

§1

問題1

- ベクトル三重積の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ を導出せよ.
- これを用いて $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{E}$ を示せ.

1. 完全反対称テンソル ϵ_{ijk} を用いると、ベクトルの外積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad \text{と表せる. } (\epsilon_{123} = 1, \epsilon_{132} = -1, \text{etc})$$

↑ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の i 成分の意味

$$\begin{aligned} \text{よって, } (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k \\ &= \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ と $\epsilon_{kan} = \epsilon_{akn}$ を用いると.

↑ 各自 check!

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \quad \text{--- } \textcircled{\times} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_i - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) c_i \quad // \end{aligned}$$

2. $\textcircled{\times}$ を用いると.

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}))_i &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l E_m \\ &= \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) E_i \\ &= (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E})_i \quad // \end{aligned}$$

問題2

1. (1-a)の一般解を求め、波を記述していることを確認せよ。

2. 簡単のため、 x 方向に伝わる波を考えると: $\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0$.

波動方程式は Galilei 変換 $t' = t$, $x' = x - ut$ のもとで、どう変換されるか?
特に、波の速さが変化することを確認せよ。

1. 物理数学で習っているように、空間 1次元の場合のみ考える。
このとき、波動方程式は次のように変形される。

$$0 = \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(t, x) = \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f(t, x)$$

ここで、変数 $x^\pm = x \pm vt$ を導入する。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x^+}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x^+} + \frac{\partial x^-}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x^-} = \frac{\partial}{\partial x^+} + \frac{\partial}{\partial x^-} \\ \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial x^+}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^+} + \frac{\partial x^-}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^-} \right) = \frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{\partial}{\partial x^-} \end{cases}$$

よって、 $0 = \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = -4 \frac{\partial^2}{\partial x^+ \partial x^-} f$ となる。

f は x^+ と x^- の片方にしか依存しない。

f が $x^\pm$ にのみ依存する定速度 $\pm v$ の波を表す。

2. $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \end{cases} \quad (\text{よ})$

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \frac{u}{v} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) f = 0 //$$

※ 解は速度 $\pm v - u$ の波を表す。

※ 波動方程式は Galilei 変換のもとで不変でない。

問題3

0. Lorentz計量 $\eta_{\mu\nu}$ の意味やテンソルのLorentz変換性を復習しておいてください。

1. 特殊相対論における点粒子の運動方程式を書き下し

(a) 運動方程式が Lorentz 不変なこと。

(b) 粒子が低い極限で Newton の運動方程式に帰着することを確認せよ。

0. 省略

1. 固有時刻 τ を

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad \text{--- (1*)}$$

固有時刻 τ における点粒子の位置を $x^\mu(\tau)$ のように表しよう。

これを用いて相対論的粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \quad (m: \text{質量}, F^\mu: 4\text{元力})$$

で与えられる。

(a) Lorentz 変換のもとで固有時刻 τ は不変。

一方 $x^\mu(\tau)$ と4元力 F^μ は

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau), \quad F^\mu \rightarrow F'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu F^\nu$$

$$\text{ここで: } \frac{dx'^\mu}{d\tau^2} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau^2} \quad \text{に注意しよう。} \quad \text{と変換。}$$

($\Lambda^\mu{}_\nu$ が τ に依存しないことを用いた)

$$\text{よって, } m \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} - F'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (m \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} - F^\nu) = 0$$

つまり 運動方程式は Lorentz 不変 //

(b) 時刻 t における位置ベクトルに $\mathbf{x}(t)$ としよう。

また、 $\textcircled{2}$ より $\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ ($v = \dot{\mathbf{x}}$, $v = |\mathbf{v}|$) ← t 微分

より、 $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}}{c^2 - v^2} \right)$$

・ 非相対論的極限 $v \ll c$ では、 $\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} \simeq \ddot{\mathbf{x}}$

・ 4元力 F^μ の空間成分 F^i を粒子に働く力 $\mathbf{F}$ とみなす。

$$0 = m \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - F^i \simeq m \ddot{x}^i - F^i //$$

問題4

1. Bianchi恒等式と(1-c)の2つの方程式が等価なことを確認せよ.
2. Bianchi恒等式が定義式 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ から導くことを示せ.

1. $i, j, k = 1, 2, 3$ に対し

$$\varepsilon^{0ijk} = -\varepsilon^{i0jk} = \varepsilon^{ij0k} = -\varepsilon^{ijk0} = \varepsilon^{ijk} \text{ が成立する.}$$

・これを利用して, Bianchi 恒等式の $\mu=0$ 成分は

$$0 = \varepsilon^{0\rho\sigma} \partial_\rho F_{\sigma} = \varepsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = \varepsilon^{ijk} \partial_i F_{jk} = \varepsilon_{ijk} \partial_i F_{jk}$$

$\varepsilon^{00\rho\sigma} = 0$ etc を用いた $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$

(i, j, k の上か下かで符号は変えない)

・同様に, $\mu=i$ 成分は

$$0 = \varepsilon^{i\rho\sigma} \partial_\rho F_{\sigma} = \underbrace{\varepsilon^{i0jk} \partial_0 F_{jk}}_{= -\varepsilon_{ijk} \partial_0 F_{jk}} + \underbrace{\varepsilon^{ij0k} \partial_j F_{0k}}_{= \varepsilon_{ijk} \partial_j F_{0k}} + \underbrace{\varepsilon^{ijk0} \partial_j F_{k0}}_{= -\varepsilon_{ijk} \partial_j F_{k0}}$$

$$\text{よって, } \varepsilon_{ijk} \partial_0 F_{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_0 F_{jk} //$$

$$2. \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho F_{\sigma} = \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu - \underbrace{\varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu}_{= -\varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu}$$

$= -\varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu$
 $\uparrow$ dummy 指標の付け換え $\rho \leftrightarrow \sigma$

$$\text{さらに, } \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu = \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu = -\varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu$$

$\uparrow$ ∂_ρ と ∂_σ は可換 $\uparrow$ $\varepsilon^{\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\sigma\rho}$

$$\text{よって, } \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu = -\varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu \Leftrightarrow \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A_\mu = 0 //$$

※ $\nu \leftrightarrow \rho$ のみで置き換えに対し, $\varepsilon^{\mu\rho\sigma}$ が反対称, $\partial_\rho \partial_\sigma A_\mu$ が対称なことが分