8 Einstein 方程式

７章までの復習：

- 曲がった時空場では共変微分が自然．ex. $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho$
- Christoffel 記号 $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ は「座標の曲がり」を特徴付け，重力場とみなせる．
- Riemann テンソル $R^\mu{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\nu\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta)$ は「時空の曲がり」を特徴付け、テンソルとして振る舞う（cf. Christoffel 記号はテンソルでない）．

８章では，これらを用いて Einstein 方程式を導入する：

1. 曲がった時空上の Maxwell 理論
2. 作用原理に基づく重力の記述
3. エネルギー運動量テンソル
4. Einstein 方程式

8.1 曲がった時空上の Maxwell 理論

本節では，一般座標変換およびゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$ のもとでの不変性を指導原理に，Minkowski 時空中の Maxwell 理論は作用

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L}\,, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu\,, \tag{8.1}$$

を一般の時空に拡張する．

■ **不変体積要素**　一般座標変換のもとで積分要素は

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \tag{8.2}$$

のように変換し，不変でない．ただし，$\left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right|$ は積分変数の変換に伴う Jacobian である．ここで，計量の変換性を表す式

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x') \tag{8.3}$$

で両辺の行列式を計算すると

$$g(x) = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^2 g'(x')\,, \quad g(x) = \det g_{\mu\nu}(x) \tag{8.4}$$

のように Jacobian の２乗が現れる．よって，$d^4x\sqrt{-g}$ は一般座標変換のもとで不変：

$$d^4x\sqrt{-g} = \left(\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-1} d^4x'\right)\left(-\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^2 g'\right)^{1/2} = d^4x'\sqrt{-g'}\,. \tag{8.5}$$

以上より，一般座標変換もものとで不変な作用は不変体積要素 $d^4\sqrt{-g}$ とスカラー量である Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ を用いて

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{8.6}$$

と表される．

■ Maxwell 作用　４元ポテンシャル A_μ（１形式）とその共変微分，および４限カレント J^μ（ベクトル）を用いてゲージ不変な Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ を構成しよう．まず，場の強さの自然な一般化は

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \tag{8.7}$$

であろう．∇_μ が共変微分なので，この定義を用いると $F_{\mu\nu}$ がテンソルとして振る舞うことが明白である．ここで，下付き添え字を持つ場の強さが

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\mu}A_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8.8}$$

のように通常の偏微分を用いて表せることに注意すると[*1*2]，場の強さ $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{8.9}$$

のもとで不変なことがわかる．これを用いて Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \tag{8.10}$$

で定義する．

■ 運動方程式　Maxwell 作用

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu\right] \tag{8.11}$$

の変分を A_μ についてとると，

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta A_\mu + \delta A_\mu J^\mu\right]. \tag{8.12}$$

ここで，本節の最後に示す公式

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\mu V^\mu = \int d^4x\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,V^\mu\right) = \text{表面項} \tag{8.13}$$

を用いると，

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla_\nu F^{\mu\nu} + \mu_0 J^\mu\right]\delta A_\mu \tag{8.14}$$

より，運動方程式（つまり曲がった時空上の Maxwell 方程式）は

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \tag{8.15}$$

で与えられる．

[*1] これは場の強さが外微分を用いて２形式として定義されることに起因する．

[*2] 一般に，$F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu \neq \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ であることに注意．

■ **ゲージ不変性とカレントの保存**　また，ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$ のもとで作用は

$$S' = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \partial_\mu\alpha\, J^\mu\right] \tag{8.16}$$

のように変換する．公式 (8.13) を用いると，

$$S' = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu - \alpha\,\nabla_\mu J^\mu\right] + \text{表面項} \tag{8.17}$$

となり，ゲージ不変性が共変化された保存則 $\nabla_\mu J^\mu = 0$ を要求することがわかる．

■ **補遺： (8.13) 式の導出**　一般の行列 M_{ab} は次の関係式を満たす：

$$\det(M_{ab}) = \exp\Big[\mathrm{tr}(\ln M_{ab})\Big]\,. \tag{8.18}$$

ただし，$\ln M_{ab}$ は $M_{ab} = \delta_{ab} + m_{ab}$ を用いて

$$\ln M_{ab} = m_{ab} - \frac{1}{2}(m^2)_{ab} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,(-1)^{n-1}(m^n)_{ab} \tag{8.19}$$

と定義される[*3]．また，これと等価な式

$$\ln\Big[\det(M_{ab})\Big] = \mathrm{tr}(\ln M_{ab})\,. \tag{8.21}$$

もしばしば便利である．これらを用いると，

$$g^{-1}\partial_\mu g = \partial_\mu(\ln g) = \partial_\mu(\mathrm{tr}\ln g_{\mu\nu}) = g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}\,. \tag{8.22}$$

よって，

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\mu g}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\Gamma^\rho_{\mu\rho}\,. \tag{8.23}$$

以上より，

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu) = \sqrt{-g}(\Gamma^\rho_{\mu\rho}V^\mu + \partial_\mu V^\mu) = \sqrt{-g}\nabla_\mu V^\mu\,. \tag{8.24}$$

8.2　作用原理に基づく重力の記述

同様にして，一般座標変換のもとで不変な重力の作用を構成しよう．

[*3] 実際，$N\times N$ 対角行列 $M_{ab} = \mathrm{diag}(M_1, M_2, \ldots, M_N)$ に対して

$$\det(M_{ab}) = \prod_{i=1}^{N} M_i = \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln M_i\right] = \exp\Big[\mathrm{tr}(\ln M_{ab})\Big] \tag{8.20}$$

を簡単に確認できる．一般の場合の導出は線形代数の練習問題として各自行うこと．

■ **作用構成の方針**　Newton 重力では，Poisson 方程式

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 4\pi G \rho_{質量} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \tag{8.25}$$

を解くことで Newton ポテンシャル ϕ が決定された．ただし，$\rho_{質量}$ と $\rho = \rho_{質量} c^2$ はそれぞれ質量密度とエネルギー密度で，G は Newton の重力定数．Newton ポテンシャルと計量の関係 $\phi = -\frac{1}{2}c^2 h_{00}$ $(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$ を思い出すと，Poisson 方程式は計量の 2 階微分方程式とみなせる．このような運動方程式を再現する Lagrangian 密度は形式的に

$$\mathcal{L} \sim h\partial^2 h + \rho h \tag{8.26}$$

のような形をしているだろう．Newton 重力の近似のもとで (8.26) のような形をし，かつ一般座標変換のもとで不変な作用を構成していく．

■ **Einstein-Hilbert 作用**　Christoffel 記号や Riemann テンソルが平坦時空の周りで

$$\Gamma \sim \partial h, \quad R \sim \partial\Gamma + \Gamma^2 \sim \partial^2 h + \partial h \partial h \tag{8.27}$$

のように展開されることに注意すると，Ricci スカラー $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ を用いて Einstein-Hilbert 作用，

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \tag{8.28}$$

を定義すると，(8.26) 式の第 1 項を再現し，かつ一般座標変換のもとで不変な作用が構成できる．ここで，κ は Einstein の重力定数と呼ばれる定数で，その値は以上の議論からは決めることができない（Newton 重力と比較することで後ほど決定する）．

一方，(8.26) 式の第 2 項は物質のエネルギーと重力の相互作用を表している．例えば電磁場がエネルギー源である場合には，一般座標変換のもとで不変な作用（簡単のため $J^\mu = 0$ とした）

$$S = S_{\mathrm{EH}} + S_{\mathrm{Maxwell}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \tag{8.29}$$

を考えると良い．このような理論は Einstein-Maxwell 理論と呼ばれる．

8.3　エネルギー運動量テンソル

以上で構成した作用 (8.29) に変分原理を適用し，運動方程式を求めよう．本節で S_{Maxwell} の計量に関する変分を調べたのち，S_{EH} を次節で調べる．

8.3.1　Maxwell 作用の変分

Maxwell 作用の変分は以下の 2 つの項からなる：

$$\delta S_{\mathrm{Maxwell}} = \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g}\, \delta \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right]. \tag{8.30}$$

■ $\sqrt{-g}$ **の変分**　$\sqrt{-g}$ の変分を計算するには

$$\ln g = \mathrm{tr}\left[\ln g_{\mu\nu}\right] \tag{8.31}$$

を用いると便利である．両辺の変分をとることで[*4]

$$g^{-1}\delta g = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \delta g = -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \tag{8.32}$$

が得られる．これにより

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\frac{\delta(-g)}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{8.33}$$

が従う．

■ $F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ **の変分**　電磁場 A_μ や場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は下付き添え字で定義されていたことに注意すると，

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \delta\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\right) = 2\delta g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \tag{8.34}$$

が従う．

■ **Maxwell 作用の変分**　以上より，

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{Maxwell}} &= \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{8\mu_0}g_{\mu\nu}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \frac{1}{2\mu_0}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{8.35}$$

ここで，

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}g_{\mu\nu}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + \frac{1}{\mu_0}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \tag{8.36}$$

は電磁場のエネルギー運動量テンソルと呼ばれている．電磁場のエネルギー運動量テンソルは，

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} - 4)g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 0 \tag{8.37}$$

を満たすことに注意（一般のエネルギー運動量テンソルはこの性質を満たすとは限らない）．

8.3.2　エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルの意味を考察しよう．例えば Minkowski 空間 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ では

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + \frac{1}{\mu_0}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \tag{8.38}$$

と書けるが，以下ではその各成分の意味を議論していく．

[*4] $\delta g^{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ の変分であり，$g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ の添え字を上げたものではないことに注意．

■ 00 成分

$$T_{00} = \frac{1}{4\mu_0}\left[-2F_{0i}^2 + F_{ij}^2\right] + \frac{1}{\mu_0}F_{0i}^2 = \frac{1}{2\mu_0}F_{0i}^2 + \frac{1}{4\mu_0}F_{ij}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{8.39}$$

のように電磁場のエネルギー密度を表す．

■ 0i 成分と i0 成分

$$T_{0i} = T_{i0} = \frac{1}{\mu_0}F_{0j}F_{ij} = \frac{1}{\mu_0 c}\epsilon_{ijk}E_j B_k \tag{8.40}$$

はエネルギー密度の流れを表す Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ を光速 c で割ったものになっている．

■ ij 成分

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{ij}\left[-2F_{0k}^2 + F_{k\ell}^2\right] + \frac{1}{\mu_0}(-F_{i0}F_{j0} + F_{ik}F_{jk}) \\ &= \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - E_iE_j\right) - \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \epsilon_{ika}\epsilon_{jkb}B_aB_b\right) \\ &= \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - E_iE_j\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - B_iB_j\right) \end{aligned} \tag{8.41}$$

は Maxwell の応力テンソル σ_{ij} を用いて $T_{ij} = -\sigma_{ij}$ と書け，運動量密度の流れ（＝圧力）を表す．

■ **一般論**　より一般に，エネルギー運動量テンソルは

$$\delta S_{\text{物質}} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{8.42}$$

で定義されるテンソルで，時空中のエネルギーや運動量の分布，流れを表す．特に，

1. T_{00} はエネルギー密度
2. $T_{0i} = T_{i0}$ はエネルギー密度の流れ＝運動量密度
3. T_{ij} は運動量の流れ＝圧力

を表し，保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を満たす．

8.4　Einstein 方程式

Einstein-Hilbert 作用 S_{EH} の変分は以下の 3 つの項からなる：

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\,. \tag{8.43}$$

最初の 2 項は

$$\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{8.44}$$

のように表すことができる．ここで，Einsteni テンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{8.45}$$

を導入した．第 3 項の計算はちょっと厄介だが，本節の最後に計算するように表面項になることがわかる．前節までの結果と合わせると，

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2\kappa} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}\right] + \text{表面項}\,. \tag{8.46}$$

よって，計量の運動方程式は

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{8.47}$$

で与えられる．これを Einstein 方程式と言う．また，

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = R - 2R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad R = -\kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{8.48}$$

より，

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}\right) \tag{8.49}$$

と書き換えることもできる．

■ Newton 重力との対応　最後に，Newton 重力との関係を議論することで，κ と Netwon の重力定数 G の関係を与える．(8.49) 式の 00 成分に着目しよう．計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{8.50}$$

と展開すると，$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \mathcal{O}(h)$ なので，(8.49) 式の左辺は

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{00} - \partial_0 \Gamma^{\mu}_{0\mu} + \mathcal{O}(h^2) = \partial_i \Gamma^{i}_{00} - \partial_0 \Gamma^{i}_{0i} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_i (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) - \partial_0 \partial_0 h_{ii} + \mathcal{O}(h^2)\right] \\ &\simeq -\frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla h_{00} = c^{-2} \nabla \cdot \nabla \phi\,. \end{aligned} \tag{8.51}$$

ただし，最後の行で $h_{\mu\nu}$ の時間依存性は無視した．一方，(8.49) 式の右辺の括弧の中身は

$$T_{00} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} T_{00} + \frac{1}{2} T_{ii} + \mathcal{O}(h)\,.$$

非相対論的極限では，粒子の運動量がエネルギーと比べて無視できるので $T_{ij} \ll T_{00}$ が成り立つ．よって

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}\right) \quad \to \quad c^{-2} \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{1}{2} \kappa \rho \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla \phi = c^4 \kappa \rho_{\text{質量}} \tag{8.52}$$

となるので

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}\,. \tag{8.53}$$

■ 補遺：(8.43) 式第３項の計算　Christoffel は一般座標変換のもとで

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}(x') + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial^2 x'^{\gamma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \tag{8.54}$$

と変換するためテンソルではなかった．しかし，その変分 $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ の一般座標変換を考えると第 2 項が相殺するため，$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ がテンソルであることがわかる．これを踏まえて Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \tag{8.55}$$

の変分を計算しよう：

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \\ &= \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\,. \end{aligned} \tag{8.56}$$

よって，

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\alpha}\left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right] \\ &= \int d^4x\partial_{\alpha}\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.57}$$

となり，表面項になっていることがわかる．つまり，運動方程式には効かない．