

数 α 理モデルの世界へようこそ

文：國谷紀良(数学者)

皆さんは「数学」と聞いて何を思い浮かべますか？

苦手だった、何の役に立つかわからない…色々あると思います。今回は皆さんの数学のイメージをちょっと良くするために、意外と身近にある数学の代表である「数理モデル」の世界をご紹介します。

数理モデルって何？

様々な「現象」を表現する数式のことを、**数理モデル**と呼びます。例えば「惑星の運動」や、「シマウマの縞模様の作られ方」、「株価の変動」など、幅広い分野で様々な現象を考えるために利用されています。

古くからある数理モデル：フィボナッチのうさぎ

13世紀のイタリアの数学者フィボナッチは、うさぎの数がどのように増えていくのかを表現する数理モデルを考えました。うさぎのオスとメスのペアは、2ヶ月後に大人になり、毎月1ペアの子うさぎを産むようになります。このとき、うさぎのペアの数は月が進むにつれてどのように増えていくか、考えてみましょう。最初の月は生まれたばかりのうさぎが1ペアいるとします。次の月では、まだ大人になっていないので、1のままです。その次の月では、大人になって1ペアの子うさぎを産むので、1(大人)+1(子供)=2です。その次の月では、大人うさぎがまた子供を産みますが、前の月に生まれたうさぎはまだ大人になっていないので、1(大人)+2(子供)=3です。その次の月では、大人うさぎが2ペアとなり、子うさぎを2ペア産みますが、前の月にうまれたうさぎは子供のままだので、2(大人)+3(子供)=5です。これを続けると、次のような数字の並びが出来ます。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

これはフィボナッチ数列と呼ばれています。この列の中のどの数を選んで、それに一つ前の数を足すと、その一つ後の数になります。これを数式で表したものが、うさぎの増え方を表す「数理モデル」になります。

このモデルではうさぎの死亡などは考えられておらず、理想化された状況ですが、増え方についての大雑把な見通しは得られます。またフィボナッチ数列は、ヒマワリやパイナップルのらせんの数など、自然界の色々な場面で見つけられます。さらに、フィボナッチ数列の隣りあう数で分数を作っていくと、

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

となり、これは美術などの分野でも有名な黄金比 $(\sqrt{5}+1)/2$ に近づいていきます。このように、一つの数式から色々なことが分かるのは、数学の面白さの一つでしょう。

フィボナッチウサギの増え方表

0ヶ月	1ヶ月	2ヶ月	3ヶ月	4ヶ月	5ヶ月
					
1ペア	1ペア	2ペア	3ペア	5ペア	8ペア

このウサギの増え方を数理モデルの世界では下のようになります

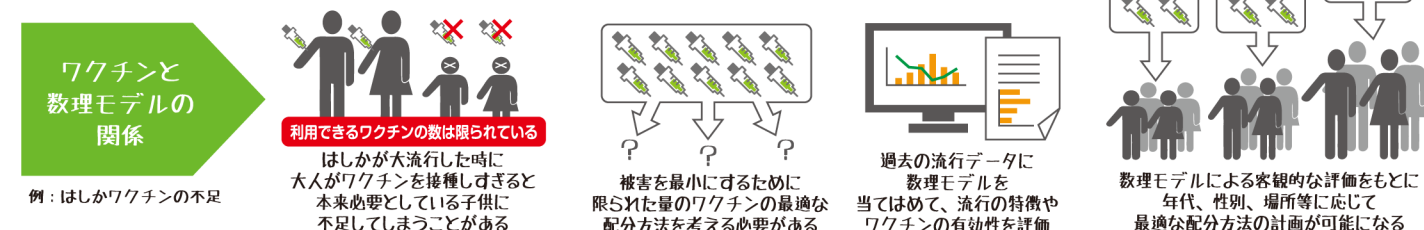
$$X_0 = X_1 = 1,$$

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

X_n : n ヶ月後のうさぎのペアの数

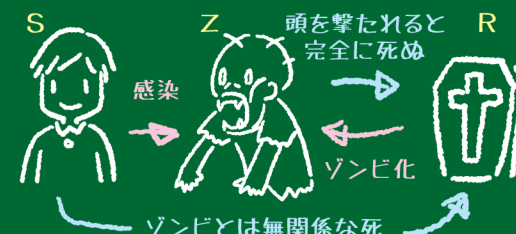
社会に役立つ数理モデル：感染症のモデル

うさぎではなく、感染症の患者の数の増え方を考えれば、感染症の数理モデルを作ることが出来ます。例えば1902年にノーベル生理学・医学賞を受賞したロナルド・ロスは、マラリアの根絶のために蚊を駆除することの効果を示す目的で、数理モデルを利用しました。最も基本的なSIRモデルと呼ばれるモデルは、1927年にケルマックとマッケンドリックという学者によって考えられました。そのモデルでは、未感染者を S 、感染者を I 、回復者を R で表し、それらの数が時間とともにどのように変化していくのかを考えます。 a を感染率、 b を回復率としたとき、SIRモデルを図で表すと次のようになります。



ちょっと変わった数理モデル

社会に役立つかどうかは分からない、ちょっと変わった数理モデルも研究されています。2009年にフィリップ・ムンツらのグループによって発表された「ゾンビのモデル」は、SIRモデルと似ていますが、感染者の代わりにゾンビを、回復者の代わりに死者を考えます。ゾンビは自然に死ぬことはなく、死者は一定の確率でゾンビ化すると仮定されています。結論として、隔離や治療などの対策をとらないと、すべての人間がゾンビ化する「最後の審判の日(doomsday)」が必ず訪れるということが、数学的に証明されています。



ゾンビの数理モデル

$$\begin{aligned} S' &= \pi - \beta SZ - \delta S \\ Z' &= \beta SZ + \zeta R - \alpha SZ \\ R' &= \delta S + \alpha SZ - \zeta R \end{aligned}$$

1988年にスティーブン・ストロガッツが発表した「恋愛のモデル」では、ロミオとジュリエットの相手への好意がそれぞれ R と J で表され、ジュリエットはロミオに好かれると好きになり、嫌われると嫌いになりますが、ロミオは逆にジュリエットに好かれると嫌いになり、嫌われると逆に好きになるという設定の数理モデルが考えられました。結果として、二人の恋愛は決してゴールすることなく堂々巡りを繰り返すということが、数学的には周期解という形で示されています。

まとめ

数理モデルの世界、いかがでしたでしょうか？皆さんが数学に興味を持つきっかけになったのなら幸いです。

著者プロフィール：國谷紀良(くにやとしかず)

神戸大学大学院システム情報学研究科・講師。博士(数理科学)。工学部で数学を教えています。六甲山の麓にある神戸大学への通勤はいつも山登りですが、山から見下ろす神戸の街の景色と、時々遭遇するイノシシを楽しみながら、日々研究に励んでいます。専門は数理生物学、応用数学、非線形解析などです。

アートを感じる 数理モデル：アトラクター

元々は現象を表現するための数理モデルであっても、得られる結果を図にするとどこかアートを感じるものになっていることがあります。1963年にエドワード・ローレンツが大気の大気の対流のモデルとして考えたローレンツ方程式では、下のような図を作ることが出来ます。この図で渦になっている部分が、ローレンツアトラクターと呼ばれるものになります。ローレンツの研究はカオスの理論の発端となり、「蝶のはばたきによる気流の乱れが将来的な竜巻の原因になるか？」で有名なバタフライ効果も、ローレンツの研究に由来しています。

日本人の研究者の功績によって発見されたアトラクターもあります。下左図は池田アトラクター、下右図は金子アトラクターと呼ばれるものになります(参考ウェブサイト: Homepage Jürgen Meier)。何とも不思議で魅力的な形をしていますね。興味を持った方はぜひご自身で調べてみて下さい。

