

問題 1

(1) スカール場に対して $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = 0$ が成り立つことを示せ。

(スカール場の共変微分は $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$ であることに注意)

(2) 交換関係 $[A, B] = AB - BA$ に対し、

$$\text{Jacobi 恒等式 } [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

が成り立つことを示せ

(3) Jacobi 恒等式から従う恒等式 (ϕ は任意のスカール場)

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\phi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\phi + [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\phi = 0$$

や(1)の結果から ∇ Bianchi 恒等式 (上記④) が従うことを示せ。

(4) (1)の結果を $\phi = A_\mu A^\mu$ (A^μ はベクトル場で $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$)

に適用することによって上記の恒等式④を示せ。

(5) ④ ~ ⑤ から⑥が従うことを示せ。

$$(1) \nabla_\mu \partial_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\rho \phi = \nabla_\nu \partial_\mu \phi$$

対称

$$(2) [A, [B, C]] = \cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{BAC}$$

$$[B, [C, A]] = \cancel{BCA} - \cancel{BAC} - \cancel{CAB} + \cancel{CBA}$$

$$+ [C, [A, B]] = \cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{ACB}$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

$$(3) [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\phi = \nabla_\mu [\nabla_\nu, \nabla_\rho]\phi - [\nabla_\nu, \nabla_\rho]\nabla_\mu \phi$$

$L=0$ (1), (2) $L = -R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$

$$= R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

$$\text{よって } (R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} + R^\sigma{}_{\nu\rho\mu} + R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}) \partial_\sigma \phi = 0$$

これが任意の ϕ について成り立つので、 ∇ Bianchi 恒等式が従う。

$$(4) \nabla_\alpha \nabla_\rho (A_\mu A^\mu) = \nabla_\rho \nabla_\alpha (A_\mu A^\mu) \dots (*) \text{ にならう}$$

$$(*) = 2(\nabla_\alpha A_\mu)(\nabla_\rho A^\mu) + (\nabla_\alpha \nabla_\rho A_\mu) A^\mu + A_\mu (\nabla_\alpha \nabla_\rho A^\mu)$$

$$= 2(\nabla_\alpha A_\mu)(\nabla_\rho A^\mu) + 2A_\mu (\nabla_\alpha \nabla_\rho A^\mu) \text{ なる}$$

$$(*) \Leftrightarrow 0 = A_\mu (\nabla_\alpha \nabla_\rho A^\mu) - A_\mu (\nabla_\rho \nabla_\alpha A^\mu)$$

$$= R^\mu{}_{\alpha\rho} A^\mu A_\mu = R^\mu{}_{\alpha\rho} A^\mu A^\mu$$

(antisymmetry)

$$\text{よって } R^\mu{}_{\alpha\rho} + R^\mu{}_{\rho\alpha} = 0 //$$

(5) Bianchi 恒等式を

$$\cancel{R^\mu{}_{\alpha\rho\beta}} + \cancel{R^\mu{}_{\alpha\beta\rho}} + \cancel{R^\mu{}_{\rho\beta\alpha}} = 0$$

$$\cancel{R^\mu{}_{\rho\beta\alpha}} + \cancel{R^\mu{}_{\alpha\beta\rho}} + \cancel{R^\mu{}_{\alpha\rho\beta}} = 0$$

← ④と⑤を用いた

$$\cancel{R^\mu{}_{\rho\beta\alpha}} + \cancel{R^\mu{}_{\beta\alpha\rho}} + \cancel{R^\mu{}_{\beta\alpha\rho}} = 0$$

$$+) \quad \cancel{R^\mu{}_{\alpha\rho\beta}} + \cancel{R^\mu{}_{\rho\beta\alpha}} + \cancel{R^\mu{}_{\alpha\rho\beta}} = 0$$

$$2(R^\mu{}_{\alpha\rho\beta} - R^\mu{}_{\rho\alpha\beta}) = 0 \Leftrightarrow R^\mu{}_{\alpha\rho\beta} = R^\mu{}_{\rho\alpha\beta} //$$

問題 2

(2次元時空では Ricci スカラー R
3次元時空では Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$) を用いて Riemann テンソルが表されることを示せ.

① 2次元では Riemann テンソルの独立な成分と Ricci スカラーの成分が一致するので添字の対称性から

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = a (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R \quad (a)$$

のように定数 a を除いて Riemann テンソルの形を決定できる

定数 a は以下のように、(a) を用いて Ricci スカラーを計算することで決定できる。

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = a (\underbrace{g^{\rho}_{\rho}}_{=2} g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) R = a g_{\mu\nu} R$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (a g_{\mu\nu} R) = 2aR \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R //$$

② 3次元では Riemann テンソルの独立な成分と Ricci テンソルの成分が一致するので添字の対称性から

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = a (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R$$

$$+ b (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + R_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - R_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (b)$$

のように定数 a, b を除いて Riemann テンソルの形を決定できる

(b) を用いて Ricci テンソルを計算すると

$$R_{\mu\nu} = (2a + b) g_{\mu\nu} R + b R_{\mu\nu} \Rightarrow b = 1, a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって } R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R \\ + (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + R_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - R_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) //$$

問題3

ある点 x_* で $g_{\mu\nu}(x_*) = \eta_{\mu\nu}$ かつ $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ となる座標系を点 x_* における局所慣性系 (局所直交座標) という。

(1) 局所慣性系において Riemann テンソルが

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x_*) = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma}(x_*) - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x_*)$$

と書けることを確認せよ

($\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ だが $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ とは限らないことに注意)

(2) 局所慣性系で $\star 2$ Bianchi 恒等式が成り立つことを示せ。

※ $\star 2$ Bianchi 恒等式は共変的なので、その一般化の証明を考えたことになる。

(3) Jacobi 恒等式から従う関係式

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] A_\sigma + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\sigma]] A_\mu + [\nabla_\rho, [\nabla_\sigma, \nabla_\mu]] A_\nu = 0$$

から $\star 2$ Bianchi 恒等式が従うことを示せ。

(1) 点 x_* で $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_*) = 0$ より Christoffel 記号も点 x_* で消える

$$\text{よって, } R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x_*) = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma}(x_*) - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x_*)$$

(2) 点 x_* で Christoffel 記号が消えるので、点 x_* においては

$$\nabla_\alpha R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\alpha R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\alpha \left(\begin{aligned} &\partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} \\ &+ \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\rho\beta} \Gamma^\beta_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\nu\rho}} \end{aligned} \right)$$

よって点 x_* において

$$\nabla_\alpha R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\alpha \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

この式の循環和をとるとして

$\star 2$ Bianchi 恒等式が従う。

→ 上式に微分があたり $\Gamma \partial \Gamma$ の形

$\Gamma = 0$ (ただし $\partial \Gamma = 0$ とは限らない) だと

この項は効かない。

$$(3) [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] A_\sigma$$

$$= \nabla_\mu [\nabla_\nu, \nabla_\rho] A_\sigma - [\nabla_\nu, \nabla_\rho] \nabla_\mu A_\sigma$$

$$= \nabla_\mu (-R^\alpha{}_{\sigma\nu\rho} A_\alpha) + R^\alpha{}_{\mu\nu\rho} \nabla_\alpha A_\sigma + R^\alpha{}_{\sigma\nu\rho} \nabla_\mu A_\alpha$$

$$= -(\nabla_\mu R^\alpha{}_{\sigma\nu\rho}) A_\alpha + R^\alpha{}_{\mu\nu\rho} \nabla_\alpha A_\sigma$$

μ, ν, ρ について循環和を取ることによって Bianchi 恒等式が従う.