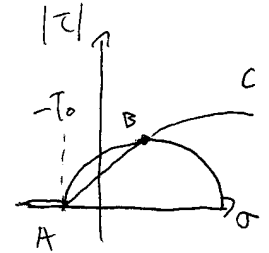
$$\begin{aligned} \tau_m^2 &= 4T_0\sigma_m & (\text{if } 2\sigma_m > \tau_m) \\ \tau_m &= \sigma_m + T_0 & (\text{if } 2\sigma_m < \tau_m) \end{aligned} \quad (208)$$

図の放物線 BC に接する Mohr 円をさがす。中心が  $(\sigma_m, 0)$  で半径  $\tau_m$  の円は (208) の 1 式より

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 &= \tau_m^2 \\ \Leftrightarrow (\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 &= 4T_0\sigma_m \end{aligned} \quad (209)$$

$f(\sigma_m) = (\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 - 4T_0\sigma_m$  とおく。つねに  $f(\sigma_m) = 0$ , また  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 0$  より

$$\sigma - \sigma_m + 2T_0 = 0 \quad (210)$$



(209), (210) より

$$\tau^2 = 4T_0(\sigma + T_0) \quad (211)$$

以上で envelope の式が導けた。

## 付録 J. 修正 Griffith 理論

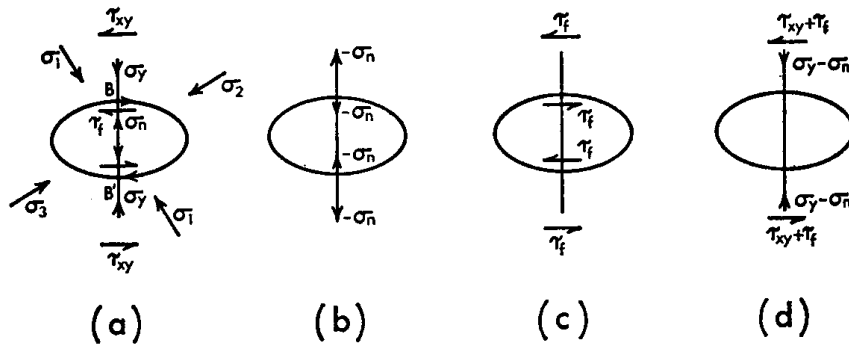


Fig. 10.14

付録 I. の理論は引っ張りの条件には適用できるが、圧縮条件下ではクラックが閉じる。式 (188)

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \frac{4G\xi_0}{\kappa + 1} \quad (212)$$

がクラック面に働く法線応力。クラックが閉じたとき、クラック面の変位は面がすべることによるもののみ。このとき摩擦によってすべりに対する抗力が働く。

$\sigma_c$  (無限遠) がクラックを閉じるのに必要と仮定する。このとき、閉じたクラック面にかかる法線応力は  $\sigma_n = \sigma_y - \sigma_c$ 、摩擦力  $\tau_f = \mu\sigma_n$ 、方向はすべりと反対にとる必要がある。座標系の取り方は図 10.14(a)。  $\tau_{xy}$  は負値をとる。実際の動きは図の点 B, B' の矢印の方向、  $\tau_f$  はそれと反対方向。

図 (b),(c) のように、ここに一様引っ張り応力  $-\sigma_n$  と一様 shear  $\tau_f$  が重ね合わされたら、遠方での法線応力は  $\sigma_y - \sigma_n = \sigma_c$ 、shear stress は  $\tau_{xy} + \tau_f = \tau_{xy} + \mu(\sigma_y - \sigma_c)$  となり、クラック面では 0 となる (図 (d))。

この (b),(c) のような一様な応力は、同じ場合のクラック先端での応力にくらべると小さいので、クラック先端近傍を見る場合は無視できる。このとき、クラック先端近傍の応力は、図 (a) と (d) では同じになる。そして (193) 式でクラック面での接線方向の応力  $\sigma_t$  が計算できる。

$$\sigma_t = \frac{2\xi_0\sigma_c - 2\eta\{\tau_{xy} + \mu(\sigma_y - \sigma_c)\}}{\xi_0^2 + \eta^2} \quad (213)$$

$$= \frac{2\xi_0\sigma_c + \eta\sigma^*}{\xi_0^2 + \eta^2} \quad (214)$$

ここで (189), (190) を使った。また

$$\sigma^* = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sin 2\beta - \mu \cos 2\beta) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_c) \quad (215)$$

(214) を  $\eta$  で微分すれば、  $\sigma_t$  が

$$\frac{\eta}{\xi_0} = \frac{-2\sigma_c \pm \sqrt{4\sigma_c^2 + \sigma^{*2}}}{\sigma^*} \quad (216)$$

のとき最大・最小値をとることがわかる。これを (214) に代入してその値  $\sigma_e$  が以下のように求められる:

$$\frac{2\sigma_c \pm \sqrt{4\sigma_c^2 + \sigma^{*2}}}{2\xi_0}. \quad (217)$$

引っ張り応力を調べているので、(217) でマイナスの符号を選ぶ。  $\beta$  の関数としての  $\sigma_e$  の最大値は  $d\sigma^*/d\beta = 0$  から計算でき ((215) 式)、

$$\tan 2\beta = -\frac{1}{\mu}. \quad (218)$$

このとき、

$$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad \cos 2\beta = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad (219)$$

(205) と同様にして、(217) の最大の負値は  $\sigma_e = -2T_0/\xi_0$  ( $T_0$  は一軸引っ張り強度)。 (217) より

$$\begin{aligned} \sqrt{4\sigma_c^2 + \sigma^{*2}} - 2\sigma_c &= 2T_0 \\ \text{or } \sigma^* &= 4T_0\sqrt{1 + \sigma_c/T_0} \end{aligned}$$

(219) を (215) に適用して

$$\sigma_1 \left[ \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right] - \sigma_2 \left[ \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right] = 4T_0\sqrt{1 + \sigma_c/T_0} - 2\mu\sigma_c \quad (220)$$

もし  $\sigma_c$  を無視すれば

$$\sigma_1 \left[ \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right] - \sigma_2 \left[ \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right] = 4T_0 \quad (221)$$

に reduce する。これは Coulomb 基準 (40) である。



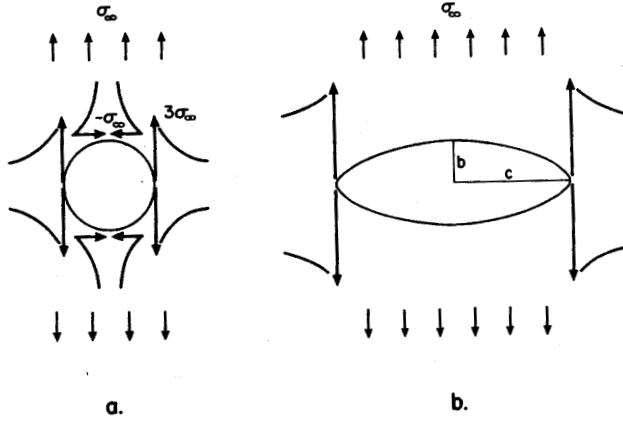


図1.2 (a) 平板のなかの円孔まわりの応力集中。平板には一様な引っ張り応力が遠方から課せられている。(b) 平板のなかの楕円孔まわりの応力集中。

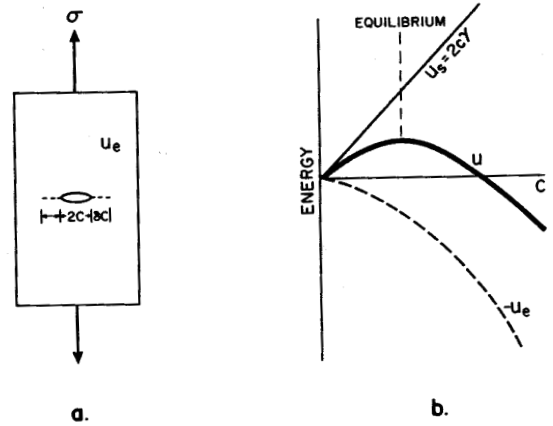


図1.3 (a) 棒のなかに存在するクラックの伝播にかんするGriffithモデル。(b) クラック伝播過程におけるエネルギー配分。

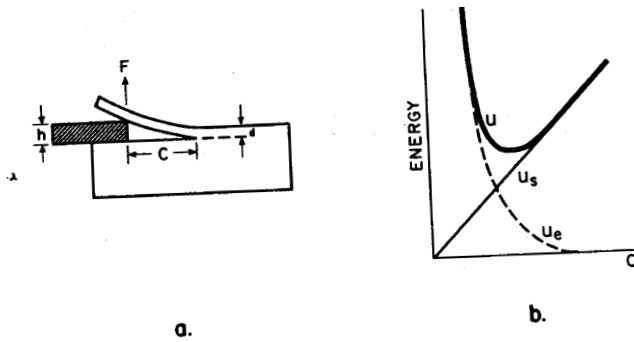


図1.4 (a) Obreimoffのおこなった雲母のへき開実験。(b) へき開プロセスにおけるエネルギー配分。

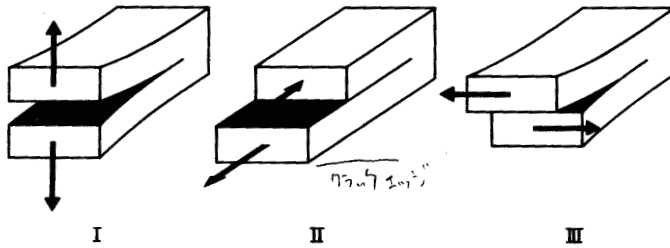


図1.5 3つのクラック伝播モード。

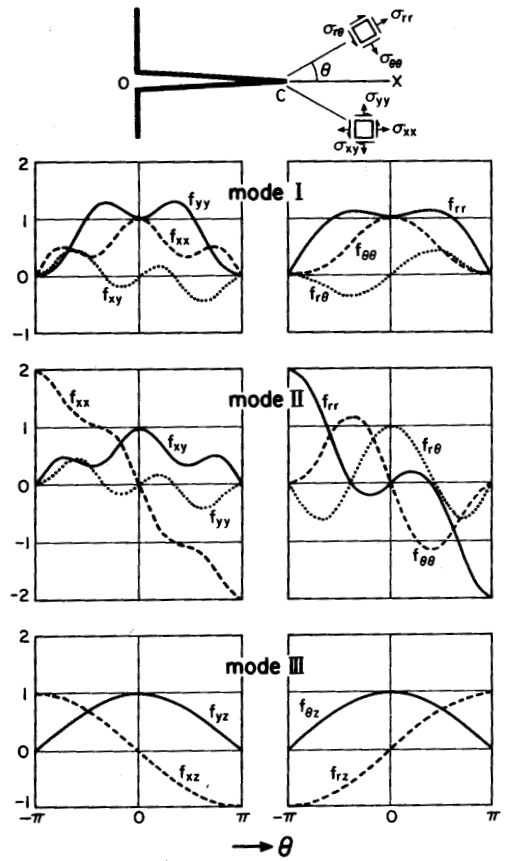


図1.6 3つのクラック伝播モードにたいするクラック先端近傍の応力関数。図表のいちばん上にしめされたような直交座標系と円筒座標系をつかって表示した。(Lawn and Wilshaw, 1975の結果にもとづく)

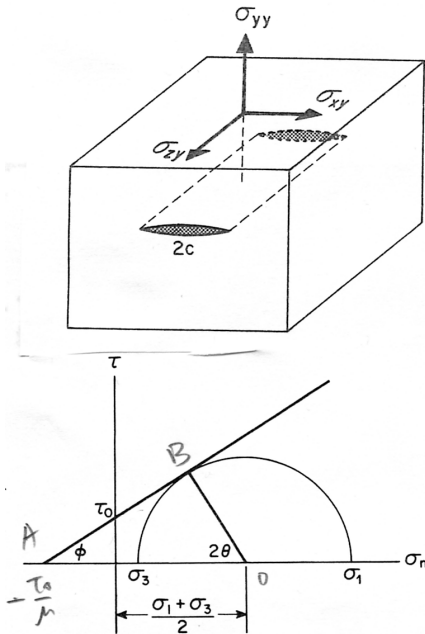


図 1.7 一様な応力場におかれたクラックの幾何学的形状。

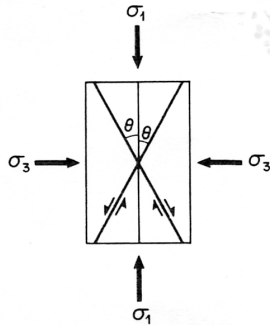


図 1.8 Mohr の応力円をつかってしめた Coulomb の破壊基準。破壊のときのパラメーター間の関係は、図の幾何学的関係から算定できる。右の図は、ふたつの破壊面と主応力のあいだの角度の関係をしめす。

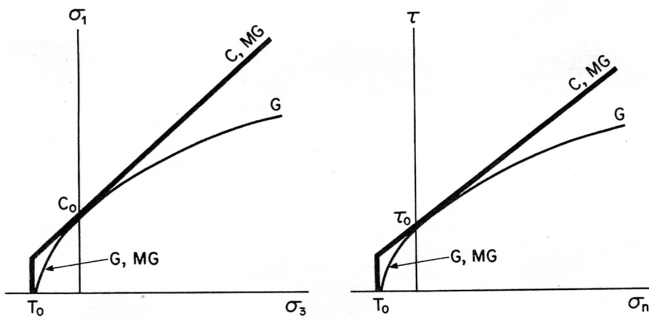


図 1.9  $(\sigma_1, \sigma_3)$  と  $(\tau, \sigma_n)$  の座標系に図示された 3 つの破壊規準の比較。(C) は Coulomb の破壊規準、(G) は Griffith の破壊規準、(MG) は修正 Griffith の破壊基準をしめす。

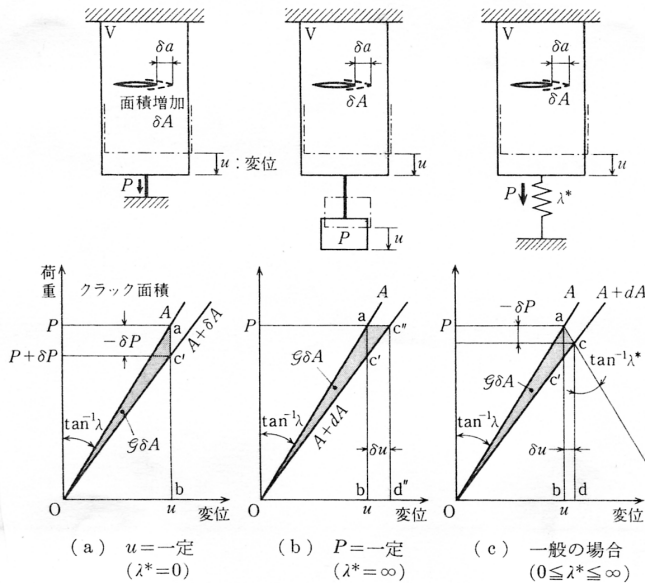


図 4.4 種々の条件下におけるクラックの微小進展

付表 2

応力拡大係数の資料 1  
 二次元問題の基本的な解析解  
 ただし、 $E' = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$ ,  $\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$

No.	クラックと荷重の種類	応力拡大係数 $K$ , Westergaard の応力関数 $Z_I(z), Z_{II}(z), Z_{III}(z)$
1	遠方に作用する一様応力 $\sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, \tau_{yx}^\infty$ 	応力関数: $\begin{cases} Z_I(z) \\ Z_{II}(z) \\ Z_{III}(z) \end{cases} = \frac{z}{(z^2-a^2)^{3/2}} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ \tau_{yx}^\infty \end{cases} + i \begin{cases} 0 \\ (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)/2 \\ \tau_{xz}^\infty \end{cases}$ 応力拡大係数: $\begin{cases} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{cases} = \sqrt{\pi a} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ \tau_{yx}^\infty \end{cases}$ なお、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xz}^\infty$ は $K$ には影響を及ぼさない。変位や応力は、単にこれらの一様応力場によるものを加算すればよい。 x 軸上の応力分布: $\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \frac{- x }{\sqrt{a^2-x^2}} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \sigma_x^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \\ \tau_{yz}^\infty \\ \tau_{zx}^\infty \end{cases} + \begin{cases} -\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xz}^\infty \end{cases}$ クラック内面の変位: $\begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \pm \sqrt{a^2-x^2} \begin{cases} \frac{2\tau_{xy}^\infty}{E'} \\ \frac{2\sigma_y^\infty}{E'} \\ \frac{\tau_{yz}^\infty}{G} \end{cases} + \begin{cases} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)x \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ ただし、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ による $w$ を除く。

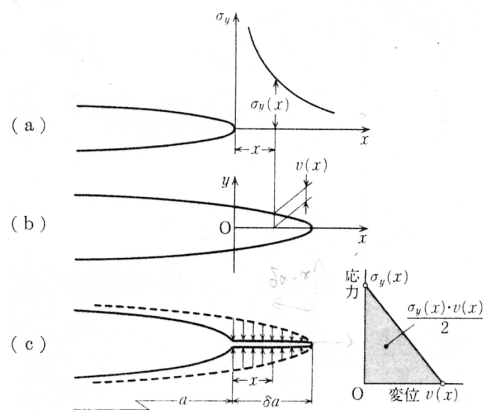


図 4.5 クラック成長に伴うエネルギー変化の計算