

問題 1.

作用 (5-a) が

(1) 曲線のラベに λ の変換 $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda'(\lambda)$ (2) 一般座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x)$ のもとで不変なことを示せ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (5-a) \text{ の右辺} &= \int_A^B d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda}\right)^2} \\
 &= \int_A^B d\lambda' \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'}} //
 \end{aligned}$$

(2) 一般座標変換の中で被積分関数のルートの中身は

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= g'_{\alpha\beta}(x') \underbrace{\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right)}_{\delta^\alpha_\mu} \underbrace{\left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \right)}_{\delta^\beta_\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right)}_{\delta^\mu_\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{d\lambda} \underbrace{\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \right)}_{\delta^\nu_\beta} \frac{\partial x'^\beta}{d\lambda} \\
 &= g'_{\alpha\beta}(x') \frac{dx'^\alpha}{d\lambda} \frac{dx'^\beta}{d\lambda}
 \end{aligned}$$

$= \delta^\alpha_\mu$

δ^μ_α

のように不変である。よって (5-a) も不変。

問題 2.

- (1) 2次元球の極座標における Christoffel 記号 (5-f) を計算せよ.
- (2) 測地線方程式を書き下し、大円が測地線であることを示せ.

(1) 省略

(2) 測地線方程式の θ 成分は

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

φ 成分は

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

赤面上で Christoffel が消えることから想像できるように.

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = a\lambda + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

が測地線方程式を満たし、これは大円に他ならない.

また、任意の大円に対して

大円が赤道 $\theta = \frac{\pi}{2}$ となるような極座標がとれることから.

全ての大円が測地線方程式を満たすことがわかる.

(測地線方程式が一般座標変換のもとで不変なので、
ある座標系で測地線方程式を満たすことが示せば良い)

問題3

- (1) 作用 (5-2) がラベリスの貼り変えおよび一般座標変換のもとで不変なことを示せ.
- (2) 変分原理から (5-4), (5-i) を導け.

問題1や授業)と同じ様なので省略

問題4 LX 上の議論における近似計算の詳細を再現せよ.

講義で解説したので省略

§6. 問題

テンソルの共変微分の形を自分で導出し.

さらに一般座標変換のもとで共変微分がテンソルとして振舞うことを確認せよ.

省略