

§1. Maxwell 理論と特殊相対性理論

§1. の目標: Maxwell 方程式を Lorentz 共变的に書く!

- ① Maxwell 理論の復習
- ② 波動方程式の対称性
- ③ Maxwell 方程式の Lorentz 共変な表示

① Maxwell 理論の復習

• Maxwell 方程式

・電場 E と磁場 B の Gauss の法則

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \nabla \cdot B = 0 \quad (\rho: \text{電荷密度}, \epsilon_0: \text{真空中の誘電率})$$

※ 磁荷密度は 0 とした (単磁荷は自然界で見つかっていない)

・電磁誘導の法則と Ampère-Maxwell の法則

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \nabla \times B = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + j \right) \quad (j: \text{電流密度}, \mu_0: \text{真空中の磁気定数})$$

• 電磁波と波動方程式

簡単のため、真空中の Maxwell 方程式を考えよう. ($\rho=0, j=0$)

$$\nabla \cdot E = 0, \nabla \cdot B = 0, \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

例えば、電場の時間に関する 2 階微分は、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times B \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (-\nabla \times E)$$

ここで $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を用いると.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = 0$$

※ 光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ を代入した

$$\text{磁場についても同様に. } \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{B} = 0$$

以上方程式は電磁波を記述する (次節も参照)

問題

- ベクトル三重積の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ を導出せよ.
- これをを用いて $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E}$ を示せ.

② 波動方程式の対称性

• 以下の方程式は速度 v で伝播する波を記述し、波動方程式と呼ばれる:

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \dots (1-a)$$

※ $f(t, \mathbf{x})$ は時刻 t と位置 $\mathbf{x}$ の関数 (場)

※ $v = c$ (光速) のとき、(1-a) を Klein-Gordon 方程式、 $f(t, \mathbf{x})$ を Klein-Gordon 場と呼ぶ.

問題

- (1-a) の一般解を求め、波を記述していることを確認せよ.

$$2. \text{簡単のため、} x \text{ 方向に伝わる波を考えよう: } \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0.$$

波動方程式は Galilei 変換 $t' = t$, $x' = x - ut$ のもとで、どう変換されるか?

特に、波の速度が変化することを確認せよ.

e Lorentz対称性

- ・特殊相対論では、「光速の不変性」を基本原理として採用していた。
光速で伝わる波を記述する Klein-Gordon 方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \dots (1-b)$$

を見ると、時間と空間が「符号を除いて」同様な役割を果たしている。

ここで、 $x^0 = ct$ を導入すると、(1-b) は

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \quad \left(\eta^{\mu\nu} \text{ は Lorentz 計量の逆行列: } (\eta^\mu) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

と書ける。以下では Einstein の縮約規則に従い、 $\sum_{\mu, \nu}$ などでは省略する。

- ・この表示より、Klein-Gordon 方程式が以下の Lorentz 変換のもとで不変なことがわかる。

$$\text{Lorentz 変換: } x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

ただし、 Λ^μ は $\eta^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$ を満たす任意の行列。

$$\left(\begin{array}{l} \text{CHECK} \\ 0 = \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\ = \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \end{array} \right)$$

問題

0. Lorentz 計量 $\eta_{\mu\nu}$ の意味やテンソルの Lorentz 変換性を復習しておいてください。
1. 特殊相対論における点粒子の運動方程式を書き下し
 - (a) 運動方程式が Lorentz 不変なこと。
 - (b) 粒子が低い極限で Newton の運動方程式に帰着することを確認せよ。

③ Maxwell方程式の Lorentz 共変な表示

前節をふまえ、Maxwell 方程式を 4 次元的に書き直そう。

・ 4 元ポテンシャルとゲージ対称性

・ 時間に依存した電場や磁場を記述するには、

Coulomb ポテンシャル ϕ と ベクトルポテンシャル A を用いて

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A \quad \text{と表すのが便利だった。}$$

特に、電場や磁場は以下のゲージ変換のもとで不変:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad A \rightarrow A' = A + \nabla \alpha \quad (\alpha \text{ は } t, x \text{ の任意関数})$$

・ ここで 4 元ポテンシャル A_μ を $A_0 = -\frac{\phi}{c}$, $A_i = A_i$ のように導入すると、

ゲージ変換は $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$ のようにまとめられる。

同様に、電場や磁場は

$$E_i = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^0} \right), \quad B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad \text{と書ける。}$$

さらに、場の強さ $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ を導入すると、

$$E_i = c F_{i0}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$$

$$\text{より具体的に、} (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題

場の強さ $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$ で不変であることを示せ。

• Maxwell方程式の4次元的記述

• 電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ を含む、2つ。

簡便化のため、 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を導入した。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \epsilon_{ijk} \partial_i F_{jk} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \epsilon_{ijk} \partial_i F_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_0 F_{jk} \quad (1-c)$$

さらに完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ を $\epsilon^{0123} = 1$ となるように定義すると。

2つの式は $\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ と1つにまとめられる。

これは Bianchi 恒等式と呼ばれる場の強 $F_{\mu\nu}$ の定義から自明に従う。

問題

1. Bianchi恒等式と(1-c)の2つの方程式が等価なことを確認せよ。
2. Bianchi恒等式が定義式 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ から従うことを示せ。

• 残りの2つ

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \partial_i F_{i0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 c \rho \Leftrightarrow \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu 0} = \mu_0 c \rho \\ \cdot \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j F_{lm} - \partial_0 F_{i0} = \mu_0 j_i \\ &\Leftrightarrow \partial_j F_{ij} - \partial_0 F_{i0} = \mu_0 j_i \\ &\Leftrightarrow \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{i\nu} = \mu_0 j_i \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

※ ただし $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ を用いた

ここで4元カレント J_μ を、 $J_0 = -c\rho$, $J_i = j_i$ で導入すると。

2つの方程式は $\eta^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\mu\sigma} = \mu_0 J_\sigma$ と1つにまとめられる。

以上より、Maxwell方程式が Lorentz 共変な2つの式

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\mu\sigma} = \mu_0 J_\sigma, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

で表われることがわかった。