

第1回「常微分方程式論」 2022年4月14日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

1 階常微分方程式

$y = y(x)$ とし、導関数を $y', y'', \dots, y^{(n)}$ のように表す。 y に関する n 階常微分方程式とは、

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

のように表される方程式のことをいう。特に

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

のように表されるときは、正規形という。

正規形の 1 階常微分方程式

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

を考える。ここで $y(x_0) = y_0$ を初期条件といい、(1) を初期値問題という。 x_0 を含むある区間において (1) を満たす関数 y のことを (1) の解といい、有限回の代数、微分、積分操作によって (1) の解を具体的に求める方法のことを求積法という。そのような解は x_0, y_0 に依存するが、 x_0, y_0 を内包する任意定数を用いて表される解を一般解という。

例題 1

$y(x) = e^{kx}$ は初期値問題 $y' = ky, y(0) = 1$ の解であることを確かめよ。また、 $y' = ky$ の一般解を求めよ。

変数分離形

$f(x, y) = g(x)h(y)$ となる場合、

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

のように表される方程式を変数分離形という。(2) の解を形式的に求める際は、 $y' = dy/dx$ を分数のように見なして

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

と表し、両辺を次のように積分する。

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(y)} dy = \int_{x_0}^x g(x) dx.$$

例題 2

$x_0 \neq 0$ とする。初期値問題

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

の解を求めよ。

方程式 $y' = -2xy^2$ の一般解は、

$$y = \frac{1}{x^2 + c}, \quad c: \text{任意定数}$$

となる。一方、 $y = 0$ も方程式の解であるが、上に示した一般解において任意定数 c をどのように選んでも $y = 0$ を得ることは出来ない。そのような解を特異解という。

同次形

方程式が

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0$$

の形で書けるときの同次形という。この場合、変数変換 $u(x) = y(x)/x$ によって、

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}, \quad u(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

が得られる。これは変数分離形なので、先に示した方法で解くことが出来る。

例題 3

$x_0 \neq 0$ とする。初期値問題

$$y' = \frac{x+y}{2x}, \quad y(x_0) = y_0$$

の解を求めよ。

演習問題 1

次の初期値問題の解を求めよ。

$$y' = y(1-y), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

※演習問題の解答は BEEF から提出して下さい。締切：授業翌日（金曜日）の正午。

第1回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年4月14日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 1

次の初期値問題の解を求めよ.

$$y' = y(1 - y), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

解答 $\frac{e^x}{1 + e^x}$

解説 変数分離形なので，形式的に

$$\frac{1}{y(1-y)} dy = dx \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = dx$$

とし，両辺を積分すると

$$\log |y| - \log |y(0)| - \log |1-y| + \log |1-y(0)| = x$$

$$\Leftrightarrow \log \left| \frac{y}{1-y} \frac{1-y(0)}{y(0)} \right| = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = \frac{y(0)}{1-y(0)} e^x = e^x$$

を得る．これを y について解けば

$$y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

を得る．

第2回「常微分方程式論」 2022年4月21日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

線形微分方程式

$p(x)$, $q(x)$ を連続関数とするとき,

$$y' + p(x)y = q(x)$$

を線形微分方程式という. 特に $q = 0$ であるとき同次といい, そうでないとき非同次という. 線形微分方程式の初期値問題

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

の解は

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{-\int_s^x p(t)dt} q(s)ds \quad (2)$$

である. これを次の手順 (定数変化法) で確かめよう.

1) 同次方程式

$$y' + p(x)y = 0$$

の一般解を求める. これは

$$y(x) = ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}, \quad c: \text{任意定数}$$

となる.

2) 上の一般解において, 任意定数 c を x の関数 $u(x)$ で置き換えると

$$y(x) = u(x)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \quad (3)$$

を得る. これを初期値問題 (1) の第 1 式に代入すると

$$u'e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} = q(x)$$

を得る. したがって

$$u(x) = \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds + u(x_0) \quad (4)$$

を得る. $u(x_0) = y(x_0) = y_0$ に注意し, (4) を (3) に代入すれば, (2) を得る.

例題 1

次の線形微分方程式の初期値問題を解け.

$$(1) \quad y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$$

$$(2) \quad y' + \frac{y}{x} = x^2, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \neq 0.$$

$n \neq 0, 1$ に対し,

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

を **Bernoulli** の微分方程式という. これは線形微分方程式ではないが, 変数変換 $u = y^{1-n}$ を行くと

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

となり, 線形方程式が得られる.

次の式は **Riccati** の微分方程式と呼ばれる.

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0.$$

一般に初等的な解法は無いが, 一つの解 y_1 が分かっているとき, 変数変換 $u = y - y_1$ により

$$u' + [q(x) + 2p(x)y_1(x)]u = -p(x)u^2$$

となり, Bernoulli の微分方程式に帰着される.

例題 2

次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad y' - ry = -\frac{r}{K}y^2.$$

$$(2) \quad y' + y^2 - 2xy + x^2 - 2 = 0.$$

ただし $y_1(x) = x + 1$ が一つの解.

演習問題 2

次の初期値問題の解を求めよ.

$$y' + 2y = e^{2x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

第2回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年4月14日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 2

次の初期値問題の解を求めよ.

$$y' + 2y = e^{2x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

解答 $\frac{1}{(1-x)e^{2x}}$

解説 Bernoulli の微分方程式 ($n = 2$) なので,
 $u = y^{1-2} = y^{-1}$ とすると

$$u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{-2y + e^{2x}y^2}{y^2} = 2u - e^{2x}$$

を得る. また, $u(0) = y(0)^{-1} = 1$ である. よって線形方程式の初期値問題

$$u' - 2u = -e^{2x}, \quad u(0) = 1$$

を解けば良い. 定数変化法の公式より

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0)e^{2x} + \int_0^x e^{2(x-s)}(-e^{2s})ds \\ &= (1-x)e^{2x} \end{aligned}$$

を得る. $y = u^{-1}$ なので,

$$y(x) = \frac{1}{(1-x)e^{2x}}$$

を得る.

第3回「常微分方程式論」 2022年4月28日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

Riccati の微分方程式

次の式は **Riccati** の微分方程式と呼ばれる。

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0.$$

一般に初等的な解法は無いが、一つの解 y_1 が分かっているとき、変数変換 $u = y - y_1$ により

$$u' + [q(x) + 2p(x)y_1(x)]u = -p(x)u^2$$

となり、Bernoulli の微分方程式に帰着される。

例題 1

次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y' + y^2 - 2xy + x^2 - 2 = 0.$$

ただし $y_1(x) = x + 1$ が一つの解。

全微分方程式

$H(x, y) = 0$ や $H(x, y) = (\text{定数})$ などの形で表される微分方程式の解を陰関数解という。例えば、微分方程式

$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

は、楕円の方程式

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c, \quad c: \text{任意定数} \quad (1)$$

を陰関数解（一般解）としてもつ。

$H(x, y)$ は連続な偏導関数を持ち、 $H(x, y) = c$ （定数）とする。このとき、 H の全微分は

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy = 0$$

を満たす。例えば、(1) については

$$\frac{2x}{9} dx + \frac{2y}{4} dy = 0 \Leftrightarrow 4x dx + 9y dy = 0$$

が成り立つ。一般に

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

の形で表される方程式を、全微分方程式という。

p, q はある領域で微分可能であり、導関数は連続とする。その領域で

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$$

を満たすある関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ が存在するとき、(2) は完全微分形という。完全微分形であれば、(2) は φ の全微分

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

であるため、 $\varphi(x, y) = c$ （定数）が全微分方程式の陰関数解として得られる。(2) が完全微分形であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

である。初期条件 $y(x_0) = y_0$ を満たす完全微分形の全微分方程式 (2) は、以下の手順で解ける：

1) $\partial \varphi / \partial x = p$ より、 $\varphi = \int_{x_0}^x p(s, y) ds + g(y)$ と置ける。

2) 1) で得た式を y について偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial p}{\partial y}(s, y) ds + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial q}{\partial x}(s, y) ds + g'(y) \\ &= q(x, y) - q(x_0, y) + g'(y) \end{aligned}$$

を得る。

3) $\partial \varphi / \partial y = q$ と上の式を比較して、 $g'(y) = q(x_0, y)$ を得る。これより g が求まる。

例題 2

次の全微分方程式の解を求めよ。

$$(xy^2 + e^y)dx + (x^2y + 2y + xe^y)dy = 0, \\ y(0) = y_0.$$

演習問題 3

次の全微分方程式の一般解を求めよ。

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0.$$

第3回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年4月28日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題3

次の全微分方程式の一般解を求めよ。

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0.$$

解答 $\frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4} = c, \quad c: \text{任意定数}$

解説 $p(x, y) = x^3 + 3xy^2, \quad q(x, y) = 3x^2y + y^3$
とすると,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 6xy$$

なので、この全微分方程式は完全微分形である。
 $\partial\varphi/\partial x = p$ より,

$$\begin{aligned}\varphi &= \int p dx + g(y) \\ &= \int (x^3 + 3xy^2) dx + g(y) \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + c + g(y), \quad c: \text{任意定数}\end{aligned}\tag{1}$$

と置ける。これを y について偏微分すると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3x^2y + g'(y)$$

を得る。 $\partial\varphi/\partial y = q = 3x^2y + y^3$ を上の式と比較して

$$g'(y) = y^3 \Leftrightarrow g(y) = \frac{y^4}{4} + c', \quad c': \text{任意定数}$$

を得る。これを (1) に代入して

$$\varphi = \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4} + c + c'$$

を得る。 $\varphi = c''$ (c'' : 任意定数) が一般解であることから

$$\frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4} = c, \quad c: \text{任意定数}$$

を得る ($-c - c' + c''$ を改めて c とした)。

第4回「常微分方程式論」 2022年5月12日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

包絡線

与えられた微分方程式の一般解を $y(x; c)$ (c : 任意定数) と表す. すべての一般解 $y(x; c)$ に接する曲線を包絡線という.

次の式は **Clairaut** の微分方程式と呼ばれる.

$$y = xy' + f(y')$$

正規形 ($y' = f(x, y)$ の形) ではないことに注意されたい. 両辺を微分して整理すれば,

$$y'' [x + f'(y')] = 0$$

を得る. $y'' = 0$ のときは $y' = c$ (定数) なので,

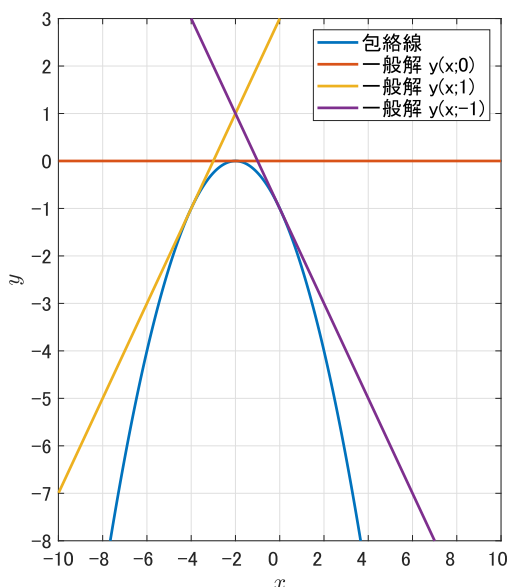
$$y = cx + f(c)$$

を得る. これは一般解である. 一方, $x + f'(y') = 0$ のときは, y' を消去することで特異解が得られる. この特異解は包絡線の方程式を与える.

例題 1

次の微分方程式の一般解と特異解 (包絡線の方程式) を求めよ.

$$y = xy' + (y')^2 + 2y'$$



2階常微分方程式

正規形の2階常微分方程式は

$$y'' = f(x, y, y')$$

と表される. 一般解は二つの任意定数 c_1, c_2 を含み, $y(x; c_1, c_2)$ と表される. 初期値問題では, 初期条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

が課される.

いくつかの特別な場合, 2階微分方程式は, これまでの方法で解けるような1階微分方程式に帰着される. 例えば, $y'' = f(x, y')$ の場合, $z = y'$ と置くことで, 1階の式 $z' = f(x, z)$ が得られる.

例題 2

次の初期値問題の解を求めよ.

$$y'' = x(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$y'' = f(y, y')$ の場合, $z = y'$ として, x の代わりに y を独立変数にすることで,

$$\frac{dz}{dy} = y'' \frac{dx}{dy} = \frac{y''}{y'} = \frac{f(y, z)}{z}$$

を得る. これを解けば, $z = y'$ より, y に関する1階の方程式が得られる.

例題 3

次の初期値問題の解を求めよ.

$$y'' = yy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

演習問題 4

次の微分方程式の一般解と特異解 (包絡線の方程式) を求めよ.

$$y = xy' + 2(y')^2$$

第4回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年5月12日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 4

次の微分方程式の一般解と特異解（包絡線の方程式）を求めよ．

$$y = xy' + 2(y')^2$$

解答

一般解： $y = cx + 2c^2$, c : 任意定数

特異解： $y = -\frac{x^2}{8}$

解説 両辺を微分すれば

$$y' = y' + xy'' + 4y'y'' \Leftrightarrow (x + 4y')y'' = 0$$

を得る． $y'' = 0$ のときは， $y' = c$: 任意定数であり，これを微分方程式に代入することで

$$y = cx + 2c^2, \quad c : \text{任意定数}$$

が一般解として得られる． $x + 4y' = 0$ のときは， $y' = -x/4$ を微分方程式に代入することで

$$y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} = -\frac{x^2}{8}$$

が特異解として得られる．

第5回「常微分方程式論」 2022年5月19日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

特性方程式

定数係数の2階線形常微分方程式

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

を考える。一般解は

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 : \text{任意定数}$$

で表される。ただし y_1 と y_2 は (1) の一次独立な解であり、基本解と呼ばれる。

$y = e^{\lambda x}$ を (1) に代入すると

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

を得る。したがって

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

を得る。これを (1) の特性方程式という。特性方程式の根を λ_1, λ_2 とする。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、(1) の基本解は $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ であり、一般解は

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 : \text{任意定数}$$

である。 $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき、(1) の基本解は

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}$$

であり、一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}, \quad c_1, c_2 : \text{任意定数}$$

である。

例題 1

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1) $y'' + y' - 2y = 0$

2) $y'' + 8y' + 16y = 0$

3) $y'' + y = 0$

線形常微分方程式系

$y_1, y_2, \dots, y_n$ を未知変数とする線形常微分方程式系は

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j + b_i(x), \quad 1 \leq i \leq n$$

で与えられる。ただし各 a_{ij} と b_i は連続関数とする。行列とベクトルを使うと

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

と表すことができる。特に $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ であるとき、

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

を斉次線形常微分方程式系という。例えば、 n 階の方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

は、 $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$ および

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

とすることで、斉次方程式系で表すことができる。 A が定数行列で、 n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ が一次独立ならば、一般解は

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{p}_n e^{\lambda_n t},$$

$c_1, c_2, \dots, c_n : \text{任意定数}$

となる。

例題 2

次の式を斉次線形常微分方程式系で表し、一般解を求めよ。

$$m y'' = -k y, \quad m, k > 0.$$

演習問題 5

次の初期値問題の解を求めよ。

$$y'' + y' - 6y = 0,$$
$$y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

第5回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年5月19日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題5

次の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{aligned}y'' + y' - 6y &= 0, \\ y(0) &= 10, \quad y'(0) = 0.\end{aligned}$$

解答 $6e^{2x} + 4e^{-3x}$

解説 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

である. これを解くと, $\lambda = 2, -3$. よって一般解は

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}, \quad c_1, c_2 : \text{任意定数}$$

である. 初期条件より

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 + c_2 = 10 \\ y'(0) &= 2c_1 - 3c_2 = 0\end{aligned}$$

である. これを c_1, c_2 について解くと,

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 4$$

を得る. よって求める解は

$$y = 6e^{2x} + 4e^{-3x}$$

である.

第6回「常微分方程式論」 2022年5月26日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

非斉次方程式

非斉次2階線形常微分方程式

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad (1)$$

を考える。ただし a_1, a_2, b はある区間上の連続関数とする。対応する斉次方程式

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2)$$

の一般解を

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 : \text{任意定数}$$

と表す (y_1, y_2 が基本解)。また、(1) のある特殊解を y_p とする。このとき、(1) の一般解は

$$y = y_p + y_h$$

で与えられる。

例として、非斉次方程式

$$y'' + 2y' + 101y = 10.4e^x \quad (3)$$

を考える。右辺が指数関数なので、 $y_p = Ke^x$ を代入して係数比較すると、 $K = 0.1$ を得る。すなわち、特殊解は

$$y_p = 0.1e^x$$

である。このように特殊解を求める方法を未定係数法という。また、対応する斉次方程式

$$y'' + 2y' + 101y = 0$$

の一般解は

$$y_h = e^{-x}(A \cos 10x + B \sin 10x), \\ A, B : \text{任意定数}$$

である。よって (3) の一般解は

$$y = y_p + y_h \\ = 0.1e^x + e^{-x}(A \cos 10x + B \sin 10x), \\ A, B : \text{任意定数}$$

である。

定数変化法

斉次方程式 (2) の一般解 $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ が得られているときに、非斉次方程式 (1) の特殊解 y_p を求める別の方法として、定数変化法がある。 c_1, c_2 が関数であるとして、

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

という形の特殊解を求める。条件

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad (4)$$

を仮定すると $y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ を得る。さらに y_p'' を求め、(1) に代入して整理すれば

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = b \quad (5)$$

を得る。(4) と (5) より c_1, c_2 を求めると

$$c_1 = - \int \frac{b y_2}{W} dx, \quad c_2 = \int \frac{b y_1}{W} dx$$

を得る。ただし

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

であり、このような W をロンスキアンという。

例題 1

次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y'' + y = \sec x$$

ただし $\sec x = 1/\cos x$ である。

演習問題 6

次の初期値問題の解を求めよ。

$$y'' - 6y' + 13y = 4e^{3x}, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

第6回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年5月26日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 6

次の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{aligned}y'' - 6y' + 13y &= 4e^{3x}, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 4.\end{aligned}$$

解答 $e^{3x}(1 + \cos 2x - \sin 2x)$

解説 $y_p = Ke^{3x}$ を代入して計算すると

$$(9 - 18 + 13)Ke^{3x} = 4Ke^{3x} = 4e^{3x}$$

を得る. よって $K = 1$ であり, 特殊解は $y_p = e^{3x}$. 一方, 斉次方程式

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

の特性方程式は

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

であり, これを解くと,

$$\lambda = 3 \pm 2i$$

を得る. よって斉次方程式の一般解は

$$\begin{aligned}y_h &= e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x), \\ A, B &: \text{任意定数}\end{aligned}$$

である. したがって, 非斉次方程式の一般解は

$$\begin{aligned}y &= y_p + y_h \\ &= e^{3x}(1 + A \cos 2x + B \sin 2x), \\ A, B &: \text{任意定数}\end{aligned}$$

である. 初期条件より

$$\begin{aligned}y(0) &= 1 + A = 2, \\ y'(0) &= 3(1 + A) + 2B = 4\end{aligned}$$

を得る. これを解くと, $A = 1$ かつ $B = -1$.
よって初期値問題の解は

$$y = e^{3x}(1 + \cos 2x - \sin 2x)$$

となる.

第7回「常微分方程式論」 2022年6月2日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

行列の指数関数

A を $n \times n$ 行列とする. Taylor 展開からの類推で, 行列の指数関数は

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

で定義される. ここで $A^0 = I$ (単位行列) である. また, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!}$$

である. $e^{0A} = I$ に注意されたい. 項別微分可能であることから,

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}$$

を得る. これより, 斉次微分方程式系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (1)$$

の解は $\mathbf{y}(x) = e^{xA} \mathbf{y}_0$ であることがわかる. このとき, e^{xA} を基本解行列という.

例として, 減衰のない単振動の方程式

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2)$$

を考える. このとき,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすれば, (1) が得られる. 一方,

$$A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} I, \quad A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A, \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

に注意して計算すれば, 基本解行列

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix}$$

を得る. これより, $y = \cos \omega x$ が (2) の解であることがわかる.

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし, 対応する固有ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ (一次独立) とする. このとき

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$$

とすると, $AP = P\Lambda$ が成り立つ. したがって $\Lambda = P^{-1}AP$ であり,

$$\Lambda^k = P^{-1}A^kP, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

である. このことから,

$$e^{xA} = P^{-1}e^{x\Lambda}P$$

であり, 基本解行列は次のようになる.

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} P^{-1}$$

例題 1

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ のとき, e^{xA} を求めよ.

また, 非斉次方程式系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

演習問題 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, 非

斉次方程式系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$$

の解を求めよ.

第7回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年6月2日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, 非

斉次方程式系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$$

の解を求めよ.

解答 $\begin{pmatrix} e^x - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

解説 A の固有値は $1, 3$ であり, 対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 基本解行列は

$$\begin{aligned} e^{xA} &= P \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} - e^x \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. 求める解は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \int_0^x e^{(x-\sigma)A} \mathbf{b} \, d\sigma \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} e^{x-\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\sigma = \begin{pmatrix} e^x - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

第8回「常微分方程式論」 2022年6月16日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

特性方程式（ n 階）

定数係数の n 階線形常微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$$

を考える。このときの特性方程式は

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

である。これは重複を許して n 個の解をもつ。重複が無い場合、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を特性方程式の解とすると、 $b = 0$ であるような斉次方程式の基本解は

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

となる。 λ_k が ℓ_k 個重複しているときは、

$$e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{\ell_k-1} e^{\lambda_k x}$$

が基本解に含まれる。

例題 1

次の方程式の一般解を求めよ。

- 1) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$
- 2) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

非斉次 ($b \neq 0$) の場合、特殊解 y_p と、対応する斉次方程式の一般解 y_h の和 $y_p + y_h$ によって、非斉次方程式の一般解が得られる。 y_p を求める際、2 階のときと同様に未定係数法を利用できることがある。例として、

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}$$

の一般解を求める。対応する斉次方程式は

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$$

であり、特性方程式は

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

である。よって $\lambda = -1$ が 3 重根であり、基本解は

$$e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}$$

である。よって

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

が斉次方程式の一般解となる (c_1, c_2, c_3 : 任意定数)。続いて、 y_p を求める。非斉次方程式の右辺の項は $30e^{-x}$ なので、 $y_p = K e^{-x}$ を代入して係数比較を行う方針が考えられる。しかし、 e^{-x} が基本解に含まれるため、そのまま代入すると左辺が 0 になってしまう。このような場合、 $x^k e^{-x}$ が基本解に含まれないような最小の k を求め、 $y_p = K x^k e^{-x}$ を代入して係数比較を行う。今の場合、 $k = 3$ であり、 $y_p = K x^3 e^{-x}$ を代入して係数比較を行うと、 $K = 5$ を得る。よって $y_p = 5x^3 e^{-x}$ であり、

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h \\ &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + 5x^3) e^{-x} \\ c_1, c_2, c_3 &: \text{任意定数} \end{aligned}$$

が非斉次方程式の一般解となる。

オイラーの微分方程式

次の式はオイラーの微分方程式と呼ばれる。

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad x > 0.$$

これは $x = e^t$ とおいて、 $z(t) = y(e^t)$ に関する方程式に帰着して解けばよい。

例題 2

次の方程式の一般解を求めよ。

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

演習問題 8

次の初期値問題の解を求めよ。

$$\begin{aligned} y^{(3)} - 4y'' - y' + 4y &= 30e^{2x}, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2. \end{aligned}$$

第8回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年6月16日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 8

次の初期値問題の解を求めよ.

$$\begin{aligned}y^{(3)} - 4y'' - y' + 4y &= 30e^{2x}, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.\end{aligned}$$

解答 $-5e^{2x} + 6e^x + e^{4x}$

解説 対応する斉次方程式

$$y^{(3)} - 4y'' - y' + 4y = 0$$

の特性方程式は

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

であり、根は $\lambda = 1, -1, 4$ である. よって対応する斉次方程式の一般解は

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{4x}, \quad c_1, c_2, c_3 : \text{任意定数}$$

である. 一方, $y_p = Ce^{2x}$ を非斉次方程式に代入すると

$$\begin{aligned}8Ce^{2x} - 16Ce^{2x} - 2Ce^{2x} + 4Ce^{2x} &= 30e^{2x} \\ \Leftrightarrow -6Ce^{2x} &= 30e^{2x}\end{aligned}$$

より, $C = -5$ を得る. よって $y_p = -5e^{2x}$ であり, 非斉次方程式の一般解は

$$\begin{aligned}y &= y_p + y_h \\ &= -5e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{4x} \\ c_1, c_2, c_3 &: \text{任意定数}\end{aligned}$$

となる. 初期条件より

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 - 5 = 2, \\ y'(0) &= c_1 - c_2 + 4c_3 - 10 = 0, \\ y''(0) &= c_1 + c_2 + 16c_3 - 20 = 2\end{aligned}$$

を得るが, これを解くと

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1$$

となる. よって上記の解答を得る.

第9回「常微分方程式論」 2022年6月23日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

周期係数線形微分方程式系

a は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $a(x + \omega) = a(x)$ を満たす周期関数とする．周期係数の1階線形微分方程式の初期値問題

$$y' = a(x)y, \quad y(0) = y_0 \neq 0$$

を考える．この解は

$$y(x) = y_0 e^{\int_0^x a(t) dt}$$

である． $x \rightarrow \infty$ での解の挙動を調べる． a の1周期の平均を

$$b = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(t) dt$$

とし、

$$z(x) = y(x)e^{-bx}$$

とする．このとき、 z は周期 ω の周期関数であることが確かめられる．また

$$y(x) = z(x)e^{bx}$$

と書ける． z が周期関数であることから、 y の $x \rightarrow \infty$ での挙動は e^{bx} によって決まり、 $b < 0$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

が成り立つ．一方、 $b > 0$ ならば $x \rightarrow \infty$ で y は発散する．

例題1

次の初期値問題の解 y は $x \rightarrow \infty$ でどのような挙動を示すか答えよ．

$$y' = (-1 + \cos x)y, \quad y(0) = 1.$$

一般に、斉次線形微分方程式系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \neq 0, \\ \mathbf{y} : n \text{ 列ベクトル}, \quad A : n \times n \text{ 行列}$$

において、係数行列 A が周期関数、すなわち

$$A(x + \omega) = A(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ場合を考える．基本解を

$$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$$

と表すとき、基本解行列は

$$Y(x) = (\mathbf{y}_1(x) \ \mathbf{y}_2(x) \ \dots \ \mathbf{y}_n(x))$$

で与えられる．このとき、 $Y(x + \omega)$ も基本解行列であることがわかる．また、ある正則行列 C が存在して、

$$Y(x + \omega) = Y(x)C$$

が成り立つこともわかる．このとき、 $C = e^{\omega B}$ を満たすある行列 B が存在する．

$$Z(x) = Y(x)e^{-xB}$$

とおけば、 Z は周期 ω の周期関数であることが確かめられる．また

$$Y(x) = Z(x)e^{xB}$$

と書ける． B の相異なる固有値（特性指数）を μ_k ($1 \leq k \leq m \leq n$) とするとき、すべての k で $\operatorname{Re} \mu_k < 0$ ならば、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = 0$$

が成り立つ．一方、ある k で $\operatorname{Re} \mu_k > 0$ ならば、 $x \rightarrow \infty$ で $\mathbf{y}$ は発散する． C の固有値（特性乗数）を λ_k とするとき、

$$\mu_k = \frac{\log \lambda_k}{\omega}$$

が成り立つ．よって解の収束と発散は $|\lambda_k|$ と1の大小関係から調べられる．

演習問題9

次の初期値問題の解 $\mathbf{y}$ は $x \rightarrow \infty$ でどのような挙動を示すか答えよ．

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 + \sin x & 0 \\ 0 & 1 - \cos x \end{pmatrix} \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第9回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年6月23日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 9

次の初期値問題の解 $\mathbf{y}$ は $x \rightarrow \infty$ でどのような挙動を示すか答えよ。

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 + \sin x & 0 \\ 0 & 1 - \cos x \end{pmatrix} \mathbf{y},$$
$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解答 発散する（第1成分は0に収束し、第2成分は発散する。）

解説 成分ごとに書くと

$$y_1' = (-1 + \sin x)y_1, \quad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = (1 - \cos x)y_2, \quad y_2(0) = 1$$

である。各係数は周期 2π の周期関数であり、1周期の平均は

$$b_1 = \frac{\int_0^{2\pi} (-1 + \sin t) dt}{2\pi} = -1,$$
$$b_2 = \frac{\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt}{2\pi} = 1$$

である。よって $x \rightarrow \infty$ では

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) = \infty$$

である。

別解 基本解行列は

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^x (-1 + \sin t) dt} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^x (1 - \cos t) dt} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-x - \cos x + 1} & 0 \\ 0 & e^{x - \sin x} \end{pmatrix}$$

である。 $Y(2\pi) = Y(0)C = C$ より、

$$C = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}$$

を得る。特性乗数は $e^{-2\pi}$ と $e^{2\pi}$ であり、 $e^{2\pi} > 1$ であるため、解は発散する。

第10回「常微分方程式論」 2022年6月30日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

解の存在と一意性

これまで講義中に考えた微分方程式には一般解が存在し、初期値問題にはただ一つの特解が存在していた。しかし、例えば次の初期値問題には解が存在しない。

$$|y'| + |y| = 0, \quad y(0) = 1.$$

一方、次の問題には無限個の解が存在する。

$$xy' = y - 1, \quad y(0) = 1.$$

1 階常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

を考える。 y が (1) の解であるとは、 y が x_0 の近傍で C^1 級であり、 (1) を満たすことをいう。

正定数 $a, b > 0$ に対して、閉集合

$$\bar{R} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

を考える。 f は $\bar{R}$ において連続とする。 また、ある定数 $L > 0$ が存在して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \\ (x, y_1), (x, y_2) \in \bar{R}$$

が成り立つ（リプシッツ連続）とする。

(1) の解を求めることは、

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

を満たす x_0 の近傍で連続な関数 y を求めることと同値である。以下、そのような y を逐次近似法によって求める。

定数 M と a_1 を次のように定める。

$$M = \sup_{(x, y) \in \bar{R}} |f(x, y)|,$$

$$a_1 = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

区間 $\bar{I} : |x - x_0| \leq a_1$ での関数列 $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ を

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

で定める。このとき、ある $y \in C(\bar{I})$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \bar{I}} |y_n(x) - y(x)| = 0$$

であることが分かる。したがって、

$$y(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

であるが、 f のリプシッツ連続性より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

が分かる。よって y が求める解である。

例題 1

a を定数とする。初期値問題

$$y' = ay, \quad y(0) = 1$$

を逐次近似法で解け。

y, z を (1) の解とする。 f のリプシッツ連続性より、

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt \right| \\ \leq \left| \int_{x_0}^x L|y(t) - z(t)| dt \right|$$

を得る。このとき、 Gronwall の不等式より

$$0 \leq |y(x) - z(x)| \leq 0e^{L|x-x_0|} = 0$$

を得る。よって $y = z$ であり、 (1) の解は存在するとしたら唯一であることが分かる（解の一意性）。

演習問題 10

初期値問題

$$y' = 3x^2 y, \quad y(0) = 1$$

を逐次近似法で解け。

第10回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年6月30日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 10

初期値問題

$$y' = 3x^2y, \quad y(0) = 1$$

を逐次近似法で解け.

解答 e^{x^3}

解説 逐次近似法より

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 3t^2 dt = 1 + x^3,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 3t^2(1+t^3)dt = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2},$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x 3t^2 \left(1 + t^3 + \frac{t^6}{2}\right) dt \\ &= 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6}, \end{aligned}$$

を得る. これより

$$y_n(x) = 1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^3)^n}{n!}$$

と予想できる. 実際, 数学的帰納法で証明できる (省略). $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \cdots$$

を得るが, この右辺は e^{x^3} のマクローリン展開である.

第 11 回「常微分方程式論」 2022 年 7 月 7 日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

ベキ級数法

y が $x = x_0$ を中心とするベキ級数

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

で表されると仮定して、係数 c_n を決めることで解を求める方法をベキ級数法という。

例 1 初期値問題 $y' = 2y + 1$, $y(0) = 0$ を考える。 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を方程式に代入して、係数比較すると

$$c_1 = 1, \quad c_n = \frac{2}{n} c_{n-1}, \quad n \geq 2$$

を得る。また、初期条件より $c_0 = 0$ である。したがって

$$c_n = \frac{2^{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

であり、

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} x^n = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

を得る。

例 2 初期値問題

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

を考える。 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を方程式に代入して、係数比較すると

$$c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を得る。また、初期条件より

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

である。したがって

$$c_n = \begin{cases} \frac{-1}{2k-1}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

であり、

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2k-1} x^{2k} = 1 - \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

を得る。

例題 1

例 2 において、初期条件を

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

に変えたときの解 y を求めよ。

0 以上の整数 n に対し、 **Legendre** の微分方程式

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

を考える。関数

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

はこの方程式を満たし、 **Legendre** 多項式と呼ばれる。具体的に

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \dots$$

である。

演習問題 11

初期値問題

$$(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

の解をベキ級数法で求めよ。

第 11 回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022 年 7 月 7 日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 11

初期値問題

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

の解をベキ級数法で求めよ。

解答 $\frac{1}{1+x^2}$

解説 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ とすると

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

を得る。これを方程式に代入して、 x^n の係数を比較すると、

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + [n(n-1) + 4n + 2]c_n = 0$$

$$\Leftrightarrow c_{n+2} = -c_n$$

を得る。一方、初期条件より $c_0 = 1, c_1 = 0$ なので、

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

である。よって、

$$y = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

を得る。

第12回「常微分方程式論」 2022年7月14日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

常微分方程式系

t を時刻とし、 y_1, y_2 は t の関数とする。常微分方程式系

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (1)$$

を考える。 y_1 - y_2 平面を相平面といい、

$$f_1(y_1^*, y_2^*) = f_2(y_1^*, y_2^*) = 0$$

を満たす点 (y_1^*, y_2^*) を (1) の平衡点という。平衡点では $y_1' = y_2' = 0$ なので、解は平衡点にとどまり続ける。

$$\tilde{y}_1 = y_1 - y_1^*, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - y_2^*$$

について考えることで、初めから原点 $(0, 0)$ が平衡点であると仮定しても一般性は失われない。以後、そのように仮定する。

原点のまわりの Taylor 展開の第1次近似として、以下の線形系を得る：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ただし $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$ とし、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

はヤコビ行列である。 A の固有値 λ_1, λ_2 に対し、線形系 (2) の解 (y_1, y_2) は次を満たす。

- λ_1, λ_2 の実部がいずれも負であれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t), y_2(t)) = (0, 0)$$

である。このとき、(1) の平衡点 $(0, 0)$ は漸近安定という。

例題 1

次の系の平衡点は漸近安定であることを示せ。

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - y_2. \end{cases}$$

より正確には、平衡点が安定であるとは、「任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、初期値と平衡点との距離が δ より小さければ、任意の時刻 $t \geq 0$ において解と平衡点との距離が ϵ より小さい」ことをいう。平衡点が漸近安定であるとは、「平衡点が安定であり、初期値と平衡点との距離が十分小さければ $t \rightarrow \infty$ で解が平衡点に収束する」ことをいう。平衡点が安定でないとき、不安定という。

平衡点 $(0, 0)$ の安定性について次も成り立つ。

- λ_1, λ_2 の実部のいずれか一つでも正であれば、(1) の平衡点 $(0, 0)$ は不安定である。

また、平衡点の近くでの解の振る舞いに応じて、平衡点の種類は次のように分けられる。

- λ_1, λ_2 が同符号の実数ならば、節。
- λ_1, λ_2 が異符号の実数ならば、鞍点。
- λ_1, λ_2 が純虚数ならば、中心。
- λ_1, λ_2 が実部が0でない複素数ならば、らせん点。

例題 2

行列 A が次のように与えられるとき、平衡点の種類と安定性を答えよ。

$$\begin{aligned} 1) A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 2) A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 3) A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

演習問題 12

行列 A が次のように与えられるとき、平衡点の種類と安定性を答えよ。

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

第12回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年7月14日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 12

行列 A が次のように与えられるとき，平衡点の種類と安定性を答えよ．

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

解答 1) 鞍点，不安定 2) 節，漸近安定

解説 固有値を計算すれば判別できる．

1) 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

である．よって固有値は $\lambda = \pm 3$ であり，異符号の実数なので，平衡点は鞍点，不安定である．

2) 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda + 6 & 1 \\ 9 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 27$$

である．よって固有値は

$$\lambda = -6 \pm \sqrt{36 - 27} = -3, -9$$

であり，同符号の負の実数なので，平衡点は節，漸近安定である．

第 13 回「常微分方程式論」 2022 年 7 月 21 日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

平衡点の分類

次の線形系を考える．

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ただし $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

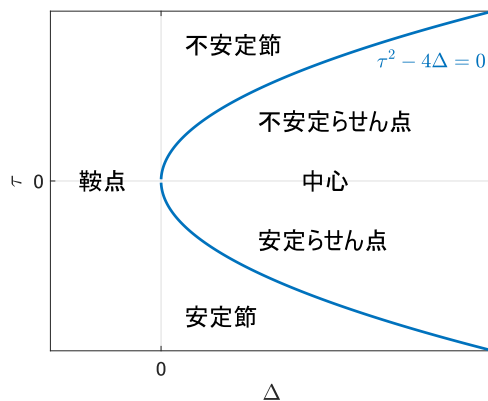
とする．平衡点 $(0, 0)$ の種類と安定性は，固有値 λ_1, λ_2 を求めることで調べることができた．行列 A のトレースを τ ，行列式を Δ とする．すなわち，

$$\tau = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である．このとき

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

に注意されたい．したがって λ_1, λ_2 は τ と Δ だけで決定される．平衡点の安定性と種類については，次の図のようになる．



ロトカ・ヴォルテラの捕食者・被食者モデル

時刻 t における被食者（ウサギなど）の個体数を $y_1(t)$ ，捕食者（キツネなど）の個体数を $y_2(t)$ とする．次の系を考える．

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 - by_1y_2, \\ y_2' &= cy_1y_2 - dy_2. \end{aligned}$$

ただし $a, b, c, d > 0$ である．平衡点は

$$(y_1^*, y_2^*) = (0, 0) \text{ 絶滅}, \quad \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) \text{ 共存}$$

の 2 種類である．安定性と種類を調べると，絶滅の平衡点は鞍点（不安定），共存の平衡点は中心（安定）であることがわかる．

各 $i = 1, 2$ に対し， $y_i' = 0$ である点の集合をヌルクラインという．今のモデルでは

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_1 = \frac{d}{c}, \quad y_2 = \frac{a}{b}$$

がヌルクラインである．ヌルクラインの交点が平衡点である．ヌルクラインは解の大まかな挙動を調べる上で役に立つ．

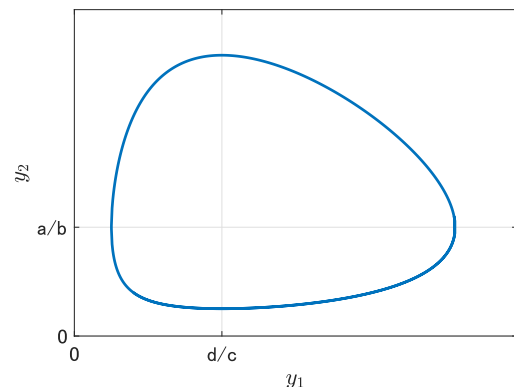
相平面上の解の軌道を考える．今

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{cy_1y_2 - dy_2}{ay_1 - by_1y_2} = \frac{cy_1 - d}{y_1} \cdot \frac{y_2}{a - by_2}$$

を得る．これを解くと

$$a \log y_2 - by_2 = cy_1 - d \log y_1 + C$$

（ C ：任意定数）を得る．これは閉軌道の式であり， C は初期条件 $(y_1(0), y_2(0))$ に依存して決まる．解はこの閉軌道上を動く周期解である．



演習問題 13

次の系の平衡点をすべて求め，各平衡点の種類と安定性を答えよ．

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1(3 - y_1 - 2y_2), \\ y_2' &= y_2(2 - y_1 - y_2). \end{aligned}$$

第13回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年7月21日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 13

次の系の平衡点をすべて求め、各平衡点の種類と安定性を答えよ。

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(3 - y_1 - 2y_2), \\y_2' &= y_2(2 - y_1 - y_2).\end{aligned}$$

解答 (0,0) 不安定節 (0,2) 安定節
(3,0) 安定節 (1,1) 不安定鞍点

解説 平衡点は

$$y_1(3 - y_1 - 2y_2) = 0, \quad y_2(2 - y_1 - y_2) = 0$$

の解なので、

$$(y_1^*, y_2^*) = (0, 0), (0, 2), (3, 0), (1, 1)$$

である。ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 3 - 2y_1 - 2y_2 & -2y_1 \\ -y_2 & 2 - y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

であり、各平衡点でのヤコビ行列の固有値を調べればよい。

(0,0) では

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であり、固有値は同符号の正の実数なので、(0,0) は不安定節。

(0,2) では

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

であり、固有値は同符号の負の実数なので、(0,2) は安定節。

(3,0) では

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、固有値は同符号の負の実数なので、(3,0) は安定節。

(1,1) では

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、トレース τ と行列式 Δ は

$$\tau = -2, \quad \Delta = -1$$

である。 $\Delta < 0$ なので、(1,1) は不安定鞍点。

第14回「常微分方程式論」 2022年7月28日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店

参考書：稲葉寿編「感染症の数理モデル」培風館 担当：國谷

感染症流行のモデル

時刻 $t \geq 0$ における未感染（感受性）人口を $S(t)$ ，感染人口を $I(t)$ ，回復人口を $R(t)$ と表す．次の常微分方程式系の初期値問題は，**SIR** モデルと呼ばれる．

$$\begin{cases} S' = b - \beta SI - \mu S, \\ I' = \beta SI - (\mu + \gamma) I, \\ R' = \gamma I - \mu R, \\ (S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3. \end{cases}$$

ここで $b > 0$ は出生率， $\beta > 0$ は感染率， $\mu > 0$ は死亡率， $\gamma > 0$ は回復率を表す．総人口を $N = S + I + R$ とすると

$$N' = b - \mu N$$

が成り立つ．これを解くと

$$N(t) = \left[N(0) - \frac{b}{\mu} \right] e^{-\mu t} + \frac{b}{\mu}$$

を得る．したがって， $N(0) \leq b/\mu$ ならば，任意の時刻 $t > 0$ で $N(t) \leq b/\mu$ である．また

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{b}{\mu}$$

が成り立つ．以後，総人口 N は初めから定常状態 b/μ であると仮定する．

S と I の式は R に依存しないので， R の式は省略した次の系を考える．

$$\begin{cases} S' = b - \beta SI - \mu S, \\ I' = \beta SI - (\mu + \gamma) I, \\ (S(0), I(0)) = (S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2. \end{cases} \quad (1)$$

次の集合における解を考える．

$$\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 \leq S + I \leq \frac{b}{\mu} \right\}.$$

モデル (1) には，**disease-free** な平衡点

$$E^0 = (S^0, 0) = \left(\frac{b}{\mu}, 0 \right) \in \Omega$$

が常に存在する．また，

$$\mathcal{R}_0 := \frac{\beta b}{\mu(\mu + \gamma)} > 1$$

が成り立つならば，モデル (1) には**エンデミックな平衡点**

$$E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1) \right) \in \Omega$$

がただ一つ存在する． $\mathcal{R}_0$ は**基本再生産数**と呼ばれる．

エンデミックな平衡点 E^* に対するヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} -\mu \mathcal{R}_0 & -(\mu + \gamma) \\ \mu(\mathcal{R}_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これより， $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば E^* は漸近安定であることがわかる．一方， Ω において $S \leq b/\mu - I$ に注意すると，

$$\begin{aligned} I' &\leq \beta \left(\frac{b}{\mu} - I \right) I - (\mu + \gamma) I \\ &= (\mu + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)I - \beta I^2 \end{aligned}$$

を得る．これより， $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

であり，**disease-free** な平衡点 E^0 が漸近安定であることがわかる．

演習問題 14

潜伏期人口 E を考慮した **SEIR** モデル

$$\begin{cases} S' = b - \beta SI - \mu S, \\ E' = \beta SI - (\mu + \varepsilon) E, \\ I' = \varepsilon E - (\mu + \gamma) I, \\ R' = \gamma I - \mu R, \end{cases}$$

のエンデミックな平衡点が存在するための条件を求めよ．

第14回「常微分方程式論」演習問題の解答 2022年7月28日

教科書：南部隆夫著「微分方程式入門」朝倉書店 担当：國谷

演習問題 14

潜伏期人口 E を考慮した SEIR モデル

$$\begin{cases} S' = b - \beta SI - \mu S, \\ E' = \beta SI - (\mu + \varepsilon)E, \\ I' = \varepsilon E - (\mu + \gamma)I, \\ R' = \gamma I - \mu R, \end{cases}$$

のエンデミックな平衡点が存在するための条件を求めよ。

解答 $\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon\beta b}{\mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}$ が 1 より大きいこと

解説 平衡点が満たす式は

$$\begin{cases} 0 = b - \beta SI - \mu S, \\ 0 = \beta SI - (\mu + \varepsilon)E, \\ 0 = \varepsilon E - (\mu + \gamma)I, \\ 0 = \gamma I - \mu R, \end{cases}$$

である。エンデミックな平衡点では $I > 0$ であることに注意して解くと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}{\varepsilon\beta}, \\ E &= \frac{\mu + \gamma}{\varepsilon}I, \\ I &= \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{b}{\mu S} - 1 \right) = \frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1), \\ R &= \frac{\gamma}{\mu}I, \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon\beta b}{\mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}$$

である。したがって、 $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば $I > 0$ となり、エンデミックな平衡点が存在する。