

§4 時空の幾何学(1)

§3の復習

- 重力の効果は座標変換により局所的には消える。
- 大域的には、空間(時空)の曲がり具合で重力を特徴付けられる
- $\Rightarrow$ 曲がった空間の記述に適した Riemann 幾何学が有用!

§4の目標: 曲がった時空上で物理量をどう記述するかを学ぶ

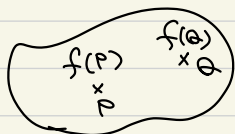
- ① ベクトル, 1形式, テンソル
- ② 一般座標変換
- ③ 距離と計量

cf. 理論物理学のための幾何学とトポロジー
by 中原幹夫

① ベクトル, 1形式, テンソル

・幾何学の基本的精神

- 空間や空間上の物理量は座標系とは無関係に存在
- 座標は人間が便宜上導入した道具に過ぎない
- ex. 空間上のスカラー関数(場)



座標系を導入するまでもなく

- 各点における関数 f の値が定まっている
- 2点 P, Q における f の差を
 $\Delta f_{PQ} = f(Q) - f(P)$ のように表せる

・座標系 x^μ を導入すると...

- スカラー関数は座標の関数 $f(x)$ として表される
- 2点 P, Q の座標を x_P^μ, x_Q^μ とすると $\Delta f_{PQ} = f(x_Q) - f(x_P)$
- 特に P と Q が十分近ければ

$$\Delta f_{PQ} \simeq dx_P^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x) \quad (dx_P^\mu = x_Q^\mu - x_P^\mu)$$

と近似できる。

※ ここで dx^r は点 P からの微小な変位, $\frac{\partial}{\partial x^r}$ は点 P から見た向きを表す
 1次元では点 X における dx^r と $\frac{\partial}{\partial x^r}$ をそれぞれ $w^r(x)$, $e_r(x)$ と書く.

○ ベクトルと1形式

向きを持つ量と2次の2種類が考えられる

ex. 1. 風向き

どの向きにどの速さで風が吹いているかを表すベクトル

$\angle e_r(x)$ $\angle v^r(x)$

$v(x) = v^r(x) e_r(x)$ と表すのが良さそう

$$v^r \sim \frac{dx^r}{ds}$$

ex. 2. 温度勾配

どこから移動すると、温度がどのくらい変化するかを表すベクトル

$\angle w^r(x)$ $\angle A_r(x)$

$A(x) = A_r(x) w^r(x)$ と表すのが良さそう

$$A_r \sim \frac{\partial T}{\partial x^r}$$

より一般に

・向き e_r を指定すると値が定まるものをベクトル $V(x) = V^r(x) e_r(x)$

・変位 w^r " " " 微分1形式 $A(x) = A_r(x) w^r(x)$

と呼ぶ

また、 e_r をベクトルの基底、 w^r を1形式の基底と呼ぶ

○ 内積

ベクトルと1形式の内積を $\langle w^r, e_s \rangle = \delta^r_s$ のように自然に導入できる.

$$(cf. \frac{\partial x^r}{\partial x^s} = \delta^r_s)$$

これを用いると、ベクトル $V = V^r e_r$ と1形式 $A = A_r w^r$ に対し、

スカラー量 $\langle A, V \rangle = \langle A_r w^r, V^s e_s \rangle$

$$= A_r V^r \langle w^r, e_s \rangle = A_r V^r$$

また、 $\langle A, e_r \rangle = A_r$, $\langle w^r, V \rangle = V^r$ のように成分を取り出すこともできる.

• テンソル

物理量 T が e_μ や w^ν のテンソル積を用いて

$$T(X) = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}(x) e_{\mu_1}(x) \otimes \dots \otimes e_{\mu_m}(x) \otimes w^{\nu_1}(x) \otimes \dots \otimes w^{\nu_n}(x)$$

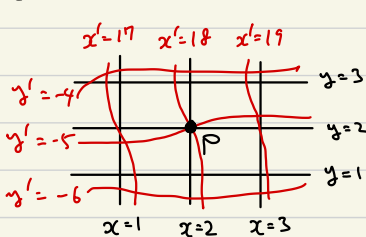
と表せるとき、 $T(X)$ を (m, n) 混合テンソル、 $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$ をその成分と呼ぶ。

ex. 風向きの変化

とわくすい移動すると、風向きがとわくすい変化する $\Rightarrow (1, 1)$ 混合テンソル
 $\underbrace{\quad}_{w^\mu} \quad \underbrace{\quad}_{e_\nu}$

② 一般座標変換

Q. 2つの異なる座標系を考えると、以上の議論はどうか?



点 P が 座標系 x^μ で x^μ
 $\quad \quad \quad x'^\mu$ で x'^μ と表されよう。

2つの座標系は一般に

$$x'^\mu = x'^\mu(x), \quad x^\mu = x^\mu(x')$$

のように書ける (一般座標変換)

ex. 座標系のずらし $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

• e_μ や w^μ の変換性

座標系を変えると連鎖律より

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \quad \text{と書けるので}$$

$$w^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} w'^\alpha(x'), \quad e_\mu(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} e'_\alpha(x')$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x' \text{ 座標系における基底}}$

特に、内積は一般座標変換と整合的になる

$$\begin{aligned} g_L^\mu &= \langle w^\mu(x), e_\mu(x) \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \langle \underbrace{w'^\alpha(x')}_{L = g_{\alpha\beta}} \rangle \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_L^\mu \end{aligned}$$

ベクトルの成分の変換性

x 座標でベクトル V を $V(x) = V^\mu(x) e_\mu(x)$

x' " " $V(x) = V'^\alpha(x') e'_\alpha(x')$ と展開したとしよう.

ポイント: ベクトル $V(x)$ は座標系に依らずに定義されている.

$$\text{よって } V'^\alpha(x') e'_\alpha(x') = V^\mu(x) e_\mu(x) = V^\mu(x) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} e'_\alpha(x')$$

$$\Leftrightarrow V'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu(x)$$

テンソルの成分の変換性

同様にし、一般のテンソルの成分の変換性は

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_n}}{\partial x^{\mu_n}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\beta_n}} T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x) \dots (4-a)$$

で与えられる.

問題

テンソルの成分の一般座標変換性 (4-a) を導出せよ.

③ 距離と計量

• Minkowski空間では4次元の距離を

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \text{ で導入し.}$$

$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ を Minkowski 計量と呼んだ.

• Riemann幾何学では、これを一般化するために.

ベクトルの基底 $e_\mu(x)$ 同士の内積を $e_\mu(x) \cdot e_\nu(x) = g_{\mu\nu}(x)$ のように導入する.

さらに微小な変位 $dx = dx^\mu e_\mu(x)$ に対して距離 (線素) を

$$ds^2 = (dx^\mu e_\mu(x)) \cdot (dx^\nu e_\nu(x)) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \text{ で定義し, } g_{\mu\nu}(x) \text{ を計量と呼ぶ}$$

また、計量の逆行列を $g^{\mu\nu}(x)$ ($g_{\mu\nu}(x) g^{\nu\rho}(x) = \delta_\mu^\rho$) と書く.

・計量の一般座標変換性

一般座標変換とベクトル基底 $e_\mu(\alpha)$ の内積の整合性より

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x') &= e'_\alpha(x') \cdot e'_\beta(x') = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} e_\mu(x) \right) \cdot \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} e_\nu(x) \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x) \quad // \end{aligned}$$

計量の逆行列の変換性も $g'^{\alpha\beta}(x') g'_{\alpha\beta}(x') = \delta^\alpha_\beta$ より次のように従う:

$$\text{まず、} g'^{\alpha\beta}(x') \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x) = \delta^\alpha_\beta \text{ を要する}$$

$$\text{両辺に } \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x) \text{ をかけると、}$$

$$\begin{aligned} \text{(左)} &= g'^{\alpha\beta}(x') \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x) \\ &= g'^{\alpha\beta}(x') \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma} = g'^{\alpha\sigma}(x') \end{aligned}$$

(Note: In the original image, red circles highlight the terms $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x)$ and $\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x)$, with a red arrow pointing from the first to the second, and a blue arrow pointing from the second to g^σ_σ .)

$$\text{(右)} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x)$$

$$\text{よって } g'^{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\mu\nu}(x) \quad //$$

・添字の上げ下げ

特殊相対論では Minkowski 計量を用いて添字の上げ下げをいじり、同様に、例えば

$$w^\mu(e_\mu \cdot v) = w^\mu(e_\mu \cdot v e_\nu) = (g_{\mu\nu} v^\nu) w^\mu$$

のようにベクトルから 1 形式を作ることができる。

以下では $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$ のように計量を用いて添字を下げる

同様に、一般のテンソルに添字も計量 $g_{\mu\nu}$ と逆行列 $g^{\mu\nu}$ を用いて、添字の上げ下げを行い、新たなテンソルを定義できる。

まとめ

- ・ (m, n) 混合テンソル:

$$T(x) = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}(x) e_{\mu_1}(x) \otimes \dots \otimes e_{\mu_m}(x) \otimes w^{\nu_1}(x) \otimes \dots \otimes w^{\nu_n}(x)$$

- ・ テンソルの成分の一般座標変換性は

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_m}}{\partial x'^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$$

- ・ 計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて距離を $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ と定義

- ・ 計量およびその逆行列の変換性は

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x), \quad g'^{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g^{\mu\nu}(x)$$

- ・ $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ を用いて添字の上へ下へを行ない、新たなテンソルを作れる。

ex. $\nabla^\mu \mu e_\nu$ から 1 形式 $V_\mu w^\mu$ ($V_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$)
 1 形式 $A_\mu w^\mu$ から $\nabla^\mu \mu e_\nu$ ($A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$)

問題

3次元 Euclid 空間を考えよう。Euclid 座標 (x, y, z) を用いるとその計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ である}$$

(1) $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$

で極座標 (r, θ, ϕ) を定義する。極座標における計量を求めよ。

(2) Euclid 空間で $\left\{ \begin{array}{l} V = V^x e_x + V^y e_y + V^z e_z \\ A = A_x w^x + A_y w^y + A_z w^z \end{array} \right\}$ と表される $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^\mu \mu \\ 1 \text{ 形式} \end{array} \right\}$ は

極座標でどのように表されるか。