§4

問題 1.

テンソルの成分の一般座標変換性 (4-a) を導出せよ.

省略

問題 2.

3次元 Euclid 空間を考えよう. Euclid 座標 (x, y, z) を用いるとその計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2$$ で与えられる

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

で極座標 (r, θ, φ) を定義する. 極座標における計量を求めよ.

(2) Euclid 空間で $\begin{cases} V = V^x e_x + V^y e_y + V^z e_z \\ A = A_x w^x + A_y w^y + A_z e^z \end{cases}$ と表される $\begin{cases} \text{ベクトル} \\ \text{1形式} \end{cases}$ は

極座標でどのように表されるか.

(1)
$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}}_{\angle M} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

$$(g_{\mu\nu}) = M M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} //$$

(2)
$$V = (V^x\ V^y\ V^z)\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = (V^x\ V^y\ V^z)\left(M^{-1}\right)\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} //$$

$$A = (w^x\ w^y\ w^z)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = (w^r\ w^\theta\ w^\varphi)\left(M\right)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} //$$