

一般相対性理論（2020 年度前期）「中間レポート」 by 野海俊文

以下の 2 問を解いて 7/2 までに BEEF で提出してください。手書きのスキャン、文書作成ファイルを利用したもの、など形式は問いませんが、ファイルのサイズはなるべく抑えてください（アップロードできる最大容量は 5MB となっています）。また、今後の参考にするので講義についての要望・コメント等もあれば遠慮なく書いてください。

1. 曲がった座標と曲がった空間

曲がった座標 2 次元 Euclid 空間の極座標 (r, θ) は直交座標 (x, y) と以下のように関係している：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

- (1) 極座標で計量はどのように書けるか。
- (2) 極座標で Christoffel 記号を計算せよ。
- (3) 極座標におけるベクトルの基底 $e_r(r, \theta)$, $e_\theta(r, \theta)$ は直交座標におけるベクトルの基底 e_x , e_y を用いてどのように表されるか。
- (4) 微小に離れた 2 点 $x^\mu = (r, \theta)$ と $x^\mu + dx^\mu = (r + \delta r, \theta + \delta \theta)$ におけるベクトルの基底 e_r , e_θ が

$$e_\mu(x) \simeq e_\mu(x + dx) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) dx^\nu e_\rho(x) \quad (2)$$

のように関係していることを確認せよ。ただし、 $dx^\mu = (dr, d\theta)$ の 2 次以上の項は無視した。

- (5) 極座標で Riemann テンソルを計算し、消える（つまり空間が平坦な）ことを確認せよ。

曲がった空間 半径 1 の 2 次元球面（3 次元球の表面）の計量は極座標で

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3)$$

と与えられる。

- (6) Christoffel 記号と Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーを計算せよ。
- (7) 測地線方程式を書き下し、大円が測地線になっていることを示せ。
- (8) 測地線方程式は「2 点を結ぶ曲線のうち長さが極値を取る曲線」の条件を与える。極値には極小、極大、鞍点（曲線を変形した際に長さが増える場合と減る場合の両方がある）の 3 つの可能性があるが、大円がどの場合に相当するかを議論せよ。

2. 膨張宇宙

空間方向に一様等方的に膨張する宇宙は計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4)$$

を持つ時空（Friedmann-Lemaitre-Robertson-Waler 時空; FLRW 時空）として表されることが知られている。ここで $a(t)$ はスケール因子と呼ばれる関数で、時刻 t における宇宙の大きさを特徴付ける。

- (1) この計量を用いて Christoffel 記号を計算せよ。ただし、宇宙の膨張率を表す Hubble パラメータ

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad \left(\text{ただし, } \dot{a} = \frac{da}{dt} \right) \quad (5)$$

を導入すると計算の見通しが良くなります。

- (2) 測地線方程式を書き下し、

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0 \quad (x_0, y_0, z_0 : \text{定数}) \quad (6)$$

が測地線になっていることを確認せよ。また、この座標系は共動座標と呼ばれているが、その理由を考察せよ。

- (3) 共動座標で点 $(x, y, z) = (x_A, 0, 0)$ に静止している天体 A と点 $(x, y, z) = (x_B, 0, 0)$ に静止している天体 B の間の物理的距離は時間と共にどう変わるか。
- (4) Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーをそれぞれ計算せよ。
- (5) Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ が計量 $g_{\mu\nu}$ に比例するとき時空は最大対称であると言う。この条件を満たす $a(t)$ を求め、そのときの宇宙膨張の様子について考察せよ（この時空はド・ジッター時空と呼ばれ、現在の宇宙膨張をうまく記述していることが知られている）。