

10 ブラックホール

一般相対性理論では光すら脱出できない「ブラックホール」の存在が予言される．本章ではブラックホール時空の基礎を説明したのち，ブラックホールが近年の理論物理（特に量子重力理論）や天体物理の文脈でどのような役割を果たすか述べる．

10.1 Schwarzschild 解

Newton 重力において，球対称な質量 M を持つ天体の作るポテンシャル ϕ は

$$\phi = -G\frac{M}{r}, \quad \nabla \cdot \nabla \phi = 4\pi GM\delta^3(\mathbf{x}) \quad (10.1)$$

で与えられた．一般相対性理論において球対称な天体はどのような重力場を生成するのか？

■ 静的球対称な Einstein 方程式 以下の静的球対称な計量を考えよう：

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2dt^2 + e^{2\Psi(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (10.2)$$

ここで (θ, ϕ) は 2 次元球面の極座標である．この計量を用いて Einstein テンソルは

$$G^t_t = e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Psi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (10.3)$$

$$G^r_r = e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (10.4)$$

$$G^\theta_\theta = G^\phi_\phi = e^{-2\Psi} \left(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Psi'}{r} - \Phi'\Psi' \right), \quad (10.5)$$

$$\text{others} = 0, \quad (10.6)$$

と計算できる（各自計算！）．このとき，Einstein 方程式は

$$e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Psi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \kappa T^t_t, \quad (10.7)$$

$$e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \kappa T^r_r, \quad (10.8)$$

$$e^{-2\Psi} \left(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Psi'}{r} - \Phi'\Psi' \right) = \kappa T^\theta_\theta = \kappa T^\phi_\phi, \quad (10.9)$$

で与えられる．ただし，エネルギー運動量テンソルの成分のうち，ここで現れなかった成分は Einstein 方程式から消えることが要請される（言い換えると，静的球対称の条件に合わない）．

■ 静的球対称な真空解 ここで，原点 $r = 0$ 以外には物質が分布していない，つまり $T_{\mu\nu} = 0$ ，と仮定しよう．すると， $r \neq 0$ における Einstein 方程式は

$$e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Psi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (10.10)$$

$$e^{-2\Psi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (10.11)$$

$$e^{-2\Psi} \left(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Psi'}{r} - \Phi' \Psi' \right) = 0, \quad (10.12)$$

で与えられる（このような $T_{\mu\nu} = 0$ の Einstein 方程式の解は真空解と呼ばれる）．特に，3 目の式 (10.12) が最初 2 つの式 (10.10)-(10.11) から従うことに注意しよう（各自チェック！）．以下では最初の 2 式を解いていこう．

まず，最初の式 (10.10) は

$$\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} = \frac{1}{r^2} \quad \text{with} \quad f = e^{-2\Psi} \quad (10.13)$$

と書けるが，さらに変形すると

$$(rf)' = 1 \quad \leftrightarrow \quad rf = r - r_H \quad \leftrightarrow \quad f = 1 - \frac{r_H}{r}. \quad (10.14)$$

ただし， r_H は積分定数．また，最初の 2 式 (10.10)-(10.11) から

$$\Phi' + \Psi' = 0 \quad (10.15)$$

が従う．無限遠 $r \rightarrow \infty$ で Minkowski 計量になることを仮定すると

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi, \Psi = 0 \quad (10.16)$$

より

$$\Phi + \Psi = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Phi = -\Psi \quad \leftrightarrow \quad e^{2\Phi} = e^{-2\Psi} = 1 - \frac{r_H}{r}. \quad (10.17)$$

以上より，静的で球対称な真空解は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.18)$$

で与えられ，Schwarzschild 計量と呼ばれる．

10.2 Newton 重力との関係

ブラックホールの話に入る前に，Newton 重力との関係および Newton 重力の適用限界を議論しよう．重力が弱い時 ($r \gg r_H$) には Newton ポテンシャルと計量が

$$g_{tt} \simeq -c^2 - 2\phi \quad (10.19)$$

のように関係するので，(10.1) 式と比較することで

$$r_H = \frac{2GM}{c^2} \quad (10.20)$$

が得られる．例えば M が太陽質量 2×10^{30} kg，に対しては

$$\begin{aligned} r_H &\simeq 2 \times (7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) \times (2 \times 10^{30} \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^{-2} \\ &\simeq 3 \times 10^3 \text{ m} \simeq 3 \text{ km}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

これは太陽半径 7×10^5 km の 10^{-5} 程度の大きさ．また，一番近い惑星である水星の公転半径が 6×10^7 km なので，その僅か 10^{-7} 程度の大きさ．つまり，水星の運動を議論するには 10^{-7} 程度の高精度で Newton 重力の近似が良い．

■ 水星の近日点移動：一般相対性理論の実験的証拠 Newton 重力を用いると、惑星の軌道は一般に楕円形をしている。しかし、一般相対性理論を用いると楕円からのズレが生じて、一般に近日点や遠日点が移動する。水星の場合に一般相対論的效果がどの程度の大きさになるかを見積もろう。太陽の周りを1回公転するときの回転角は

$$360 \text{ 度} = 360 \times 3600 \text{ 秒} \sim 10^6 \text{ 秒}. \quad (10.22)$$

誤差 10^{-7} で Newton 重力が正しいとすると、近日点移動は高々 10^{-1} 秒毎年と見積れる。1000年間で10秒程度。実際、Schwarzschild 計量中の測地線方程式を真面目に解くことで、水星の近日点移動が100年間で40秒程度であることがわかる。Einstein 当時に既に観測されていた値に一致。

10.3 ブラックホール

ここで Schwarzschild 解に話を戻そう。計量 (10.18) は $r = r_H$ で時間成分が0になり、動径方向成分が発散する。これはどのような意味を持つのか（もしくは持たないのか）？

■ そもそも $r \sim r_H$ で Schwarzschild 計量を用いて良いか？ 例えば Newton 重力においても太陽半径以下では Newton ポテンシャルを修正する必要があった。同様に、一般相対性理論においても太陽半径以下では計量に修正を加える必要がある。太陽の場合、その半径に対して r_H は 10^{-5} 程度しかないので、 $r \sim r_H$ で Schwarzschild 計量を用いることはできない。しかし、太陽の 10^5 倍以上に高密度の天体であれば $r < r_H$ に質量が集約されており、 $r \sim r_H$ でも Schwarzschild 計量が意味を持つ。このような高密度天体の $r \sim r_H$ では何が起きるのか？

■ 計量の特異性は何を意味するか？ 半径 r で静止した観測者の固有時間 τ は

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_H}{r}} dt \quad (10.23)$$

で与えられる。これは無限遠の観測者の計る時間と比べて重力場中の観測者の時間が遅れていることを表す。特に、 $r \rightarrow r_H$ では時間が経過しないように思える。また、空間方向の計量は $r \rightarrow r_H$ で発散するが、これは空間が特異的なことを意味するのか？

一般相対性理論においては計量は座標に依存する概念であり、物理的意味を持たない。実際、Riemann テンソルの2乗は $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12r_H^2/r^6$ と計算され、 $r = r_H$ において時空は特異的でないことがわかる。このことは、はじめに選んだ座標系のせいで現れた見かけ上の特異性であることを意味する。このことをより明示的に表すために座標、

$$V = ct + (r + r_H \ln |r/r_H - 1|), \quad (10.24)$$

を導入すると

$$dV = cdt + \left(1 + \frac{r_H}{r - r_H}\right) dr = cdt + \frac{dr}{1 - r_H/r} \quad (10.25)$$

より、計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \left(cdt + \frac{dr}{1 - r_H/r}\right) \left(cdt - \frac{dr}{1 - r_H/r}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &= -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dV^2 + 2dVdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (10.26)$$

と表せ、計量の特異性を取り除くことができる。これを Eddington-Finkelstein 座標と呼ぶ。

■ $r = r_H$ に物理的意味はないのか？ $r = r_H$ の意味を調べるために、光の伝搬を調べよう。Minkowski 空間、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (10.27)$$

では、光の動径方向の運動は

$$ds^2 \leftrightarrow dr = \pm cdt \quad (10.28)$$

で表された。このような光の測地線は光円錐を作り、粒子は光円錐の中しか伝播できない（特殊相対性理論における因果律を思い出そう）。

同様のことを Schwarzschild 解に対して行おう。Schwarzschild 座標では r_H で特異性が現れるので Eddington-Finkelstein 座標を用いると、光の動径方向の運動は

$$ds^2 = 0 \leftrightarrow dV = 0 \quad \text{or} \quad \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dV = 2dr. \quad (10.29)$$

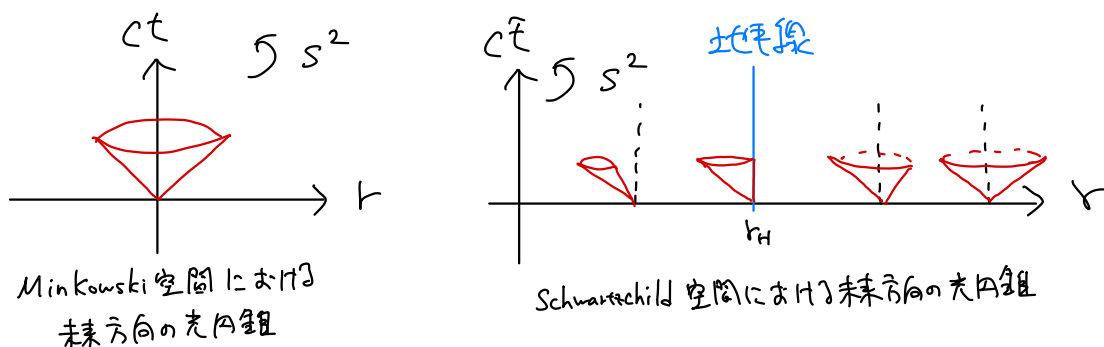
ここで、時間座標として

$$c\tilde{t} = V - r = ct + r_H \ln|r/r_H - 1| \quad (10.30)$$

を用いると、

$$cd\tilde{t} = -dr \quad \text{or} \quad \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) cd\tilde{t} = \left(1 + \frac{r_H}{r}\right) dr. \quad (10.31)$$

ここで、 $r = r_H$ の時 $\tilde{t} = t$ であることに注意。すると、光円錐は下図のようになり、面の内部から外に出られない、つまり内部の情報を外から見えない、ことを意味している。このように外から見える領域と見えない領域の境目という意味で $r = r_H$ を事象の地平線という。このように光ですら外に出ることのできない高密度天体をブラックホールと呼ぶ。



10.4 ブラックホールまわりの光の運動

Event Horizon Telescope (EHT; 2019-) に代表されるように、「ブラックホールの写真」を取ろうという観測実験が進んでいる。これを理解するために、ブラックホールまわり（地平線の外側）での光の軌跡について考察しよう。

■ 測地線方程式 簡単のため、以下の計量で特徴付けられる $\theta = \frac{\pi}{2}$ 平面状の運動に着目する：

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\phi^2 \quad \text{with} \quad f(r) = 1 - \frac{r_H}{r}. \quad (10.32)$$

測地線方程式を書き下すにあたり、Christoffel 記号のゼロでない成分を以下に示す：

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{c^2}{2} f(r) f'(r), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r f(r), \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

これを用いると、 t および ϕ に関する測地線方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{f'(r)}{f(r)} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{ds} \left[f(r) \frac{dt}{ds} \right] = 0, \quad (10.34)$$

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{ds} \left[r^2 \frac{d\phi}{ds} \right] = 0, \quad (10.35)$$

で与えられる（ s はアフィンパラメータ）。それぞれエネルギー保存と角運動量保存を表す。より具体的に、エネルギー E と角運動量 L_z を用いて

$$\frac{dt}{ds} = \frac{E}{f(r)c}, \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{L_z}{r^2}, \quad (10.36)$$

と表される。一方で、 r の測地線方程式は

$$0 = \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{c^2}{2} f(r) f'(r) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r f(r) \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \quad (10.37)$$

で与えられる。以上の式は光に限らず一般の測地線に対するものであることに注意しよう。

■ 光の測地線方程式 ここで、測地線が光の軌跡であるという条件をさらに課す：

$$ds^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad c^2 f(r) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2. \quad (10.38)$$

これを r の測地線方程式 (10.37) に代入すると、

$$0 = \frac{d^2 r}{ds^2} + \left[\frac{1}{2} r^2 f'(r) - r f(r) \right] \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2. \quad (10.39)$$

さらに角運動量 L_z を用いると

$$0 = \frac{d^2 r}{ds^2} + L_z^2 \left[\frac{1}{2} \frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3} \right] \quad (10.40)$$

と書ける．同様に，式 (10.38) もエネルギー E と角運動量 L_z を用いて

$$E^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + L_z^2 \frac{f(r)}{r^2} \quad (10.41)$$

と書ける．ここで

$$V(r) = L_z^2 \frac{f(r)}{r^2} \quad (10.42)$$

を導入すると，式 (10.40)-(10.41) は

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{1}{2} V'(r), \quad E^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + V(r), \quad (10.43)$$

と書け， $V(r)$ はニュートン力学におけるポテンシャルと同様の役割を果たしている．このことから $V(r)$ は有効ポテンシャルと呼ばれている．ここまでの結果は一般の $f(r)$ について成り立つが，Schwarzschild 計量に対する $V(r)$ の具体形は

$$V(r) = L_z^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{r_H}{r^3} \right] \quad (10.44)$$

で与えられる．特に， $V(r)$ は E や L_z に依らず $r = \frac{3}{2} r_H$ で最大値をとり，その値が

$$V\left(\frac{3}{2} r_H\right) = \frac{4}{27} \frac{L_z^2}{r_H^2} \quad (10.45)$$

であることがわかる．

■ 光の軌跡 最後に光の軌跡について考察しよう．まず，ポテンシャルの最大値より E^2 が小さければ散乱，大きければ落下，一致すれば不安定な円軌道となる．以下ではこれを衝突パラメータの言葉で理解したい．次ページの図に示すように，光の衝突パラメータ b が無限遠 $r \gg r_H$ で

$$b = r\phi, \quad (10.46)$$

角度方向の速度が

$$r \frac{d\phi}{dt} = c\phi \quad (10.47)$$

と表されることに注意すると，衝突パラメータは E と L_z を用いて

$$b = r\phi = \frac{r^2}{c} \frac{d\phi}{dt} = \frac{r^2}{c} \frac{cL_z}{Er^2} = \frac{L_z}{E} \quad (10.48)$$

と表される．よって

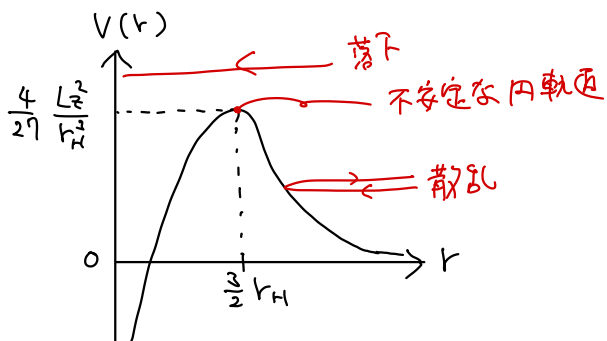
$$b > \frac{3\sqrt{3}}{2} r_H \quad (\text{散乱}) \quad (10.49)$$

$$b = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_H \quad (\text{不安定円軌道}) \quad (10.50)$$

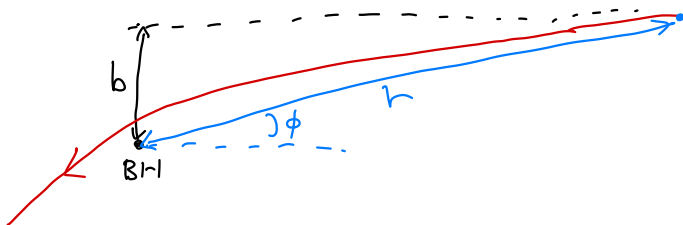
$$b < \frac{3\sqrt{3}}{2} r_H \quad (\text{落下}) \quad (10.51)$$

となることがわかる．この不安定円軌道は photon sphere と呼ばれ，その周辺に多くの光が集められる．

有効ポテンシャルの絵



衝突パラメータ



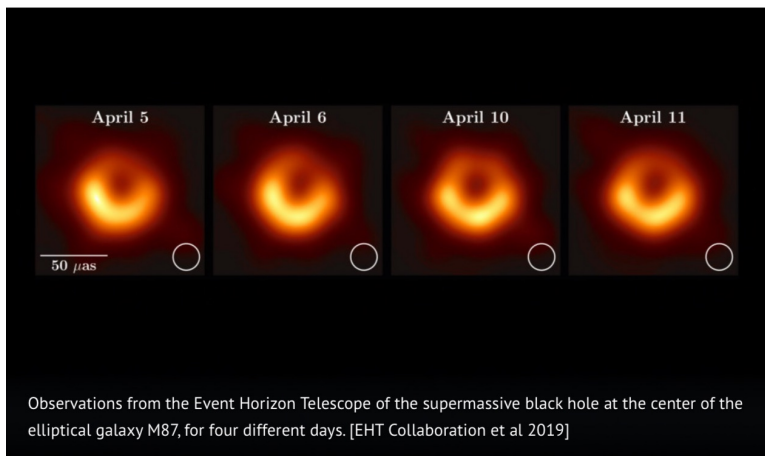
ϕ が小さいとき.

$$\begin{cases} \cdot b = r \sin \phi \simeq r \phi \\ \cdot \text{角速度は} \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r} v \sin \phi \simeq \frac{v}{r} \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow b \simeq r \phi \simeq \frac{r^2}{v} \frac{d\phi}{dt}$$

ただし $v = c$ (近似) として

$$b \simeq \frac{r^2}{c} \frac{d\phi}{dt} \leftarrow (10.48)$$



10.5 荷電ブラックホールとブラックホールの熱力学

本章の最後に「ブラックホールの熱力学」について簡単に紹介する．そのために，まずは Einstein-Maxwell 理論における電荷を持ったブラックホール解を紹介する．

■ Reissner-Nordstrom 解 Einstein-Maxwell 理論の運動方程式は，

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad g^{\nu\rho} \nabla_\nu F_{\mu\rho} = 0, \quad (10.52)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0} g_{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + \frac{1}{\mu_0} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}, \quad (10.53)$$

で与えられ，以下の静的球対称な解を持つ（解の導出は本節最後の補遺を参照）：

$$ds^2 = -f(t)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad F_{rt} = -F_{tr} = E(r). \quad (10.54)$$

ここで， $E(r)$ は動径方向の電場を表し，

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2}, \quad (10.55)$$

その無限遠での振る舞いから Q は電荷と同一視できる．ただし， k はクーロン定数 $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ である．また，対応するクーロンポテンシャル Φ_e は

$$\Phi_e = k \frac{Q^2}{r} \quad (10.56)$$

で与えられる．一方， $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GkQ^2}{c^4 r^2}, \quad (10.57)$$

で与えられ，Newton potential との比較により M は質量と同一視される．このような質量 M と電荷 Q で特徴付けられる静的球対称解は Reissner-Nordstrom 解として知られている．また， $Q = 0$ で Schwarzschild 解に帰着することも容易に確認できる．

■ 荷電ブラックホール 前節までに見たように，Schwarzschild 解は $f(r) = 0$ に事象の地平面を持っていた．Reissner-Nordstrom 解の場合には電荷と質量の大小関係によって $f(r) = 0$ が解を持つ場合と持たない場合に分類される：

1. $GM^2 > kQ^2$ のとき， $f(r) = 0$ は以下の2つの解を持つ：

$$r = r_{\pm} = \frac{1}{c^2} \left[GM \pm \sqrt{G(GM^2 - kQ^2)} \right]. \quad (10.58)$$

$r = r_+$ と $r = r_-$ はそれぞれ outer horizon, inner horizon と呼ばれ，outer horizon が事象の地平線である（inner horizon は Cauchy horizon）． $GM^2 > kQ^2$ は重力による引力がクーロン力による斥力より強いことを意味し，強重力によりブラックホールが形成されたと解釈できる（cf. 電子の場合 $GM^2 \sim 10^{-42} kQ^2$ なので，重力は極めて小さい）．

2. $GM^2 = kQ^2$ のとき, $f(r) = 0$ は重解を持つ :

$$r = r_* = \frac{GM}{c^2}. \quad (10.59)$$

$r = r_*$ は事象の地平線かつ Cauchy horizon. $GM^2 = kQ^2$ は重力による引力とクーロン力による斥力が釣り合うことを意味し, $GM^2 = kQ^2$ を満たし (かつ同じ符号の電荷を持つ) 2つのブラックホールの間には力が働かない. このようなブラックホールは極限ブラックホール (extremal black hole) と呼ばれる.

3. $GM^2 < kQ^2$ のとき, $f(r) = 0$ は実解を持たず, 事象の地平線は形成されない. つまり, ブラックホールではない.

■ ブラックホールの熱力学 ブラックホールには熱力学と類似の性質があり, 特に事象の地平面の面積 $A = 4\pi r_H^2$ ($GM^2 > kQ^2$ の荷電ブラックホールに対しては $r_H = r_+$, 極限ブラックホールに対しては $r_H = r_*$) がエントロピーと解釈できることが知られている. まず, 地平面の面積 A と質量 M , 電荷 Q の間に次の関係があることに注意しよう :

$$A = 4\pi r_+^2 \quad \text{with} \quad r_+ = \frac{1}{c^2} \left[GM + \sqrt{G(GM^2 - kQ^2)} \right]. \quad (10.60)$$

ここで, 質量 M と電荷 Q を変化させた時の地平面面積の変化は

$$\delta A = 8\pi r_+ \left[\frac{\partial r_+}{\partial M} \delta M + \frac{\partial r_+}{\partial Q} \delta Q \right], \quad (10.61)$$

$$\frac{\partial r_+}{\partial M} = \frac{1}{c^2} \left[G + \frac{G^2 M}{\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}} \right] = \frac{Gr_+}{\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}}, \quad (10.62)$$

$$\frac{\partial r_+}{\partial Q} = \frac{1}{c^2} \frac{-GkQ}{\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}} = -\frac{1}{c^2} \frac{Gr_+}{\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}} \Phi_H, \quad (10.63)$$

で与えられる. ここで, 地平面上の電位 $\Phi_H = \frac{kQ}{r_+}$ を導入した. 以上を整理すると, 以下の関係式が得られる :

$$\delta M c^2 = \Phi_H \delta Q + \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B} \frac{4\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}}{(GM + \sqrt{G(GM^2 - kQ^2)})^2} \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \delta A. \quad (10.64)$$

ここで, ブラックホールの温度 T とエントロピー S を

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B} \frac{4\sqrt{G(GM^2 - kQ^2)}}{(GM + \sqrt{G(GM^2 - kQ^2)})^2}, \quad S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A \quad (10.65)$$

のように定義すると, 熱力学第一法則,

$$\delta M c^2 = \Phi_H \delta Q + T \delta S, \quad (10.66)$$

が再現される. 今の議論では T と S を定数倍する自由度があるが, ブラックホール時空上の場の量子論を考えると, ブラックホールが上記の温度 T を持った輻射 (Hawking 輻射) を放出することが知られている. また, 温度 T は地平面で働く重力「表面重力」に比例する.

せっかくなので温度やエントロピーをいくつかの極限で計算してみよう．まず，Schwarzschild ブラックホール $Q = 0$ に対しては，

$$T = \frac{\hbar c^3}{k_B} \frac{1}{8\pi G M}, \quad S = \frac{k_B}{\hbar c} 4\pi G M^2, \quad (10.67)$$

が得られる．大きいブラックホールほどエントロピーが大きく，小さいブラックホールほど温度が高いことがわかる．次に，極限ブラックホール $kQ^2 = G M^2$ に対しては，

$$T = 0, \quad S = \frac{k_B}{\hbar c} \pi G M^2, \quad (10.68)$$

となり，特に温度がゼロである．実際，極限ブラックホールはホーキング輻射を放出せず，他の崩壊過程が存在しない限り安定に存在し得る．このような思考実験は近年の「理論模型に対する量子重力的整合性条件（swampland 条件と呼ばれる）」の議論でもしばしば用いられる．

■ ミクロスケールの重力を記述する「量子重力理論」との関係 これまでにブラックホールが熱力学的エントロピーを持つことを見てきたが，このエントロピーはよりミクロな理論の立場からは統計的エントロピー（von Neumann エントロピー）として理解されると期待される．実際，このようなミクロスケールにおける重力を記述する「量子重力理論」の最有力候補である「超弦理論」を用いると，ブラックホールエントロピーを von Neumann エントロピーとして計算できることが知られている（Strominger-Vafa '96）．また，ブラックホールエントロピーの面積則は，ブラックホール内部の情報がその表面に集約されていることを示唆する（素朴には情報量は体積に比例すると期待される）．このようなアイディアは「ホログラフィー」と呼ばれており，量子重力の重要な性質と考えられている．実際，超弦理論はホログラフィーを具体的に実現する（AdS/CFT 対応，ゲージ重力対応と呼ばれる；Maldacena '97）．近年，このようなホログラフィーの文脈で量子重力と量子情報の研究交流が盛んに行われている．

■ 補遺：荷電ブラックホール解の導出 Einstein-Maxwell 理論の運動方程式は，

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad g^{\nu\rho} \nabla_\nu F_{\mu\rho} = 0, \quad (10.69)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0} g_{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + \frac{1}{\mu_0} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}, \quad (10.70)$$

で与えられる．静的球対称な計量（簡単のため $e^{2\Phi(r)} = e^{-2\Psi(r)} = f(r)$ とした），

$$ds^2 = -f(r) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10.71)$$

および静的球対称な電場を考えよう：

$$F_{rt} = -F_{tr} = E(r). \quad (10.72)$$

このとき Maxwell 方程式は

$$E' = -\frac{2}{r} E \quad (10.73)$$

に帰着され，その解は

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (10.74)$$

で与えられる．ここで，積分定数 Q は無限遠での電場の振る舞いから電荷と同一視される．後の便宜上，再定義した電荷，

$$q = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}, \quad (10.75)$$

を導入する．この記法を用いると電荷 Q の間に働くクーロン力は $\frac{q^2}{r^2}$ のように簡単化される．

次に Einstein 方程式を解こう．まず，以前の結果 (10.3)-(10.6) を用いると，Einstein テンソルのゼロでない成分は

$$G^t_t = G^r_r = \frac{(rf)'}{r^2} - 1, \quad G^\theta_\theta = G^\phi_\phi = \frac{1}{2} \frac{(rf)''}{r}. \quad (10.76)$$

また，エネルギー運動量テンソルのゼロでない成分は

$$T^t_t = T^r_r = -T^\theta_\theta = -T^\phi_\phi = \frac{1}{2\mu_0} g^{tt} g^{rr} F_{tr}^2 = -\frac{1}{8\pi c^2 \mu_0 \epsilon_0} \frac{q^2}{r^4} = -\frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4}. \quad (10.77)$$

以上を用いると，Einstein 方程式が

$$(rf)' = 1 - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{q^2}{r^2} = 1 - \frac{G}{c^4} \frac{q^2}{r^2} \quad (10.78)$$

に帰着することがわかる ($\kappa = 8\pi G/c^4$ を用いた)．これにより $f(r)$ が

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{G}{c^4} \frac{q^2}{r^2} \quad (10.79)$$

のように求まる．ただし，積分定数 r_g は Newton ポテンシャルとの比較により

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (10.80)$$

で与えられる． Q およびクーロン定数 $k = (4\pi\epsilon_0)^{-2}$ を用いると， $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GkQ^2}{c^4 r^2} \quad (10.81)$$

と表される．