

§7 時空の幾何学 (3)

§6 の復習

- 平行移動や共変微分は接続を用いて定義した。
- Riemann 幾何学における接続は Christoffel 記号に他ならない。

§7 の目標: 時空の曲がりの特徴づける Riemann テンソルについて学ぶ

- ① Riemann テンソル
- ② Riemann テンソルの性質

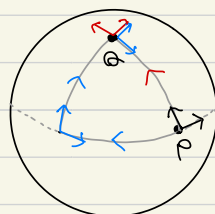
① Riemann テンソル

Q. 時空の曲がりどのように特徴付けたら良いか?

c.f. Christoffel 記号は座標系の曲がり具合を特徴づける。

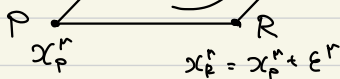
A. 平行移動の経路依存性を調べる?

• 次のような微小な“平行四辺形”を考えよう。



曲がった空間

$$x_L = x_P + \delta^L \quad x_Q = x_P + \epsilon^r + \delta^r$$



P から Q に C_R と C_L とおける経路に沿ってベクトルを平行移動し、その差を求めよう!

• 経路 C_R ($P \rightarrow R \rightarrow Q$)

まず、P から R にベクトル $A^r e_\mu(x_P)$ を平行移動すると、

$$A^r e_\mu(x_P) \rightarrow A^r \tilde{e}_\mu(C_{PR}) \simeq A^r (e_\mu(x_R) - \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_R) \epsilon^\alpha e_\alpha(x_R))$$

さらに、R から Q に平行移動すると

$$e_\mu(x_R) \rightarrow \tilde{e}_\mu(C_{RQ}) \simeq e_\mu(x_Q) - \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_Q) \delta^\alpha e_\alpha(x_Q) \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} A^r \tilde{e}_\mu(C_{PR}) \rightarrow A^r \tilde{e}_\mu(C_{PQ}) &\simeq A^r [e_\mu(x_Q) - \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_Q) \delta^\alpha e_\alpha(x_Q) \\ &\quad - \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_R) \epsilon^\alpha (e_\alpha(x_Q) - \Gamma_{\alpha\beta}^r(x_Q) \delta^\beta e_\alpha(x_Q))] \\ &\quad \Delta \simeq \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_Q) - \delta^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^r(x_Q) \end{aligned}$$

ε と δ の交換性はまだ仮定する。

$$A^\mu \tilde{e}_\mu(C_R) = A^\mu e_\mu(x_0) - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho(x_0) (\varepsilon^\alpha + \delta^\alpha) e_\rho(x_0) \\ + (\partial_\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\alpha(x_0) + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu(x_0) \Gamma_{\mu\rho}^\alpha(x_0)) A^\alpha \delta^\alpha \varepsilon^\beta e_\mu(x_0)$$

• 同様 C_L ($P \rightarrow L \rightarrow Q$) も同様に

$$A^\mu \tilde{e}_\mu(C_L) = A^\mu e_\mu(x_0) - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho(x_0) (\varepsilon^\alpha + \delta^\alpha) e_\rho(x_0) \\ + \Gamma (\partial_\beta \Gamma_{L\alpha}^\mu(x_0) + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu(x_0) \Gamma_{L\alpha}^\rho(x_0)) A^\alpha \delta^\alpha \varepsilon^\beta e_\mu(x_0)$$

• 両者の差を計算すると...

$$A^\mu \tilde{e}_\mu(C_R) - A^\mu \tilde{e}_\mu(C_L) \\ = [\partial_\alpha \Gamma_{L\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \Gamma_{L\beta}^\rho - (\alpha \leftrightarrow \rho)] A^\alpha \delta^\alpha \varepsilon^\beta e_\mu(x_0)$$

ここで Riemann テンソル $R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$ は

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \Gamma_{L\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \Gamma_{L\beta}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{L\alpha}^\mu - \Gamma_{\rho\beta}^\mu \Gamma_{L\alpha}^\rho \text{ で定義される。}$$

$$A^\mu \tilde{e}_\mu(C_R) - A^\mu \tilde{e}_\mu(C_L) = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \delta^\alpha \varepsilon^\beta e_\mu(x_0)$$

※ 共変微分が平行移動を生じることからわかるように、

ベクトル場 $A(x) = A^\mu(x) e_\mu(x)$ に対し

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A^\mu = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} A^\gamma$$

が成り立つ (各自 check!).

このことから Riemann テンソルがテンソルであることがわかる。

o Ricci テンソル, Ricci スカラー

Riemann テンソルの添字の縮約を取ることで

$$\text{Ricci テンソル: } R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \text{ Ricci スカラー: } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$$

を定義する (次のページの Bianchi 恒等式より $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ が従う)

各自 check!

② Riemannテンソルの性質

・添字の(反)対称性

① $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}{}_{\nu\beta\alpha}$ (後2つの反対称性)

② $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\alpha} + R^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta} = 0$ (後3つの循環和が0; 第1 Bianchi 恒等式)

③ $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\rho} R^{\rho}{}_{\nu\alpha\beta}$ は $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$ を満たす。(前2つの対称性)

また、①~③より ④ $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ (前2つと後2つの入れ換え) も従う。

問題

(1) スカラー場に対して $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi = 0$ が成り立つことを示せ。

(スカラー場の共変微分は $\nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi$ であることを注意)

(2) 交換関係 $[A, B] = AB - BA$ に対し、

$$\text{Jacobi 恒等式 } [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

が成り立つことを示せ

(3) Jacobi 恒等式から従う恒等式 (中は任意のスカラー場)

$$[\nabla_{\mu}, [\nabla_{\nu}, \nabla_{\rho}]] \phi + [\nabla_{\nu}, [\nabla_{\rho}, \nabla_{\mu}]] \phi + [\nabla_{\rho}, [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]] \phi = 0$$

や(1)の結果から第1 Bianchi 恒等式(上記②)が従うことを示せ。

(4) (1)の結果を $\phi = A_{\mu} A^{\mu}$ (A^{μ} はベクトル場で $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$)

に適用することで上記の恒等式③を示せ。

(5) ①~③から④が従うことを示せ。

・ Riemannテンソルの独立な成分の数

・ n 次元時空では①, ③を満たす独立な成分は $n(n-1)(n-2)/4$ 個。

・ 第1 Bianchi 恒等式②は $n \times n(n-1)(n-2)/6$ 個の条件を課す

$$\Rightarrow \frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \text{ 個の独立な成分}$$

よ)具体的には...

時空次元 n	1	2	3	4
独立な成分の数	0	1	6	20

問題

(2次元時空では Ricci スカラー R) を用いて Riemann テンソルが表されることを示せ.
(3次元時空では Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$)

• 才2 Bianchi 恒等式

Riemann テンソルの共変微分は次の才2 Bianchi 恒等式を満たす:

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^\alpha{}_{\delta\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\alpha\delta\beta} = 0$$

問題

ある点 x_* で $g_{\mu\nu}(x_*) = \eta_{\mu\nu}$ かつ $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ となる座標系を点 x_* における局所慣性系 (局所直交座標) という.

(1) 局所慣性系において Riemann テンソルが

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}(x_*) = \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\delta\gamma}(x_*) - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x_*)$$

と書けることを確認せよ

($\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ だが $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x_*) \neq 0$ とは仮定しないことに注意)

(2) 局所慣性系で才2 Bianchi 恒等式が成り立つことを示せ.

※才2 Bianchi 恒等式は共变的なので、その一般的証明を考えたことになる。

(3) Jacobi 恒等式から従う関係式

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] A_\sigma + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]] A_\sigma + [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] A_\sigma = 0$$

から才2 Bianchi 恒等式が従うことを示せ.