§2

問題1.

電磁場中の点粒子の作用は

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}ds\left[-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}+\overset{\text{電荷}}{q}\frac{dx^\mu}{ds}\overset{\text{4元ベクトル}}{A_\mu}(x)\right]$$

で与えられる.

運動方程式を導出し, Coulomb力やLorentz力が再現されることを示せ

$x^\mu(s)$について変分をとると,

$$\delta S=\int_{-\infty}^{\infty}ds\left[mc\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right.$$

$$\left.+q\frac{d\delta x^\mu}{ds}A_\mu(x)+q\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\partial_\mu A_\nu(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\delta x^\mu\left[\frac{d}{ds}\left(-mc\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right)-q\underbrace{\frac{d}{ds}A_\mu(x)}_{=\frac{dx^\nu}{ds}\partial_\nu A_\mu(x)}+q\frac{dx^\nu}{ds}\partial_\mu A_\nu(x)\right]$$

$$+(\text{表面項})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\delta x^\mu\left[\frac{d}{ds}\left(-mc\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right)+q\frac{dx^\nu}{ds}F_{\mu\nu}(x)\right]+(\text{表面項})$$

よって運動方程式は

$$\frac{d}{ds}\left(mc\left(-\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right)=q\frac{dx^\nu}{ds}F_{\mu\nu}(x)\quad\cdots\cdots(※)$$

ここで sを固有時刻τにとると.

$$(※)\iff m\frac{dx^\mu}{d\tau^2}=qF^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

よって4元力F^μは $F^\mu=qF^\mu{}_\nu\dfrac{dx^\nu}{d\tau}$ で与えられる.

最後に、非相対論的極限 $|\dot{x}| \ll c$ で
Coulomb力やLorentz力が得られることを確認しよう。

- 4元力の空間成分は

$$F^i = q\frac{dx^0}{d\tau}F^i{}_0 + q\frac{dx^j}{d\tau}F^i{}_j$$

$$= q\frac{dt}{d\tau}cF_{i0} + q\frac{dt}{d\tau}\dot{x}^j F_{ij}$$

$$= \frac{dt}{d\tau}\left(qE_i + q\,\varepsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k\right)$$

- §1 問題3より、非相対論的極限で運動方程式が
$m\ddot{x}^i \simeq F^i$ と近似できることを思い出そう。

同極限で F^i は

$$F^i \simeq qE_i + q\,\varepsilon_{ijk}v_j B_k \Leftrightarrow \mathbb{F} \simeq q\mathbb{E} + q\,\dot{\mathbb{x}}\times\mathbb{B}$$

以上より Coulomb力とLorentz力が再現できた//

問題2.

ϕ の Lorentz 変換を $\phi'(x')=\phi(x)$ $(x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$ で定義する

1. Lagrangian 密度 $\mathcal{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]$ が Lorentz スカラーであること.
   つまり $\mathcal{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]=\mathcal{L}[\phi'(x'),\partial_\mu\phi'(x')]$ であることを示せ.
   $\llcorner$ x'^μ に関する微分

2. 作用 (2-e) が Lorentz 不変なことを示せ.

1.
$$\mathcal{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}-\frac{m^2}{2}\phi(x)$$

$\phi'(x')=\phi(x)$ ⟶
$$=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\sigma}}-\frac{m^2}{2}\phi'(x')$$

$$\llcorner=\eta^{\mu\nu}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\rho}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\sigma}$$

$$=\eta^{\rho\sigma}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\rho}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\sigma}$$

$$=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\nu}-\frac{m^2}{2}\phi'(x') \quad //$$

2. 1の結果より.

$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x)]=\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi'(x'),\partial\phi'(x')]$$

ここで
$$d^4x'=\underbrace{\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|}_{\text{Jacobian}}d^4x=|\det\Lambda^\mu{}_\nu|\,d^4x=d^4x$$
$\llcorner$ $|\det\Lambda|=1$ を用いた.

よって
$$S=\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi'(x'),\partial\phi'(x')]=\int d^4x'\,\mathcal{L}[\phi'(x'),\partial\phi'(x')] \quad //$$

問題3

A_μ の Lorentz 変換を $A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x)$ $(x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$ で定義する.

1. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の Lorentz 変換を求めよ.

2. Maxwell 作用 (2-f) が Lorentz 不変なことを示せ.

1. まず.

$$\frac{\partial A'_\nu(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Lambda_\nu{}^\sigma A_\sigma(x)\right) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \partial_\rho A_\sigma(x)$$

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Longleftrightarrow x^\mu = x'^\nu \Lambda_\nu{}^\mu$

同様に

$$\frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\nu{}^\sigma \Lambda_\mu{}^\rho \partial_\sigma A_\rho(x)$$

よって

$$F'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial A'_\nu(x')}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma}(x)$$

2. Maxwell 理論の Lagrangian 密度が Lorentz スカラーなことを示せば良い.

$$\mathcal{L}[A'_\mu(x'), \partial_\mu A_\nu(x)] = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} F'_{\mu\nu}(x') F'_{\rho\sigma}(x')$$

$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\eta^{\mu\rho}\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\rho{}^\gamma}_{=\eta^{\alpha\gamma}}\underbrace{\eta^{\nu\sigma}\Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\sigma{}^\delta}_{=\eta^{\beta\delta}} F_{\alpha\beta}(x) F_{\gamma\delta}(x)$$

$$= -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta}(x) F_{\gamma\delta}(x) \;/\!/$$