

9 膨張宇宙と宇宙項、暗黒エネルギー

アインシュタイン方程式を使って、宇宙のダイナミクスを具体的に調べよう。本章以降は特に断りのない限り光速が $c = 1$ となる単位系を選ぶ。

Q. 宇宙に一様に銀河が満ちているとしよう。このとき、銀河は (a) 止まっている (b) 互いに近づく (c) 互いに遠ざかる？

9.1 一様等方宇宙

■宇宙原理 Q. 宇宙をどのようにモデル化するか？ A. 宇宙原理：宇宙には特別な場所や方向はない → 空間的に一様等方と仮定。このような仮定を満たす時空の計量は例えば

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9.1)$$

で与えられる。ここで、 $a(t)$ はスケール因子と呼ばれる時間の関数で、宇宙の大きさを特徴付ける。この時空は（空間方向に平坦な）Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) 時空と呼ばれている。では、Einstein 方程式を解いて、一様等方宇宙のダイナミクスを調べよう。

■Einstein 方程式の左辺 Einstein テンソルを計算していこう。まず、Christoffel 記号は例えば

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = a^2(t)H(t) \quad (9.2)$$

のように計算できる。ここで、宇宙の膨張率を表す Hubble パラメータ

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (9.3)$$

を導入した。同様に

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = H(t). \quad (9.4)$$

その他の成分が消えることも簡単に示せる。これを用いると Ricci テンソルが

$$R_{00} = -3H^2 - 3\dot{H}, \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = a^2(3H^2 + \dot{H}), \quad (9.5)$$

Ricci スカラーが

$$R = 12H^2 + 6\dot{H}. \quad (9.6)$$

とも止まるので、Einstein テンソルは

$$G_{00} = 3H^2, \quad G_{11} = G_{22} = G_{33} = a^2(-3H^2 - 2\dot{H}). \quad (9.7)$$

■Friedmann 方程式 以上を踏まえると、Einstein 方程式は

$$3H^2 = \kappa T_{00}, \quad -a^2(3H^2 + 2\dot{H}) = \kappa T_{11} = \kappa T_{22} = \kappa T_{33}, \quad T_{0i} = T_{i0} = 0 \quad (9.8)$$

と書ける．これを満たすエネルギー運動量テンソルを

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)p(t) \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

と書くと， $\rho(t)$ と $p(t)$ はそれぞれ時刻 t におけるエネルギー密度と圧力を表す．これは完全流体のエネルギー運動量テンソルとして知られている．特に，非相対論的な物質は $p = 0$ ，電磁波のような相対論的粒子からなる流体は $p = \rho/3$ となることが知られている．以上を用いると，Einstein 方程式は

$$3H^2 = \kappa\rho, \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa p \quad (9.10)$$

と書ける．また，スケール因子を直接用いて書くと，

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa\rho, \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p \quad \leftrightarrow \quad 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa\rho, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) \quad (9.11)$$

となる．ここで $\dot{H} = \ddot{a}/a - \dot{a}^2/a^2$ を用いた．これらは Friedmann 方程式と呼ばれ，一様等方宇宙のダイナミクスを記述する．

■非相対論的な物質で満ちた宇宙 ここではより具体的に，非相対論的な物質 $p = 0$ で満ちた宇宙のダイナミクスを調べよう．このとき，Friedmann 方程式は

$$3H^2 = \kappa\rho, \quad 3H^2 + 2\dot{H} = 0 \quad (9.12)$$

の2式に帰着されることがわかる（Friedmann 方程式の簡単な場合）．2つ目の式は

$$-\frac{2}{3}\frac{dH}{dt} = H^2 \quad \leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}\frac{dH}{H^2} = dt \quad \leftrightarrow \quad \frac{2}{3H} = t + \text{const} \quad (9.13)$$

のように解ける．ここで，一般性を失うことなく積分定数を 0 としよう．すると，

$$\frac{da}{a} = \frac{2}{3}\frac{dt}{t} \quad \leftrightarrow \quad \ln a \propto \frac{2}{3}\ln t + \text{const} \quad \leftrightarrow \quad a \propto |t|^{2/3}. \quad (9.14)$$

宇宙は収縮して潰れるか ($t < 0$)，とても小さなところから膨張するか ($t > 0$)．このように，物質で満ちた宇宙は必ず動的．

9.2 宇宙項、暗黒エネルギー、インフレーション

宇宙を満たす物質が通常の物質や放射のように正のエネルギーや圧力を持つとき，

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) < 0 \quad (9.15)$$

なので宇宙膨張は必ず減速的である．本質的には重力が引力であることを意味する．また，このことから $a(t) = \text{一定}$ であるような静的宇宙が存在しないことがわかる．

■宇宙項導入の歴史的経緯 宇宙が静的でないという一般相対性理論の予言はこれまでの物理学の常識を覆す大発見であった。しかし、これはあまりにも大きな飛躍であったため、Einstein は Einstein 方程式に宇宙項と呼ばれる項を追加修正することで静的宇宙を実現可能な理論を構成しようと試みた。また、宇宙項は真空のエネルギーと解釈でき、現代宇宙論でも重要な役割を果たすことを見ていく。

■Q. Einstein-Hilbert 作用はどの程度一般的か？ まず、一般座標変換で不変な重力の作用は一般的に

$$S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\Lambda + \frac{1}{2\kappa} R + R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \dots \right] \quad (9.16)$$

のように曲率テンソルで展開することができる。時空の歪みが小さい、つまり重力の効果が小さいときには、曲率の高次項は無視することができるが、第1項は必ずしも無視することができない。この項のことを宇宙項、 Λ のことを宇宙定数という。では、宇宙項は Einstein 方程式をどのように修正するのか？宇宙項を取り入れた作用

$$S = S_{\text{gravity}} + S_{\text{物質}}, \quad \delta S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\Lambda + \frac{1}{2\kappa} R \right] \quad (9.17)$$

に変分原理を適用すると、

$$\delta S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{1}{2\kappa} G_{\mu\nu} \right] \quad (9.18)$$

より Einstein 方程式が

$$G_{\mu\nu} + \kappa g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \quad (9.19)$$

のように修正されることがわかる。この修正は $T_{\mu\nu}$ を

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda \quad (9.20)$$

と置き換えることに対応している。

■宇宙項入りの Friedmann 方程式 一様等方宇宙では、宇宙項の効果は

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \rightarrow (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda) = \begin{pmatrix} \rho + \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(p - \Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(p - \Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(p - \Lambda) \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

つまりエネルギー密度と圧力を

$$\rho \rightarrow \rho + \Lambda, \quad p \rightarrow p - \Lambda \quad (9.22)$$

のように置き換えることに対応している。これは、物質が存在しない真空がエネルギー密度 Λ 、圧力 $-\Lambda$ を持っていることを意味しており、 Λ のことを真空エネルギーと解釈できる。この置き換えを行うと、Friedmann 方程式は

$$3H^2 = \kappa(\rho + \Lambda), \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa(p - \Lambda) \quad (9.23)$$

もしくは

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \kappa(\rho + \Lambda), \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p - 2\Lambda) \quad (9.24)$$

と書けるため、物質の存在下でも宇宙の加速度を正もしくは0にすることができる。

■正の宇宙項が支配的な場合 宇宙項（＝真空エネルギー）と比べて物質のエネルギーや圧力が無視できる場合，Friedmann 方程式は

$$3H^2 = \kappa\Lambda, \quad 3H^2 + 2\dot{H} = \kappa\Lambda \quad (9.25)$$

と書ける． $\Lambda > 0$ を仮定すると，

$$H(t) = H_0(\text{一定}), \quad H_0 = \left(\frac{\kappa}{3}\Lambda\right)^{1/2} \quad (9.26)$$

より，スケール因子が

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \quad \leftrightarrow \quad a = a_0 e^{H_0 t} \quad (9.27)$$

のように指数関数的に膨張することがわかる（ a_0 は時刻 t におけるスケール因子で積分定数）．このような時空はドジッター時空と呼ばれ，現在の宇宙および宇宙初期に実現されていたと考えられている．

■宇宙論へのイントロ スライドおよび宇宙物理学参照。