

11 重力波

Maxwell 理論が電磁波を予言したのと同様に，一般相対性理論は時空のさざ波である「重力波」の存在を予言する．本章では重力波の基礎と関連する内容をまとめる．

11.1 重力波の伝播

■ Einstein 方程式の線形近似 Minkowski 時空からのずれが小さいとき，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (11.1)$$

Einstein テンソルを $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで展開すると次の式が得られる：

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\square \tilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \tilde{h}^{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial^\rho \tilde{h}_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho \tilde{h}_{\rho\mu} + \mathcal{O}(\tilde{h}^2) \right]. \quad (11.2)$$

ただし， $\tilde{h}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\rho{}_\rho \quad (11.3)$$

のように導入し，添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ と $\eta^{\mu\nu}$ で行なっている．この近似の元で Einstein 方程式は

$$-\frac{1}{2} \left[\square \tilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \tilde{h}^{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial^\rho \tilde{h}_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho \tilde{h}_{\rho\mu} + \mathcal{O}(\tilde{h}^2) \right] \simeq \kappa T_{\mu\nu} \quad (11.4)$$

で与えられる．

■ Lorenz ゲージ 線形近似の範囲で一般座標変換を考えよう．計量の一般座標変換性，

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\alpha\beta}(x + \epsilon) \frac{\partial(x^\alpha + \epsilon^\alpha)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\beta + \epsilon^\beta)}{\partial x^\nu}, \quad (11.5)$$

より，微小な変換に対しては

$$g'_{\mu\nu}(x) \simeq g_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \epsilon^\rho g_{\rho\nu}(x) - \partial_\nu \epsilon^\rho g_{\rho\mu}(x) - \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}(x). \quad (11.6)$$

同様に， $h_{\mu\nu}$ および $\tilde{h}_{\mu\nu}$ の変換性は

$$h'_{\mu\nu}(x) \simeq h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \epsilon_\nu(x) - \partial_\nu \epsilon_\mu(x), \quad (11.7)$$

$$\tilde{h}'_{\mu\nu}(x) \simeq \tilde{h}_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \epsilon_\nu(x) - \partial_\nu \epsilon_\mu(x) + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho(x). \quad (11.8)$$

ただし， h と ϵ について 1 次までの項のみを残した（例えば $h\epsilon$ のような項は無視した）．ここで，

$$\partial_\mu \tilde{h}'^{\mu\nu}(x) \simeq \partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu}(x) - \square \epsilon^\nu(x) \quad (11.9)$$

に注意すると， $\epsilon^\mu(x)$ を適切に選ぶことで $\partial_\mu \tilde{h}'^{\mu\nu} = 0$ が実現できる．このようなゲージ条件（座標系の選び方）は Lorenz ゲージ条件と呼ばれ，Lorenz ゲージでは Einstein 方程式が

$$-\frac{1}{2} \square \tilde{h}_{\mu\nu} \simeq \kappa T_{\mu\nu} \quad (11.10)$$

のように簡単化する．特に，Lorenz ゲージ条件は「エネルギー運動量テンソルが Minkowski まわりで保存すること」つまり $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \mathcal{O}(h)$ と整合的である．

■ Transverse-Traceless (TT) ゲージと重力波 では、線形近似の範囲で真空中の Einstein 方程式を解いていこう。まず、Lorenz ゲージ条件を使うと Einstein 方程式は

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (11.11)$$

のように波動方程式に帰着する（2つ目はゲージ条件）。この段階で $\tilde{h}_{\mu\nu}$ は $10 - 4 = 6$ 自由度持っていることに注意しよう。より具体的には、例えば z 方向に光速で伝播する波数 k の波は

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)} + A_{\mu\nu}^* e^{-ik(ct-z)} \quad (11.12)$$

のように表されるが（ $A_{\mu\nu}$ は複素の対称テンソル）、Lorenz ゲージ条件より

$$A_{0\nu} + A_{3\nu} = 0 \quad (11.13)$$

が得られ、独立な自由度は添え字 0 を含まない A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) の 6 成分である。

さらに、(11.11) の 2 式は $\square \epsilon^\mu = 0$ を満たす一般座標変換の元で不変なことに注意しよう。より具体的には

$$\epsilon_\mu = -i \left[a_\mu e^{ik(ct-z)} - a_\mu^* e^{-ik(ct-z)} \right] \quad (a_\mu \text{ は複素数}) \quad (11.14)$$

の形の ϵ_μ に対して (11.12) の解が

$$A'_{ij} = A_{ij} + k \left[\delta_i^3 a_j + a_i \delta_j^3 - \delta_{ij} (a_0 + a_3) \right] \quad (11.15)$$

のように変換される。もう少し詳しく書くと、独立な 6 成分のうち 4 成分が

$$\begin{aligned} A'_{13} &= A_{13} + k a_1, & A'_{23} &= A_{23} + k a_2, & A'_{33} &= A_{33} - k(a_0 - a_3), \\ A'_{11} + A'_{22} &= A_{11} + A_{22} - k(a_0 + a_3), \end{aligned} \quad (11.16)$$

のように変換され、これらは座標変換で消せる非物理的な自由度であることがわかる。一方、残りの 2 成分は座標不変の元で不変であり、物理的な自由度である：

$$A'_{12} = A_{12}, \quad A'_{11} - A'_{22} = A_{11} - A_{22}. \quad (11.17)$$

この 2 自由度のみを残すゲージ（座標系）は Transverse-Traceless (TT) ゲージと呼ばれ、TT ゲージの重力波解は以下で与えられる：

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)} + A_{\mu\nu}^* e^{-ik(ct-z)}, \quad A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.18)$$

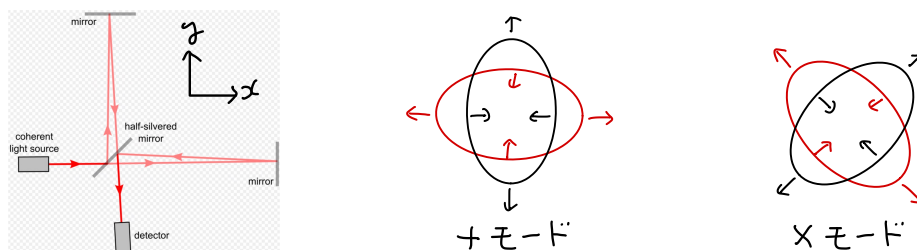
また、 $A^\rho{}_\rho = 0$ に注意すると、もとの計量 $h_{\mu\nu}$ も以下で与えられる：

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{h}^\rho{}_\rho = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)} + A_{\mu\nu}^* e^{-ik(ct-z)}. \quad (11.19)$$

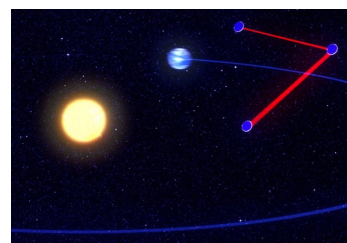
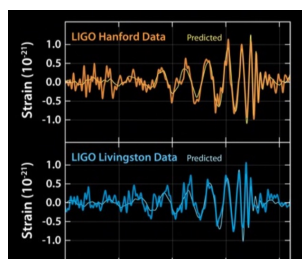
A_+ と $A_\times$ はそれぞれ縦方向と斜め方向の時空の伸縮を表し、プラスモードとクロスモードと呼ばれる。特に、電磁波と同様に重力波は 2 つの偏極モード（横波）を持つことがわかる。

11.2 重力波の直接観測

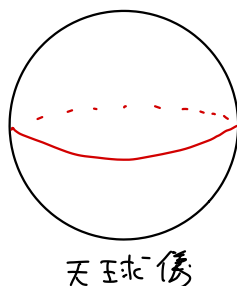
重力波は「進行方向と直行する方向」に時空の歪みを生成するが、この歪みは例えばレーザー干渉計を用いて観測可能である。より具体的に、下図のような直行するレーザー干渉計を考えよう。重力波が干渉計を通過すると光の伝播距離が伸縮するが、干渉パターンの変化から「 x 軸方向と y 軸方向の長さの差」の時間変化が読み取れ、これにより重力波が検出される。特に、下図のような配置ではプラスモードに高い感度を持ち、クロスモードには全く感度を持たない。



例えば 2015 年に重力波の直接観測に初めて成功した Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) では、全長 4km のアームを持つ検出器 2 台を用いている。これによりブラックホール連星や中性子星連星が作る重力波が直接観測されるようになった。現在は LIGO の検出器 2 台と 2017 年に稼働した Advanced Virgo の検出器 1 台（アームの全長 3km）が重力波観測の中心的役割を果たしているが、日本の重力波観測実験 KAGRA (Kamioka Gravitational wave detector, Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope) の本格稼働も近い。さらには、宇宙空間に全長 250 万 km のアームを持つ干渉計を打ち上げようという LISA 実験 (Laser Interferometer Space Antenna) も 2030 年代に計画されている。

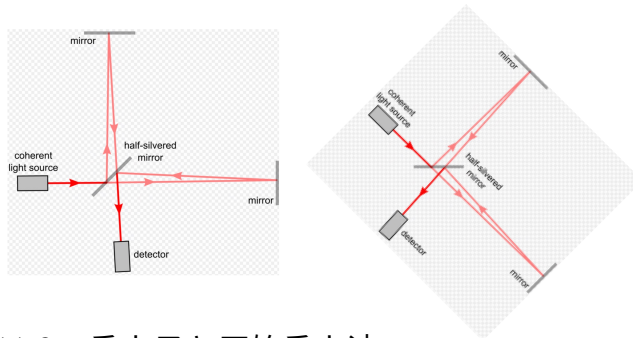


■ 検出器の数とわかる物理 下図のように、検出器 3 台を用いることで重力波の到来方向が決定できるようになる。実際、2017 年に Virgo が加わったことにより重力波の到来方向が決定可能となった。これにより、同一の天体現象由来の電磁波、ニュートリノ、重力波などを同時に観測する「マルチメッセンジャー天文学」の時代が到来した。



重力波観測では、「いつ重力波が到来したか」しかわからない
例えば北極と南極にあり 2 つの検出器 A, B が
同時に重力波を観測したとすると、
「重力波源が天球の赤道にあること」しかわからない
3 つ目の検出器を用いることで赤道上のどこにあるかがわかる

また、一般相対性理論が予言するように「重力波が2つの偏極モードしか持たないこと」を仮定すると、干渉計2台を用いて2つの偏極モードを同定することができる（下図参照）。その一方で、3つ以上の偏極モードを持つ理論模型も原理的には構成可能である（例えば重力波が質量を持つときには5つの偏極モードが現れる）。3つ以上の干渉計を用いて「重力波の偏極モードが2つしか存在しないこと」を示せれば、一般相対性理論の強い証拠になると期待されている。



4か所くらい干渉計を設置すると、
+モードと×モードの両方検出可能
cf. 偏光板

11.3 重力子と原始重力波

■ **重力波と重力子** 高校物理で学んだように、光電効果は「電磁波のエネルギーが離散的値をとり、電磁波が光子の集合体であること」を示唆した。量子力学の言葉を使うと、「電磁場の量子化」により電磁波の振幅およびそのエネルギーが離散化され、この「エネルギーの飛び」が「光子1つ分のエネルギー」と解釈される。このような「場の量子論」に基づく理論体系は「量子電磁気学 (quantum electrodynamics; QED)」と呼ばれ、大きな成功を収めている。同様に、「重力場の量子化」により重力波の振幅も離散化され、重力波は「重力子の集合体」と解釈されるべきと考えられている。このような「重力場の量子論（量子重力理論）」の構築は現代物理学最大の課題の1つであり、現在も超弦理論に代表される理論研究が精力的に行われている。

■ **原始重力波** 「光の粒子性」は通常の電磁波観測では全く見えず、光電効果のような「電磁波が関与するミクロな現象」を用いることで初めて明らかになった。同様に、LIGOなどで現在観測されている「天体現象由来の重力波」を用いて「重力波の粒子性」を見ることはできない。何らかの方法で「重力波の粒子性」を実験的に検証できないだろうか？

このような「重力波の光電効果」の役割を果たす現象として期待されているのが宇宙初期の加速膨張「インフレーション」である。インフレーション理論によると、インフレーション中に生成された量子揺らぎが「急激な宇宙膨張」により引き伸ばされ、銀河などの構造の起源となる。特に、インフレーション中に生成される「重力場の量子揺らぎ（重力子）」は「原始重力波」と呼ばれ、その観測により「重力波の粒子性」が示されると期待されている。原始重力波の検出に向けた努力が現在も懸命になされており、宇宙背景放射の偏光観測実験 LiteBIRD（2030年頃に稼働予定）や先に述べた重力波観測実験 LISA が今後の観測実験の代表例である。