

§5 測地線方程式

§4の復習

- ・物理量の記述にはベクトルや1形式、その一般化であるテンソルを用いる
- ・テンソルの一般座標変換性はLorentz変換の一般化になっている。
- ・足距離の定義に計量を用いる: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
ex. 2次元球面の極座標表示
 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ ($g_{\theta\theta}=1, g_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta, g_{\theta\varphi}=g_{\varphi\theta}=0$)

§5の目標

- ・曲がった時空中の点粒子の運動を記述する測地線方程式を理解する。
- ・座標系の曲がりを特徴付けるChristoffel記号に慣れる

- ① 測地線
- ② Christoffel記号と曲がった座標
- ③ 曲がった時空中の点粒子の運動

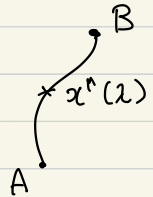
① 測地線

Euclid空間における直線: 2点間をつなぐ曲線のうち長さが最小のもの、
これを一般の計量を持つ空間に拡張しよう!

- ・媒介変数 λ を用いて2点A, Bを結ぶ曲線を $x^\mu(\lambda)$ と表す。

曲線の長さは $S = \int_A^B d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \dots (5-a)$

(簡単のため、計量 $g_{\mu\nu}$ が正の固有値しか持たないとする)



問題

作用(5-a)が

(1) 曲線のラベル λ の変え $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda'(\lambda)$

(2) 一般座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x)$ のもとで不変なことを示せ

• 以上より「長さ最小の曲線」は

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d}{ds} \ln(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}) = 0 \dots (5-d)$$

を満たすべきことがわかる。

特に、媒介変数 s を曲線の長さ s ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) に設定して

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1 \text{ より } (5-d) \text{ は}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \dots (5-e) \text{ にて簡単化し、}$$

測地線方程式と呼ばれる。

また、 $ds \propto d\lambda$ を満たす媒介変数は affine パラメータと呼ばれる

↑ 比例係数は λ や s に依らない定数

② Christoffel 記号と曲がった座標

• 測地線方程式 (5-e) や Christoffel 記号 (5-c) の意味を具体例で考えよう?

ex. 1. 2次元 Euclid 座標

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) = 0$$

$$\text{測地線方程式は } \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \Rightarrow x^\mu = a^\mu s + b^\mu \quad (a^\mu, b^\mu: \text{定数})$$

ex. 2 2次元 Euclid 空間の極座標

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

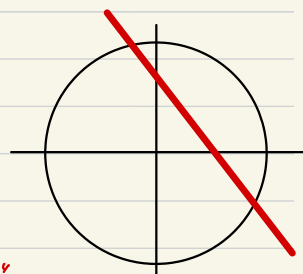
$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) = -r$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \text{others} = 0 \quad \leftarrow \text{各自 CHECK!}$$

測り地線方程式は

$$\begin{cases} 0 = \frac{dr^2}{ds^2} + \Gamma_{\theta\theta}^r \frac{d\theta}{ds} \frac{d\theta}{ds} = \frac{dr^2}{ds^2} - r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \\ 0 = \frac{d^2\theta}{ds^2} + 2 \Gamma_{r\theta}^{\theta} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} \end{cases}$$

"差心力"
"コリオリ力"

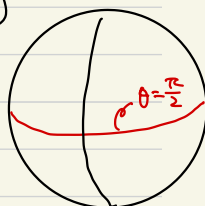


ex. 3. 2次元球面の極座標

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \text{ others } = 0 \dots (5-f)$$

※ 赤道 $\theta = \frac{\pi}{2}$ では $\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} = 0$



Christoffel記号は座標系の曲がり具合に特徴を付ける?

よく詳しくは §6 で!

問題

- (1) 2次元球面の極座標系における Christoffel 記号 (5-f) を計算せよ.
- (2) 測り地線方程式を書き下し、大円が測り地線であることを示せ.

③ 曲がった時空における点粒子の運動

- Minkowski 空間における相対論的粒子の作用は

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad \text{で与えられていた.}$$

- 一般の計量を持つ時空への自然な一般化は

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \dots (5-g)$$

変分原理を用いて、運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \ln(-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}) = 0 \dots (5-h)$$

特に、 λ を固有時刻で ($c^2 d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) に選ぶと

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \dots (5-i) \text{ に帰着する.}$$

問題

- (1) 作用 (5-2) が λ に λ の関数変えおよび一般座標変換のもとで不変であることを示せ.
- (2) 変分原理から (5-h), (5-i) を導け.

o Newton 重力, Newton 力学との対応

以下の極限で Newton 理論が再現されることを期待される

1. 重力が弱く、計量の Minkowski 時空からのずれが小さい
 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1.$
2. 点粒子の運動は非相対論的である: $|\frac{dx^i}{d\tau}| \ll c$
3. $h_{\mu\nu}$ は静的で、時間依存性が無視できる

運動方程式 (5-h) で $\lambda = \tau$ とし、上記3つの仮定を用いて、(5-h) の成分は

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^i = 0 \text{ と近似できる.}$$

ここで $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (2\partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) = -\partial_i h_{00}$ を用いて、

$$\text{運動方程式は } \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\partial_i \left(-\frac{c^2}{2} h_{00} \right) \text{ と近似される.}$$

$\Rightarrow$ Newton ポテンシャル ϕ と計量を $\phi = -\frac{c^2}{2} h_{00}$ のように同一視できる //

問題 以上の議論における近似計算の詳細を再現せよ.

まとめ

- 一般の時空における「直線」は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \ln \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right| = 0$$

で与えられる。特に、 λ を affine パラメータに選ぶと、

$$\text{測地線方程式: } \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad \text{に帰着}$$

- ここで、Christoffel 記号

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

は座標系の曲がり具合を特徴付ける (cf. §6)

- 計量を Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ で

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad \text{のように展開すると、}$$

$h_{\mu\nu}$ の 00 成分は Newton ポテンシャルと $\phi = -\frac{c^2}{2} h_{00}$ のように同一視される。

$$(cf. A_0 = -c \phi_{,0\alpha})$$