§6 時空の幾何学(2)

§5の復習

- 一般の時空中の点粒子の軌跡は測地線方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds}=0 \quad \left(\Gamma^\rho_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu})\right)$$

で与えられる。ただし、sは固有時間τに比例するaffineパラメータ。

- Christoffel記号$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$は座標の曲がり具合を特徴づける。

§6の目標：Christoffel記号の幾何学的意味をもう少し詳しく学ぶ

① 平行移動とRiemann接続
② 共変微分

① 平行移動とRiemann接続

Q. ベクトルやテンソルの微分をどう定義するか？

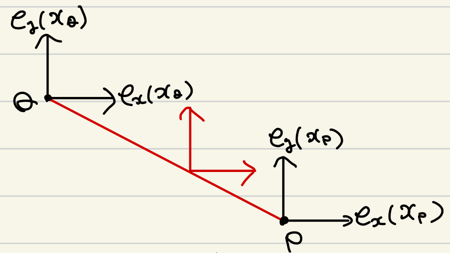
※ 基底$e_\mu(x)$, $V^\mu(x)$が各点ごとに定義されているため、
異なる2点のベクトルを比較するのは非自明

- 普段、何気なくしていること。

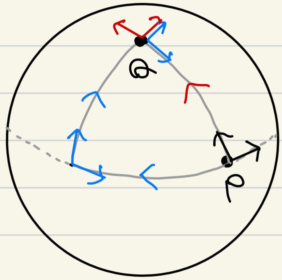
・2点P, Qでベクトル場を

$$\left\{\begin{array}{l} V(P)=V^\mu(x_P)\,e_\mu(x_P) \\ V(Q)=V^\mu(x_Q)\,e_\mu(x_Q) \end{array}\right\}$$ と展開

・点Pにあるベクトルを点Qに"平行移動"



Euclid 空間



曲がった空間

平行移動により $e_\mu(x_P)$ が

$\tilde{e}_\mu(C_{PQ}) = M_\mu{}^\nu(C_{PQ})\, e_\nu(x_Q)$ に移される　(C_{PQ} : PからQへの経路)

※ Euclid空間でEuclid座標を用いると $M_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu$

※ 一般の曲がった空間では、$M_\mu{}^\nu$ は経路 C_{PQ} に依存。

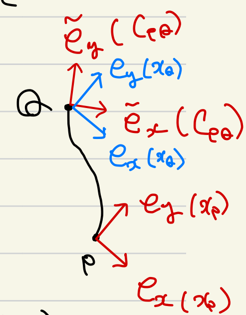
※ 角度や長さは平行移動のもとで不変

○接続 (一般論)

・2点 P, Q を結ぶ経路 C_{PQ} が与えられたとき C_{PQ} 上の平行移動を

$\tilde{e}_\mu(C_{PQ}) = M_\mu{}^\nu(C_{PQ})\, e_\nu(x_Q)$ のように定める

↑点Pの基底を C_{PQ} に沿って平行移動したもの。



・点PとQが十分近いとき、$x_Q^\mu = x_P^\mu + dx^\mu$ とすると

$$\tilde{e}_\mu(C_{PQ}) \simeq e_\mu(x_Q) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x_Q)\, dx^\nu\, e_\rho(x_Q)$$

と近似でき、$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ を接続と呼ぶ (Christoffel 記号とは限らない)

※接続の定義に「どのような幾何学を考えるか」がこめられる。

・接続の一般座標変換

一般座標変換のもとで

$$\tilde{e}'_\alpha(C_{PQ}) = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_P \tilde{e}_\mu(C_{PQ}), \quad e'_\alpha(x_Q) = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_Q e_\mu(x_Q)$$

※ $\tilde{e}_\mu$ は点Pにおけるベクトル基底の変換を反映する。

ここで $\left.\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_P \simeq \left.\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_Q - \dfrac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\, dx'^\beta$ $(dx'^\alpha = x'^\alpha_Q - x'^\alpha_P)$ を用いると

⇒ 次ページ

$$\tilde{e}'_\alpha(C_{PQ}) \simeq \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_Q \tilde{e}_\mu(C_{PQ}) - \left.\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right|_Q dx'^\beta \tilde{e}_\mu(C_{PQ})$$

$$\simeq \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right|_Q \left(e_\mu(x_Q) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x_Q)\, dx^\nu e_\rho(x_Q)\right) - \left.\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right|_Q dx'^\beta e_\mu(x_Q)$$

$$= e'_\alpha(x'_Q) - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x_Q) + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho}\right) dx'^\beta e'_\gamma(x'_Q)$$

これを定義式

$$\tilde{e}'_\alpha(C_{PQ}) \simeq e'_\alpha(x_Q) - \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}(x'_Q)\, dx'^\beta e'_\gamma(x'_Q)$$ と比較すると、

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu}$$

※ 接続はテンソルではない（第2項のせい）

※ 局所的に $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ となる座標をとれるとき 一般の座標で $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$

◦ Riemann 接続

Riemann 幾何学では

(a) 平行移動のもとで角度や長さが保たれる

(b) 局所的に直交座標をとれる ($\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0$) ⇒ 一般の座標で $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$

↑ 局所的に重力を消せることに対応

を要求することで接続の形を決定する。

・(a) について…

ベクトルの長さは計量を用いて $|v|^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$

2つのベクトル u と v の間の角度 θ は $\cos\theta = \dfrac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{|u||v|}$

⇒ 平行移動で計量が不変 $\tilde{e}_\mu(C_{PQ}) \cdot \tilde{e}_\nu(C_{PQ}) = g_{\mu\nu}(x_P)$ …… (6-a)

P と Q が十分近いとき

(6-a) の左辺 $\simeq (e_\mu(x_Q) - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} dx^\sigma e_\rho(x_Q)) \cdot (e_\nu(x_Q) - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} dx^\beta e_\alpha(x_Q))$

$$\simeq g_{\mu\nu}(x_Q) - (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu})\, dx^\rho$$

$\simeq g_{\mu\nu}(x_P) + (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu}) dx^\sigma$

よって (6-a) $\Leftrightarrow$ $\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} = 0$ …… (6-b)

• 以上より, Riemann 多様体における接続 (Riemann接続) は

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} = 0,\quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$ を満たす.

より具体的に,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\nu\rho} &= \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} + \cancel{\Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}} \\
\partial_\nu g_{\mu\rho} &= \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + \cancel{\Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}} \\
+)\ -\partial_\rho g_{\mu\nu} &= -\cancel{\Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu}} - \cancel{\Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu}} \\
\hline
\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} &= 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}
\end{aligned}$$

$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ を使った

より.

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

これは §5で導入した Christoffel 記号に他ならない.
以下で表れる接続 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ は全て Christoffel 記号を表す.

② 共変微分

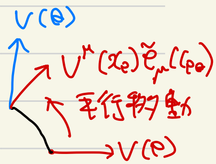
① で導入した平行移動の概念を用いてテンソルの(共変)微分を考えよう.

• ベクトルの共変微分

ベクトル場 $V^\mu(x) e_\mu(x)$ の変位を

$$\delta V_{QP} = V^\mu(x_Q) e_\mu(x_Q) - V^\mu(x_P) \tilde{e}_\mu(C_{PQ})$$ で定義しよう.

└ 点Pのベクトルを Q に並行移動



微小な変位 $x_Q^\mu = x_P^\mu + dx^\mu$ に対しては,

$$\delta V_{QP} \simeq V^\mu(x_Q) e_\mu(x_Q) - V^\mu(x_Q - dx)(e_\mu(x_Q) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x_Q) dx^\nu e_\rho(x_Q))$$

$$= [\partial_\nu V^\mu(x_Q) + \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_Q) V^\rho(x_Q)] dx^\nu e_\mu(x_Q)$$

と表せる. ここで, ベクトルの共変微分 $\nabla_\nu V^\mu$ を

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho$$ のように定義する.

・共変微分の一般座標変換性

ベクトル場の変位が $\Delta V_{QP} = \nabla_\nu V^\mu (x_Q)\, \overset{\omega^\nu(x_Q)}{dx^\nu}\, e_\mu (x_Q)$

と表せていたので、共変微分 $\nabla_\nu V^\mu$ は $(1,1)$ テンソルとして変換するはず。

実際、

$$\nabla_\alpha V'^\beta (x') = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} V'^\beta (x') + \Gamma'^\beta_{\gamma\alpha}(x') V'^\gamma (x')$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} V^\nu (x)\right) + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\rho\mu} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho}\right) \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\sigma} V^\sigma (x)$$

$$= \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} V^\nu (x) + \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right) V^\nu (x)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu (x) + \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} V'^\gamma (x')$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\rho\mu} V^\rho (x) + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} V'^\gamma (x')$$

ここで $0 = \dfrac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\dfrac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\dfrac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right) \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} + \dfrac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \dfrac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\gamma}$ を用いると

$$\nabla_\alpha V'^\beta (x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \left(\partial_\mu V^\nu (x) + \Gamma^\nu_{\rho\mu} V^\rho (x)\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu (x) \,/\!/$$

◎ 1形式の共変微分

1形式の基底 $\omega^\mu (x)$ の平行移動を $\tilde{\omega}^\mu (C_{PQ})$ と書き、

内積との整合性 $\langle \tilde{\omega}^\mu (C_{PQ}), \tilde{e}_\nu (C_{PQ})\rangle = \delta^\mu_\nu$ を要求しよう。

すると、微小な変位 $x_Q^\mu = x_P^\mu + dx^\mu$ に対して、

$\tilde{\omega}^\mu (C_{PQ}) \simeq \omega^\mu (x_Q) + A^\mu{}_{\nu\rho}\, dx^\rho\, \omega^\nu (Q)$ の形を仮定すると、

$$\langle \tilde{\omega}^\mu (C_{PQ}), \tilde{e}_\nu (C_{PQ})\rangle \simeq \underbrace{\langle \omega^\mu (x_Q), e_\nu (x_Q)\rangle}_{=\delta^\mu_\nu} + A^\mu_{\rho\sigma}\, dx^\sigma \underbrace{\langle \omega^\rho (x_Q), e_\nu (x_Q)\rangle}_{=\delta^\rho_\nu}$$

$$- \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\, dx^\sigma \underbrace{\langle \omega^\mu (x_Q), e_\rho (x_Q)\rangle}_{=\delta^\mu_\rho}$$

$$\langle \tilde{\omega}^\mu (C_{PQ}), \tilde{e}_\nu (C_{PQ})\rangle = \delta^\mu_\nu \iff A^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \,/\!/$$

以上より、$\tilde{\omega}^\mu(C_{PQ}) \simeq \omega^\mu(x_Q) + \Gamma^\mu_{\nu\rho} dx^\nu \omega^\rho(x_Q)$

これを用いると、1形式場 $A = A_\mu(x)\omega^\mu(x)$ の変位は

$x_Q = x_P + dx$

$$\begin{aligned}
\Delta A_{QP} &= A_\mu(x_Q)\omega^\mu(x_Q) - A_\mu(x_P)\tilde{\omega}^\mu(C_{PQ}) \\
&\simeq A_\mu(x_Q)\omega^\mu(x_Q) - A_\mu(x_Q - dx)\left(\omega^\mu(x_Q) + \Gamma^\mu_{\nu\rho} dx^\rho \omega^\nu(x_Q)\right) \\
&\simeq dx^\nu \underbrace{\left(\partial_\nu A_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho\right)}_{=:\ \nabla_\nu A_\mu \ (\text{1形式の共変微分})} \omega^\rho(x_Q)
\end{aligned}$$

◎ テンソルの共変微分

同様に、一般の (m,n) テンソルの共変微分は

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_m}{}_{\rho_1\cdots\rho_n} &= \partial_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_m}{}_{\rho_1\cdots\rho_n} \\
&\quad + \Gamma^{\nu_1}_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu_2\cdots\nu_m}{}_{\rho_1\cdots\rho_n} + \Gamma^{\nu_2}_{\alpha\mu} T^{\nu_1\alpha\nu_3\cdots\nu_m}{}_{\rho_1\cdots\rho_n} + \cdots \\
&\quad - \Gamma^{\beta}_{\rho_1\mu} T^{\nu_1\cdots\nu_m}{}_{\beta\rho_2\cdots\rho_n} - \Gamma^{\beta}_{\rho_2\mu} T^{\nu_1\cdots\nu_m}{}_{\rho_1\beta\rho_3\cdots\rho_n} + \cdots
\end{aligned}$$

のように定義され、$(m, n+1)$ テンソルとして振る舞う。

- 特に、$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ が確認できる。（計量が平行移動で不変なことを意味する）

問題

テンソルの共変微分の形を自分で導出し、
さらに一般座標変換のもとで共変微分がテンソルとして振る舞うことを確認せよ。