§2. 作用原理に基づくMaxwell理論の記述

§1. の復習

- 4元ベクトル $A_\mu = (-\frac{\phi}{c}, A_i)$ を用いて、電場 E と磁場 B は、
  $E_i = cF_{i0}$, $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$ $(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ と表される。
- Maxwell方程式は、さらに4元カレント $J_\mu = (-c\rho, j_i)$ を用いて
  $\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho F_{\mu\sigma} = \mu_0 J_\mu$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ と表される。

§2.の目標：作用原理からMaxwell方程式を導出する！

① 作用原理と点粒子の運動
② Klein-Gordon作用
③ Maxwell作用

① 作用原理と点粒子の運動

- 非相対論的粒子

作用 ($x(t)$ の汎関数)：$S[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right]$ … (2-a)

微小な変分 $x(t) \to x(t) + \delta x(t)$ に対する作用の変化は

$$\delta S[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt\,[m\dot{x}\cdot\delta\dot{x} - \nabla V\cdot\delta x]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\,(-m\ddot{x} - \nabla V)\cdot\delta x + (\text{表面項})$$

※ δx に関する2次以上の項は無視した。

⇒ 作用が極値を取る条件として運動方程式が得られる：

$$-m\ddot{x} - \nabla V = 0 \iff m\ddot{x} = -\nabla V$$

◦ 相対論的粒子（自由粒子）

Q. 非相対論的極限 $|\dot{x}| \ll c$ で (2-a) を再現し、
かつLorentz不変な作用は何か？（簡単のため $V(x)=0$）

(1) 運動項の共変化

まず、$\frac{dx^\mu}{dt} = (c, \dot{x}) \Rightarrow \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = -c^2+\dot{x}^2$ をふまえると

自然な候補

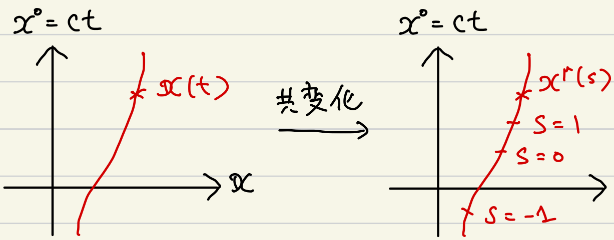
$$S \overset{?}{=} -mc\int_{-\infty}^{\infty} dt\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} \quad \cdots\cdots \ (2\text{-}b)$$

$$= -mc\int_{-\infty}^{\infty} dt\,(c^2-\dot{x}^2)^{1/2} \underset{|\dot{x}| \ll c}{\simeq} \int_{-\infty}^{\infty} dt\left(-mc^2+\frac{m}{2}\dot{x}^2\right)$$

にたどりつく。

(2) 共変性の明示化

ここまでは時刻 t における粒子の位置 $x(t)$ を用いた記述
⇒ 時間だけ特別視されている。



世界線のラベル s
を用いた媒介変数表示、

$x(t)$ の代わりに $x^\mu(s)$ を変数とし、(2-b) を次のように変更しよう：

$$S = -mc\int_{-\infty}^{\infty} ds\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}} \quad \cdots\cdots \ (2\text{-}c)$$

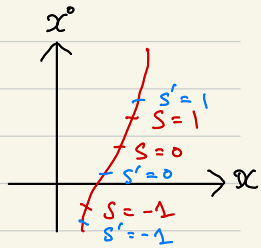
※ s は慣性系（座標 x^μ）の選び方に依存しない世界線のラベル
⇒ 作用はLorentz不変。

(3) 作用の解釈

・作用 (2-c) はラベルの張り変え $s \to s' = s'(s)$ のもとで不変.

$$(2\text{-}c) = -mc\int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{ds}{ds'}\sqrt{\left(-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds'}\frac{dx^\nu}{ds'}\right)\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2}$$

$$= -mc\int_{-\infty}^{\infty} ds'\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds'}\frac{dx^\nu}{ds'}}$$



※物理は世界線のラベル付けに依存しない.

・固有時刻τを用いて $s=\tau$のように選ぶと物理的意味がわかり易い.

固有時刻τは $c^2 d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ で定義されるので.

$$(2\text{-}c) = -mc\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\sqrt{\underbrace{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{=c^2}} = -mc^2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$$

⇒ 自由粒子は固有時間が極大になるように運動 (cf. 双子のパラドクス)

・変分原理を用いて運動方程式を求めよう:

$$\delta S = -mc\int_{-\infty}^{\infty} ds\,(-1)\cdot\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds}$$

$$= -mc\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\frac{d}{ds}\left[\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\frac{dx^\mu}{ds}\right]\delta x_\mu + (\text{表面項})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left[\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\frac{dx^\mu}{ds}\right] = 0$$

特に sを固有時間τに選ぶと. これが c^{-1} になるので. $\dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$ //

問題

電磁場中の点粒子の作用は

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} ds\left[-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}} + \overset{\text{電荷}}{q}\,\frac{dx^\mu}{ds}\overset{\text{4元ベクトル}}{A_\mu(x)}\right]$$ で与えられる.

運動方程式を導出し. Coulomb力やLorentz力が再現されることを示せ

② Klein-Gordon作用

• 以下の運動方程式に従う場 $\phi(x)$ を Klein-Gordon場と呼ぶ:

x^μの関数

$$(\Box - m^2)\phi = 0 \cdots (2\text{-}d) \quad \left(\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu \;:\; \text{d'Alembertian}\right)$$

※ $m^2 = 0$ のとき、§1で扱った波動方程式(1-b)に帰着。

※ $M = \frac{\hbar}{c} m$ は質量の次元を持ち、量子論では粒子の質量を表す。

• Klein-Gordon方程式(2-d)を再現する作用は次のように与えられる:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \cdots\cdots (2\text{-}e)$$

※ $d^4x = \frac{1}{c}\,dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ は Lorentz不変な積分要素

※ $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ を Lagrangian密度と呼ぶ。

※ 微小な変分 $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$ に対する作用の変化は

$$\delta S = \int d^4x \left[-\partial_\mu\delta\phi\,\partial^\mu\phi - m^2\phi\,\delta\phi \right]$$

$$= \int d^4x \; \underbrace{(\Box - m^2)\phi}_{=0\text{ が運動方程式}} \; \delta\phi + (\text{表面項})$$

問題

ϕ の Lorentz変換を $\phi'(x') = \phi(x)$ $\quad (x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$ で定義する

1. Lagrangian密度 $\mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)]$ が Lorentzスカラーであること。
   つまり $\mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)] = \mathcal{L}[\phi'(x'), \partial_\mu\phi'(x')]$ であることを示せ。

   x'^μ に関する微分

2. 作用(2-e)がLorentz不変なことを示せ。

③ Maxwell作用

Maxwell理論の作用をLorentz不変性とゲージ不変性から構成しよう!

◎真空中のMaxwell理論 ($\partial_\nu F^{\mu\nu}=0$, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$)

$$\begin{cases} \text{Lorentz不変性}: & S=\int d^4x\, \mathcal{L} \ (\mathcal{L}\text{は}A_\mu\text{とその微分からなるスカラー}) \\ \text{ゲージ不変性}: & \mathcal{L}\text{は場の強さ}F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\text{からなる.} \end{cases}$$

・この条件を満たす一番簡単な作用は

$$S=-\frac{1}{4\mu_0}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \cdots\cdots (2\text{-}f)$$ (μ_0は$\frac{S}{\hbar}$が無次元になるようにかけた)

微小な変分$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\delta A_\mu(x)$に対する作用の変分は,

$$\delta S=-\frac{1}{4\mu_0}\int d^4x\, 2\cdot(\partial_\mu\delta A_\nu-\partial_\nu\delta A_\mu)F^{\mu\nu}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\int d^4x\, \partial_\nu\delta A_\mu F^{\mu\nu}=-\frac{1}{\mu_0}\int d^4x\, \delta A_\mu \underbrace{\partial_\nu F^{\mu\nu}}_{=0}+(\text{表面項})$$

よって,運動方程式が真空中のMaxwell方程式を再現!

※ $F_{\mu\nu}$の3次以上や$F_{\mu\nu}$の微分を作用に含むこともできたが,
電磁場の大きさや時間・空間変化が十分小さいときには,
Lorentz不変性とゲージ不変性からMaxwell作用(2-f)が従う.

問題

A_μのLorentz変換を$A'_\mu(x')=\Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x)$ ($x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$)で定義する.

1. $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$のLorentz変換を求めよ.

2. Maxwell作用(2-f)がLorentz不変なことを示せ.

◎電荷や電流との相互作用 ($\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$)

・4元カレント J^μ との相互作用を

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right]$$ のように導入しよう.

(J^μ の Lorentz 変換を $J'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x)$ $[x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu]$
とすれば作用は Lorentz 不変)

すると, 運動方程式は

$$\delta S = \int d^4x \left(-\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu} + J^\mu \right) \delta A_\mu + (\text{表面項})$$ より

$-\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu} + J^\mu = 0 \iff \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$ となり Maxwell 方程式を再現!

・ゲージ不変性とカレント保存則

Maxwell 方程式から従うカレント保存則 $\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ を
作用のゲージ不変性から導出しよう!

ゲージ変換 $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ のもとで作用は

$$S' = \int d^4x \left(-\frac{1}{4\mu_0} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + A'_\mu J^\mu \right)$$

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \partial_\mu \alpha J^\mu \right)$$

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu - \alpha \partial_\mu J^\mu \right) + (\text{表面項})$$

のように変換 ⟹ ゲージ不変性はカレントの保存 $\partial_\mu J^\mu = 0$ を要求!

以上より, Lorentz 不変性とゲージ不変性を指導原理として

Maxwell 理論: $S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right]$, $\partial_\mu J^\mu = 0$

が再構成できた!