第1回「離散数学」 2022年4月12日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

集合と写像

何らかの対象の集まりのことを**集合**という．例えば，対象 a, b, c からなる集合は $\{a, b, c\}$ のように表される．集合を構成する各対象のことを，その集合の**元**あるいは**要素**という．自然数などの数全体からなる集合を次の記号で表す．

$\mathbb{N}$：自然数　$\mathbb{Z}$：整数　$\mathbb{Q}$：有理数　$\mathbb{R}$：実数

a が集合 A の元であることを $a \in A$ と表す．ある条件を満たす元 x からなる集合を $\{x \mid (\text{条件})\}$ のように表す．例えば，偶数の集合は $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ のように表される．以後，次の記号を用いる（A, B は集合）．

- $A \cup B$：**和集合**
- $A \cap B$：**共通部分（積集合）**
- $A \setminus B$：**差集合**
- $A \oplus B$：**排他的和集合**
- $A \subseteq B \iff A$ は B の**部分集合**
- $A \subset B \iff A$ は B の**真部分集合**
- A^c：**補集合**
- $\emptyset$：**空集合**
- $|A|$：**要素数（濃度）**
- $A \times B$：**直積**
- 2^A：**ベキ集合**

ただし，排他的和集合は

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

直積は

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\},$$

ベキ集合は

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

で定義される．$|A \times B| = |A||B|$ および $|2^A| = 2^{|A|}$ である．

例題1

集合 $A = \{a, b, d\}$ と $B = \{b, c, d, e\}$ に対し，次の値を求めよ．

(1) $|2^{A \oplus B}|$　　(2) $|2^{A \cup B} \times 2^{A \cap B}|$

集合 A の各元に対して集合 B の1つの元が定まるとき，そのような対応を A から B への**写像**といい，$f : A \to B$ あるいは単に f と表す．$x \in A$ に対して $y \in B$ が対応しているとき，$y = f(x)$ と表す．

f による A の**像**は

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

で定義される．写像の定義より $f(A) \subseteq B$ は常に成り立つ．特に $f(A) = B$ が成り立つとき，f は**全射**という．すなわち，

$$y \in B \Rightarrow y = f(x) \text{ を満たすある } x \in A \text{ が存在}$$

が成り立つとき，f は全射という．一方，

$$x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')$$

が成り立つとき，f は**単射**という．全射かつ単射である写像は**全単射**という．

例題2

次の写像は全射，単射，全単射のいずれであるか答えよ．

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\quad f(x) = 2x$

(2) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},\quad f(x) = x^2$

A, B を有限集合とする．$|A| > |B|$ ならば，写像 $f : A \to B$ は単射ではない．すなわち，$f(x) = f(x')$ を満たす異なる $x, x' \in A$ が存在する．このことは**鳩の巣原理**とも呼ばれる．例えば，神戸市に住む人の集合を A，1人の人間が持つ髪の毛の本数の集合を B とすると，$|A|$ は現在およそ150万であるのに対し，$|B|$ は高々15万であると言われている．$|A| > |B|$ から，鳩の巣原理より，神戸市に住む人の中で髪の毛の本数が同じ人が少なくとも2人存在する．

演習問題1

全射だが単射ではない写像と，単射だが全射ではない写像の例を，授業中に紹介したもの以外で一つずつ挙げよ．

※解答は本日中にBEEFから提出して下さい．

第 1 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 4 月 12 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

演習問題 1

全射だが単射ではない写像と，単射だが全射ではない写像の例を，授業中に紹介したもの以外で一つずつ挙げよ．

解答例

全射だが単射ではない写像の例

- $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N},\ f(x) = |x|$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = [x]$（$x$ を超えない最大整数）
- $f : A \to B$，A：人間の集合，B：誕生月の集合

単射だが全射ではない写像の例

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x + 1$
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$
- $f : A \to B$，A：現在日本で使われている郵便番号の集合，B：7 桁の数の集合

第 2 回「離散数学」 2022 年 4 月 19 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

グラフ

x, y を**点**とするとき，x と y を結ぶ**辺**を (x, y) と表す．向きを考える場合，(x, y) は x を**始点**，y を**終点**とする辺であり，**有向辺**と呼ばれる．向きを考えない場合，(x, y) は $(x, y) = (y, x)$ を満たし，**無向辺**と呼ばれる．

グラフ理論における**グラフ**とは，点の集合 V と辺の集合 E の組のことをいい，$G = (V, E)$ のように表される．$|V|$ を G の**位数**といい，$|E|$ を G の**サイズ**という．各辺が有向辺であるグラフのことを**有向グラフ**といい，各辺が無向辺であるグラフのことを**無向グラフ**という．グラフに同じ辺 (x, y) が複数存在するとき，それらをまとめて**多重辺**という．また，端点が同じ辺 (x, x) のことを**ループ**という．多重辺やループを含むグラフのことを**多重グラフ**といい，そうでないグラフのことを**単純グラフ**という．

例題 1

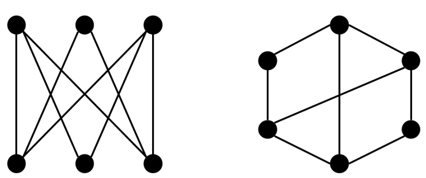
V と E が次のように与えられるとき，無向グラフ $G = (V, E)$ を図示せよ．

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$
$$e_1 = (1, 2),\ e_2 = (1, 3),\ e_3 = (2, 4),$$
$$e_4 = (2, 4),\ e_5 = (3, 5),\ e_6 = (6, 6).$$

$G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ が**同型**であるとは，次を満たす全単射 $f : V \to V'$ が存在することをいう．

$$(x, y) \in E \ \Leftrightarrow\ (f(x), f(y)) \in E'$$

例えば，次の 2 つのグラフは同型である．



次数

辺 (x, y) が存在するとき，点 x と点 y は**隣接する**という．また，辺 (x, y) は点 x と点 y に**接続する**という．点 x に接続する辺の本数のことを，x の**次数**といい，$\deg(x)$ と表す．次の等式は**握手補題**として知られる．

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2|E|$$

この等式は，グラフの各点の次数の総和が，グラフのサイズの 2 倍に等しいことを意味する．握手補題より，任意のグラフにおいて，次数が奇数である点は偶数個存在することがわかる．

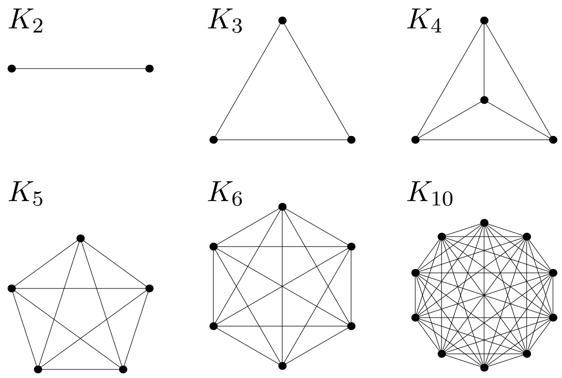
正則グラフと完全グラフ

すべての点の次数が等しいグラフのことを**正則グラフ**という．各点の次数が r である正則グラフのことを，r-**正則グラフ**という．

例題 2

$|V| = 8, 9, 10$ である 3-正則グラフをそれぞれ 1 つずつ描け．ただし存在しない場合はその理由を述べよ．

各点が他のすべての点と隣接しているグラフのことを**完全グラフ**という．$|V| = n$ である完全グラフを K_n で表す．



完全グラフ K_n のサイズは $\dfrac{n(n-1)}{2}$ である．

演習問題 2

K_6 の各辺を赤か青で色分けするとき，単色（赤か青）の辺からなる三角形が必ず生じることを示せ．

※ 解答の提出期限 : 4 月 20 日（水）正午

第 2 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 4 月 19 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

演習問題 2

K_6 の各辺を赤か青で色分けするとき，単色（赤か青）の辺からなる三角形が必ず生じることを示せ.

解答例

K_6 のある頂点 x は 5 本の辺と接続しているので，その内 3 本は同じ色である．これを赤として（青にしても以下の議論の本質は変わらない），3 本の赤い辺によって x に隣接する 3 点をそれぞれ y, z, w とする．y, z, w の内の 2 点が赤い辺によって隣接するならば，その 2 点と x は赤い辺によって隣接するので，赤い三角形が生じる．y, z, w の内のどの 2 点も赤い辺によって隣接しないならば，y, z, w は青い辺によって隣接するので，青い三角形が生じる．

第 3 回「離散数学」 2022 年 4 月 26 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

路と連結性

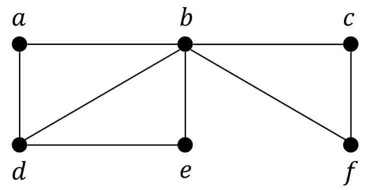
同じ点に接続する 2 辺は**隣接する**という．隣接する辺の系列

$$((v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k))$$

のことを，点 v_0 と v_k を結ぶ**路**という．v_0 と v_k を**端点**といい，$v_0 = v_k$ である路のことを**閉路**という．同じ辺を 2 回以上通らない路のことを**単純**といい，同じ点を 2 回以上通らない路のことを**初等的**という．ただし，初等的な閉路では端点を 2 回通ることを許す．路に含まれる辺の数のことを，その路の**長さ**という．

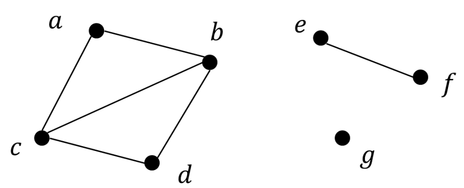
例題 1

以下のグラフにおいて，1)，2) に該当する路をすべて求めよ．



1) a と f を結ぶ長さ 4 の初等的な路
2) a と f を結ぶ長さ 5 の単純な路

グラフ G の任意の 2 点間にそれらを結ぶ路が存在するとき，G は**連結**という．非連結なグラフは連結な部分グラフに分割されるが，そのような部分グラフを**連結成分**という．ここで，$G' = (V', E')$ が $G = (V, E)$ の**部分グラフ**であるとは，$V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$ が成り立つことをいう．G の連結成分の数を $\omega(G)$ と表す．



非連結なグラフ

グラフ G から点 v と v に接続する辺を除いたグラフを $G - v$ と表す．$\omega(G - v) > \omega(G)$ を満たす点 v を**切断点**という．また，グラフ G から辺 e を除いたグラフを $G - e$ と表す．$\omega(G - e) > \omega(G)$ を満たす辺 e を**橋**という．

例題 2

例題 1 のグラフの切断点と橋を（存在すれば）求めよ．

グラフ $G = (V, E)$ に対し，集合 R_c を次のように定める．

$$R_c = \{(u, v) \in V \times V \mid u \text{ と } v \text{ を結ぶ道が存在}\}$$

このとき，次の 3 条件が成り立つ．

反射律 任意の $v \in V$ に対し，$(v, v) \in R_c$．
対称律 $(u, v) \in R_c \Rightarrow (v, u) \in R_c$．
推移律 $(u, v), (v, w) \in R_c \Rightarrow (u, w) \in R_c$．

これより R_c は**同値関係**と呼ばれる．このとき，点 $v \in V$ の**同値類**は

$$[v] = \{u \in V \mid (u, v) \in R_c\}$$

で定義される．同値類はグラフ G の各連結成分に対応する．

有向辺の系列に対して，**有向路**，**有向閉路**，**単純**，**初等的**，**長さ**が同様に定義される．有向グラフ G の任意の 2 点間にそれらを結ぶ有向路が存在するとき，G は**強連結**という．

u と v を端点とする路の長さのうち，最小のもののことを u と v の間の**距離**といい，$d(u, v)$ と表す．$e(v) = \max_{u \in V} d(u, v)$ を点 v の**離心数**という．グラフ $G = (V, E)$ の**半径** $\mathrm{rad}(G)$ と**直径** $\mathrm{diam}(G)$ を次で定める．

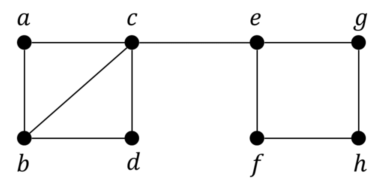
$$\mathrm{rad}(G) = \min_{v \in V}\{e(v)\},\ \mathrm{diam}(G) = \max_{v \in V}\{e(v)\}.$$

例題 3

例題 1 のグラフの半径と直径を求めよ．

演習問題 3

次のグラフの切断点，橋，半径，直径を求めよ．

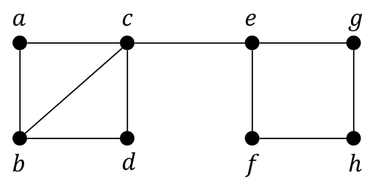


第3回「離散数学」演習問題の解答 2022年4月26日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

演習問題 3

次のグラフの切断点，橋，半径，直径を求めよ．



解答　切断点：c, e　橋：(c, e)　半径：2　直径：4

解説　切断点と橋は明らか．各点の離心数は

$$e(a) = 4,\ e(b) = 4,\ e(c) = 3,\ e(d) = 4,$$
$$e(e) = 2,\ e(f) = 3,\ e(g) = 3,\ e(h) = 4$$

である．このうちの最小のものが半径で，最大のものが直径である．

第 4 回「離散数学」 2022 年 5 月 10 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

オイラー路

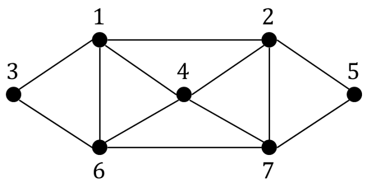
グラフのすべての辺を含む単純な路のことを，そのグラフの**オイラー路**という．オイラー路はそのグラフの一筆書きに対応する．特に，閉路であるオイラー路のことを**オイラー閉路**という．オイラー閉路を含むグラフのことを**オイラーグラフ**という．

オイラー路の名前は「ケーニヒスベルクに架かる 7 つの橋を一回ずつ渡って元の場所に戻れるか？」という問題を考えたオイラーの名にちなむ．オイラーグラフに関する次の定理は，グラフ理論の最初の定理と言われている．

定理 1 G を連結な無向グラフとする．G がオイラーグラフであるための必要十分条件は，G のすべての点の次数が偶数であることである．

例題 1

以下のグラフのオイラー閉路を構成せよ．



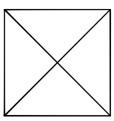
定理 2 G を連結な無向グラフとする．G にオイラー路が存在するための必要十分条件は，G が次数が奇数の点を高々2 個含むことである．

定理 2 より，ある図形が一筆書き可能であるか判別するためには，その図形の各交点の次数を調べれば良いことが分かる．次数が奇数の点が 2 個以下ならば，定理 2 よりオイラー路が存在し，それが一筆書きに対応する．

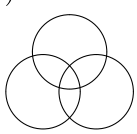
例題 2

次の図形は一筆書き可能か答えよ．

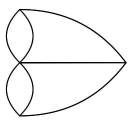
1)



2)



3)



ハミルトン路

グラフのすべての点を含む初等的な路のことを，そのグラフの**ハミルトン路**という．特に，閉路であるハミルトン路のことを**ハミルトン閉路**という．ハミルトン閉路を含むグラフのことを**ハミルトングラフ**という．

オイラーグラフは**郵便配達員問題**に，ハミルトングラフは**巡回セールスマン問題**に関連する．連結な無向グラフがハミルトングラフであるための必要十分条件は知られていないが，必要条件や十分条件は得られている．例えば，必要条件に関する次の定理が知られている．

定理 3 $G=(V,E)$ を連結な無向グラフとする．G がハミルトングラフならば，任意の空でない点の真部分集合 $S \subset V$ に対して，

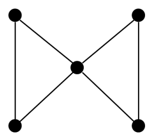
$$\omega(G-S) \leq |S|$$

が成り立つ．ただし $G-S$ は，グラフ G から点の集合 S のすべての点とそれらに接続する辺を除いたグラフを表す．

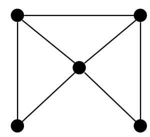
例題 3

次のグラフはハミルトングラフであるか答えよ．

1)



2)



演習問題 4

例題 1 と例題 3 の各グラフは，次の表の A〜F の内どれに当てはまるか答えよ．

	オイラーグラフである	オイラーグラフではないがオイラー路を含む	オイラー路を含まない
ハミルトングラフである	A	B	C
ハミルトングラフではない	D	E	F

第 4 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 5 月 10 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

演習問題 4

例題 1 と例題 3 の各グラフは，次の表の A〜F の内どれに当てはまるか答えよ．

	オイラーグラフである	オイラーグラフではないがオイラー路を含む	オイラー路を含まない
ハミルトングラフである	A	B	C
ハミルトングラフではない	D	E	F

解答
例題 1 のグラフ：A
例題 3 の 1) のグラフ：D
例題 3 の 2) のグラフ：B

解説　例題 1 のグラフ：すべての点の次数が偶数なのでオイラーグラフである．例えば，路

$$((1,3),(3,6),(6,4),(4,7),(7,5),(5,2),(2,1))$$

がハミルトン閉路なので，ハミルトングラフである．よって A である．

例題 3 の 1) のグラフ：すべての点の次数が偶数なのでオイラーグラフである．中央に描かれた点の集合を S とすると

$$\omega(G-S)=2>|S|=1$$

となり，ハミルトングラフの必要条件が満たされない．よってハミルトングラフではなく，D である．

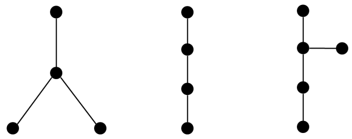
例題 3 の 2) のグラフ：次数が奇数の点が 2 個存在するので，オイラーグラフではないがオイラー路を含む．描かれた図形の外周を回る路は明らかにハミルトン閉路なので，ハミルトングラフ．よって B である．

第 5 回「離散数学」 2022 年 5 月 17 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

1　木

閉路を含まないグラフのことを**森**という．連結な森のことを**木**という．例えば以下に示す各グラフが木であり，全体を一つのグラフと見なせばそれは森である．



例題 1

位数が 6 の木をすべて描け．

T を位数 p，サイズ q の木とするとき，次が成り立つ．

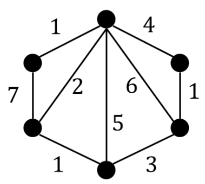
1) $p \geq 2$ ならば，T は次数 1 の点（**葉**）を 2 つ以上含む．
2) $q = p - 1$．
3) T の任意の 2 点を結ぶ初等的な路が唯一つある．
4) T のすべての辺は橋．
5) T の隣接しない任意の 2 点を新たな辺で結ぶと閉路が一つできる．

グラフ G の辺の集合を $E(G)$，点の集合を $V(G)$ のように表す．T は G の部分グラフであり，$V(T) = V(G)$ を満たすとき，G の**全域木**という．グラフが連結であることと，グラフが全域木を含むことは同値である．完全グラフ K_n の異なる全域木の数は n^{n-2} である．

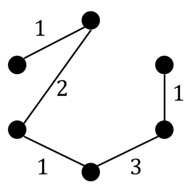
例題 2

完全グラフ K_4 の全域木をすべて描け．

連結な**重み付きグラフ**において，重みの和が最小である全域木のことを**最小全域木**という．



重み付きグラフ G



G の最小全域木

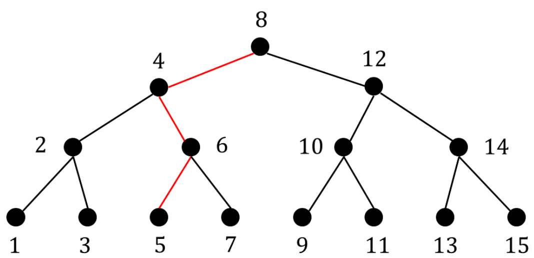
最小全域木を求めることは，コストの最小化という観点で応用上の意義がある．最小全域木を求める方法の概要は次の通りである．1) 重みの小さい辺から順に加えていく．2) 辺を加えると閉路ができる場合，その辺は加えない．

2　根付き木

向き付けられた木（有向グラフ）を考える．木のある点 v から他の任意の点への向き付けられた路（有向路）が存在するとき，その点 v を**根**といい，そのような木を**根付き木**（有向木）という．根付き木を描くとき，根を一番上に描いて，根を始点とする路の長さが大きくなるにつれて点を上から下に描く方法が一般的である．

点 v を根とする根付き木において，点 x と隣接し，点 v から点 x への路に含まれる点のことを x の**親**という．また，x はその親の**子**という．その一般化として**祖先**や**子孫**が定義される．

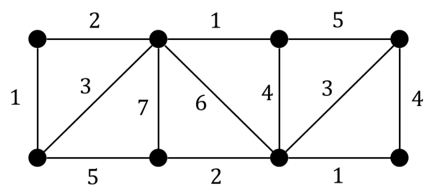
各点の子の数が 2 以下である根付き木のことを，**2 分木**という．2 分木はデータ構造や診断表など，様々な場面で利用される．例えば，以下の 2 分木において，番号 x の点のデータを参照したいとき，x が点の番号と比較して小さいなら左，大きいなら右に進むようにすれば，少ない回数で所望の点に到着できる．



（$x = 5$ のときの路を赤で示した）

演習問題 5

次のグラフの最小全域木の重みの和を求めよ．

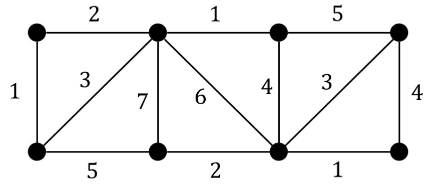


第 5 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 5 月 17 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　 担当 : 國谷

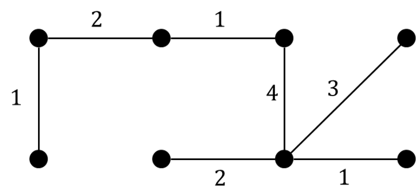
演習問題 5

次のグラフの最小全域木の重みの和を求めよ.



解答　14

解説　最小全域木は次のようになる.



第 6 回「離散数学」 2022 年 5 月 24 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

グラフの行列表現

グラフをコンピュータで処理するときに，グラフの**行列表現**が有用になる．グラフ $G = (V, E)$ の各点と各辺は

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},\ E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

のようにラベル付けされているとする．グラフ G の**隣接行列** $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ は，各成分が次のように与えられる $n \times n$ 行列である．

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{と} v_j \text{が隣接している} \\ 0, & v_i \text{と} v_j \text{が隣接していない} \end{cases}$$

また，G の**次数行列** D は，対角要素が各点の次数で与えられる対角行列である．すなわち

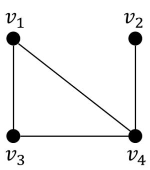
$$D = \begin{bmatrix} \deg(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \deg(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \deg(v_n) \end{bmatrix}$$

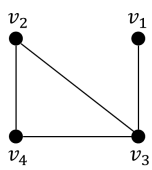
である．各 i に対し，次が成り立つ．

- A の第 i 行の成分の和 $=$ D の (i, i) 成分
- A^2 の (i, i) 成分 $=$ D の (i, i) 成分

例題 1

次のグラフの隣接行列と次数行列を求めよ．

1)


2)


隣接行列や次数行列は点のラベル付けによって変わるため，グラフそのものの不変量ではない．しかし，行と列の入れ替えを適当に行うと，同じグラフの隣接行列や次数行列は一致する．

点の集合 V が連結成分毎に $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_\ell$ のように分割されるとする．このとき，対応する隣接行列 $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ によって，全体の隣接行列を

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{bmatrix}$$

のように表すことができる．ただし O は適当な大きさの零行列であり，このような行列 A をブロック対角行列という．

グラフ G の**接続行列** $B = [b_{ij}]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ は，各成分が次のように与えられる $n \times m$ 行列である．

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{が} e_j \text{に接続している} \\ 0, & v_i \text{が} e_j \text{に接続していない} \end{cases}$$

例題 2

次の接続行列で表されるグラフを描け．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

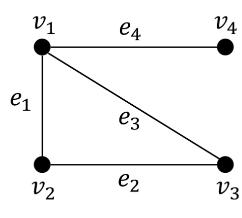
グラフ G の隣接行列 A，次数行列 D，接続行列 B の間に次の関係式が成り立つ．

$$BB^{\mathrm{T}} = A + D$$

ただし B^{T} は B の転置行列である．

演習問題 6

次のグラフの隣接行列，次数行列，接続行列を求めよ．

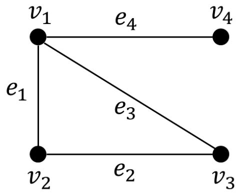


第 6 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 5 月 24 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

演習問題 6

次のグラフの隣接行列，次数行列，接続行列を求めよ．



解答　隣接行列を A，次数行列を D，接続行列を B とすると

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 7 回「離散数学」 2022 年 5 月 31 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

2 部グラフ

$G=(V,E)$ の点集合 V の部分集合 S の任意の点が互いに隣接しないとき，S を**独立集合**という．V が二つの独立集合 X と Y に分割できるとき，G を **2 部グラフ**という．また，(X,Y) を G の **2 分割**という．

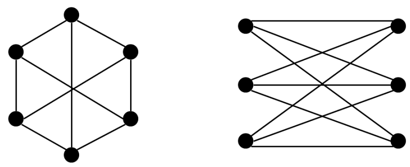


図 1. 同型な 2 部グラフ

2 分割が (X,Y) である 2 部グラフ G は，X の任意の点と Y の任意の点が隣接しているとき，**完全 2 部グラフ**という．$|X|=m$，$|Y|=n$ である完全 2 部グラフを $K_{m,n}$ と表す．図 1 のグラフは $K_{3,3}$ である．$K_{1,n}$ は**スターグラフ**という．

例題 1

$K_{m,n}$ の位数とサイズを求めよ．

2 部グラフには次のような特徴づけがある．

定理 1 グラフ G が 2 部グラフであるための必要十分条件は，G に長さが奇数の初等的閉路が存在しないことである．

証明の概要　(必要性) G は 2 部グラフとし，(X,Y) を 2 分割とする．G の任意の初等的閉路は，X と Y の点を交互に通るので長さは偶数である．

(十分性) $G=(V,E)$ に長さが奇数の初等的閉路が存在しないことを仮定する．$v_0 \in V$ を任意の点とし，v_0 からの距離が偶数である点の集合を X，奇数である点の集合を Y とすると，$X \cup Y = V$ かつ $X \cap Y = \emptyset$ である．X と Y が独立集合であることを示せば，(X,Y) は G の 2 分割なので，G は 2 部グラフであることが示される．

マッチング

$G=(V,E)$ の辺集合 E の部分集合 M の任意の辺が端点を共有しないとき，M を**マッチング**という．任意の点 $v \in V$ がある $e \in M$ の端点であるとき，M を**完全マッチング**という．

G は 2 分割が (X,Y) である 2 部グラフとし，$|X|=|Y|$ とする．任意の $A \subseteq X$ に対し，A の点と隣接するすべての点の集合を $f(A)$ と表す．$f(A) \subseteq Y$ である．このとき，G に完全マッチングが存在するための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して

$$|A| \le |f(A)|$$

が成り立つことである（**Hall の結婚定理**）．

例として，$M=\{a,b,c\}$ を男性の集合，$F=\{x,y,z\}$ を女性の集合とする．各男性に対し，お互いに好きで結婚しうる女性を表 1 に示す．

男性	a	b	c
女性	x,z	y	x,y

表 1.

対応する 2 部グラフは以下のようになる．

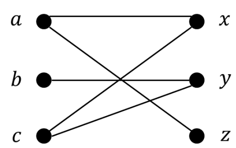


図 2. 表 1 に対応する 2 部グラフ

このとき，Hall の結婚定理の条件が成り立つことが確かめられる．完全マッチングは

$$M=\{(a,z),(b,y),(c,x)\}$$

である．

演習問題 7

G は 2 分割が (X,Y) である 2 部グラフとする．$|X| \ne |Y|$ ならば，G はハミルトングラフでないことを示せ．

第 7 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 5 月 31 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

演習問題 7

G は 2 分割が (X, Y) である 2 部グラフとする．$|X| \neq |Y|$ ならば，G はハミルトングラフでないことを示せ．

解答　対偶を示す．G がハミルトングラフならば，ハミルトン閉路を含む．第 7 回定理 1 より，その長さは偶数であるため，

$$v_1, v_2, \ldots, v_{2n}, v_1, \quad n \in \mathbb{N}$$

のように表すことができる．このとき

$$U = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}\},$$
$$V = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2n}\}$$

とする．ハミルトン閉路であることから，$U \cup V = X \cup Y$，$U \cap V = \emptyset$ であり，

$$|U| = |V| = n$$

である．2 部グラフであることに注意すれば，一般性を失わず，$U = X$，$V = Y$ としてよい．このとき

$$|X| = |Y| = n$$

である．よって対偶が示された．

第 8 回「離散数学」 2022 年 6 月 14 日

教科書 : 上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当 : 國谷

彩色

隣接する点は異なる色になるようにグラフの各点を色付けすることを**彩色**という．k 色を用いた彩色を k **彩色**という．グラフ $G = (V, E)$ の k 彩色は，写像

$$f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$$
$$(u, v) \in E \ \Rightarrow \ f(u) \neq f(v)$$

で表される．G の k 彩色が存在するとき，G は k **彩色可能**であるという．G が k 彩色可能であるような最小の k を G の**彩色数**といい，$\chi(G)$ で表す．次が成り立つ．

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(G) = 1 \ \Leftrightarrow \ E = \emptyset$
- $\chi(G) = 2 \ \Leftrightarrow \ G$ が 2 部グラフ
- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

ただし $\Delta(G)$ は G の点の最大次数を表す．特に，G が完全グラフか，長さが奇数の初等的閉路であるとき，

- $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

が成り立つ．一方，G がそれらのいずれでもないとき，

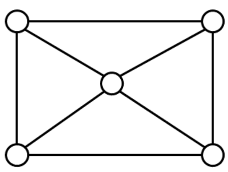
- $\chi(G) \leq \Delta(G)$

が成り立つ．

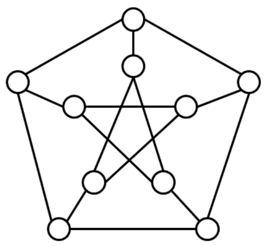
例題 1

次の各グラフの彩色数を求めよ．

1)



2)



辺彩色

隣接する辺は異なる色になるようにグラフの各辺を色付けすることを**辺彩色**という．k 色を用いた彩色を k **辺彩色**という．グラフ $G = (V, E)$ の k 辺彩色は，写像

$$f : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$$
$$\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset \ \Rightarrow \ f(e) \neq f(e')$$

で表される．ただし $\partial(e)$ と $\partial(e')$ はそれぞれ辺 e と辺 e' の端点の集合を表す．G の k 辺彩色が存在するとき，G は k **辺彩色可能**であるという．G が k 辺彩色可能であるような最小の k を G の**辺彩色数**といい，$\chi'(G)$ で表す．隣接する 2 辺は同じ色で彩色されないことから，任意のグラフ G に対して

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

が成り立つ．特に，次が成り立つことが知られている．

- G が 2 部グラフならば，$\chi'(G) = \Delta(G)$.
- 任意のグラフ G に対して，

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

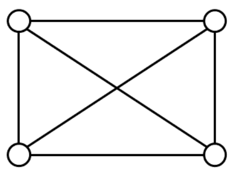
例題 2

例題 1 の各グラフの辺彩色数を求めよ．

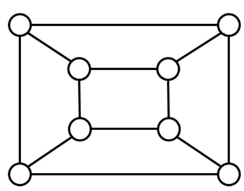
演習問題 8

次の各グラフの彩色数と辺彩色数を求めよ．

1)



2)



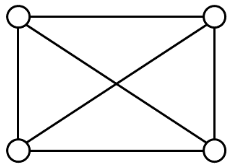
第 8 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 6 月 14 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

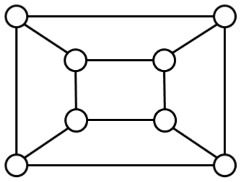
演習問題 8

次の各グラフの彩色数と辺彩色数を求めよ．

1)



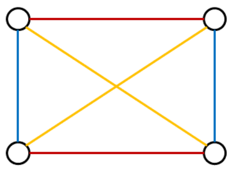
2)



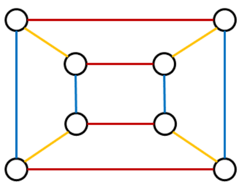
解答

1) 彩色数：4　辺彩色数：3
2) 彩色数：2　辺彩色数：3

解説　1)　完全グラフ K_4 なので，彩色数は $\chi(K_4) = 4$．また，$\Delta(K_4) = 3$ なので，辺彩色数は $3 \leq \chi'(K_4) \leq 4$ を満たすが，例えば次のような 3 辺彩色が存在するので，辺彩色数は $\chi'(K_4) = 3$．



2)　2 部グラフなので，彩色数は 2 であり，辺彩色数は最大次数に等しく 3．例えば，次のような 3 辺彩色が存在する．

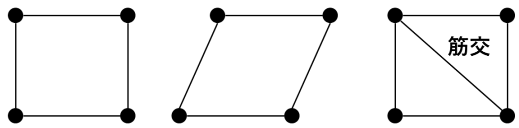


第 9 回「離散数学」 2022 年 6 月 21 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

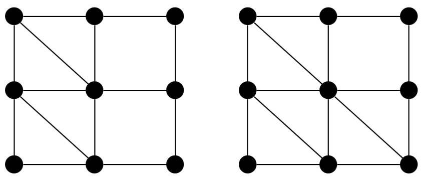
構造工学への応用

伸縮しない棒からなる枠組を考える．**筋交**を入れることで変形されなくなった枠組は**堅牢**であるという．



堅牢ではない　　**堅牢**

一般に，格子の枠組は堅牢ではないが，筋交を入れることで堅牢にすることができる．2×2 枠組を堅牢にするために必要かつ十分な筋交の数は 3 である．



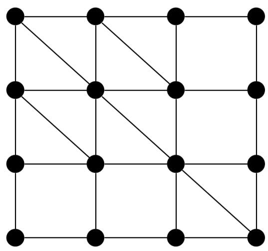
堅牢ではない　　**堅牢**

F を $m \times n$ 枠組とする．行に対応する点の集合を X，列に対応する点の集合を Y として，筋交がある部分に対応する点を辺で結ぶことで，(X, Y) を 2 分割とする 2 部グラフ $G = G(F)$ が得られる．このような G を F の**筋交グラフ**という．次の定理が成り立つ．

定理 1 枠組 F が堅牢であるための必要十分条件は，筋交グラフ $G(F)$ が連結であることである．

例題 1

次の 3×3 枠組は堅牢ではないことを示せ．



経営工学への応用

3 人の職人 p_1, p_2, p_3 に 3 種類の仕事 q_1, q_2, q_3 を割り当てる．下の表 1 の場合は 3 人全員に（異なる）仕事を割り当てられるが，表 2 の場合は全員に割り当てることはできない．

	q_1	q_2	q_3
p_1	可		可
p_2		可	
p_3	可	可	可

表1

	q_1	q_2	q_3
p_1	可		
p_2	可		
p_3	可	可	可

表2

n 人の職人に仕事を割り当てられるための必要十分条件は，任意の k $(1 \leq k \leq n)$ 人ができる仕事が k 種類以上であることである．これは Hall の結婚定理（第 7 回）に他ならない．また，重み付きグラフでは**最大重みマッチング**の問題を考えることができる．

例題 2

次の表に対し，利益が最大となるような割り当てを求めよ（数字は利益を表す）．

	q_1	q_2	q_3
p_1	5	4	1
p_2	4	1	1
p_3	3	1	2

3 人の教員 p_1, p_2, p_3 と 3 組の学級 q_1, q_2, q_3 に対し，各教員が授業を行う学級を表 3 に示す．

	q_1	q_2	q_3
p_1	授業		授業
p_2		授業	
p_3	授業	授業	授業

表3

このとき，時間割を作成する上で必要かつ十分な時限の数を求める**時間割問題**は，2 部グラフの辺彩色問題に帰着される．

演習問題 9

m 人の教員が n 組の学級で 1 回ずつ授業を行う時間割を作成するとき，必要となる最小の時限数を答えよ．

第 9 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 6 月 21 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

演習問題 9

m 人の教員が n 組の学級で 1 回ずつ授業を行う時間割を作成するとき，必要となる最小の時限数を答えよ．

解答 $\max(m, n)$

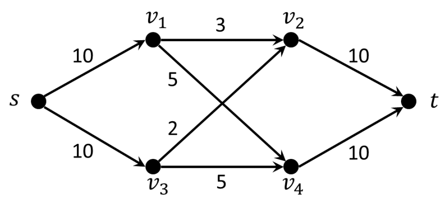
解説　対応する 2 部グラフは完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ なので，$K_{m,n}$ の辺彩色数を求めればよい．第 8 回の内容より，$\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})$ であるが，$\Delta(K_{m,n}) = \max(m, n)$ である．

第 10 回「離散数学」 2022 年 6 月 28 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

ネットワークフロー

$G = (V, E)$ は連結有向グラフとし，各辺 $e \in E$ には非負の実数 $c(e)$（**容量**）が定められているとする．このとき，$N = (G, c)$ を**ネットワーク**という．例えば次のようなネットワークが挙げられる（s：始点，t：終点）．



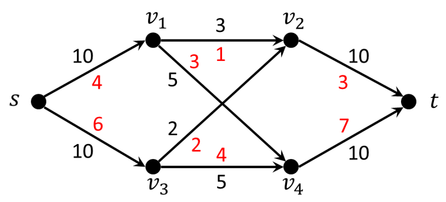
ネットワークを用いて物資の輸送の問題を考えるとき，各辺 $e \in E$ を通過する物資の量を**流量（フロー）**といい，$f(e)$ と表す．f を**流れ**という．容量は，その辺を通過できる物資の最大量を表す．したがって，

- 任意の $e \in E$ に対して，$0 \leq f(e) \leq c(e)$

が成り立つ．また，物資の量が保存されることから，次が成り立つ．

- 始点から出る流量の総和と，終点に入る流量の総和は等しい．これを f の**総流量**といい，$\mathrm{val}(f)$ と表す．
- 始点と終点以外の任意の内点において，その点に流入する流量の総和と，その点から流出する流量の総和は等しい．

例えば，上記のネットワークに対して，次のような流れ f（赤で示す）が考えられる．

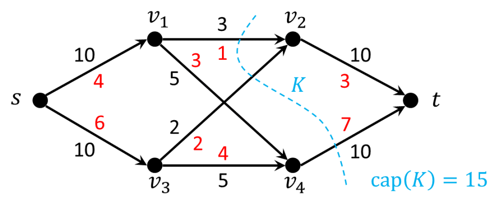


$\mathrm{val}(f)$ を最大にする f のことを**最大流**といい，そのときのネットワークを**最大流ネットワーク**という．

例題 1

左記のネットワークに対し，最大流の総流量と，最大流ネットワークを求めよ．

ネットワーク $N = (G, c)$ において，グラフ $G = (V, E)$ の点集合 V が，始点 s を含む集合 S と，終点 t を含む集合 $S' = V \setminus S$ に分けられるとする．$(u, v) \in E$, $u \in S$, $v \in S'$ であるような辺の集合を**カット**といい，$K = (S, S')$ と表す．カット K に属する辺の容量の総和を K の**容量**と呼び，$\mathrm{cap}(K)$ と表す．



ネットワークの任意の流れ f と，任意のカット K に対し，次の不等式が成り立つ．

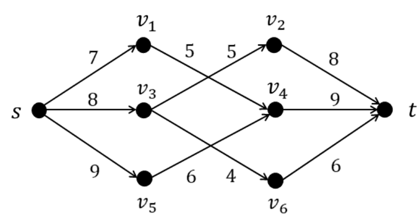
$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(K)$$

この不等式から，$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(K)$ が成り立つならば，f は最大流であり，K は**最小カット**（最小の容量をもつカット）であることがわかる．実際，次の**最大流・最小カットの定理**が知られている．

定理 1 任意のネットワークにおいて，最大流の総流量と，最小カットの容量は等しい．

演習問題 10

次のネットワークの最大流の総流量を求めよ．

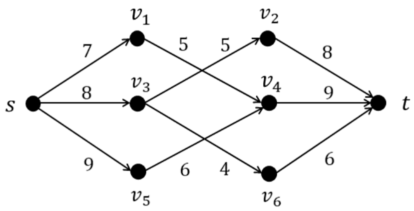


第 10 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 6 月 28 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社　担当：國谷

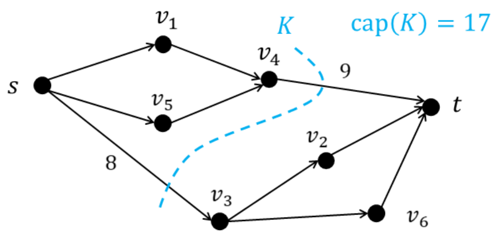
演習問題 10

次のネットワークの最大流の総流量を求めよ．



解答　17

解説　グラフを以下の様に書き換える．このときのカット K が最小カットであり，その容量は 17 である．



よって，最大流・最小カットの定理より，求める最大流の総流量は 17 であることがわかる．

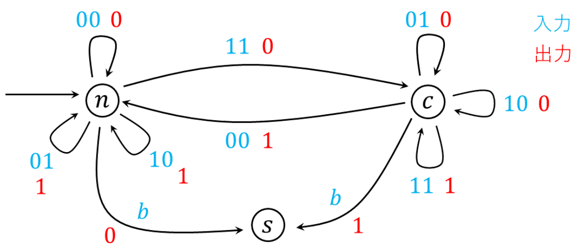
第 11 回「離散数学」 2022 年 7 月 5 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

有限状態機械

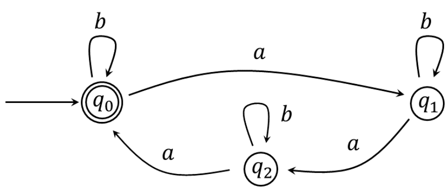
入力記号と内部の状態をもとにある記号を出力し，同時に内部の状態を変えるモデルのことを**有限状態機械**という．状態が変わることを**状態遷移**といい，状態遷移の様子を表す有向グラフのことを**状態遷移図**という．

例として，2 進数の加法を考える．桁上がりがない状態を n，桁上がりがある状態を c，停止状態を s と表す．各桁の和は 2 つの数の組であり，これを入力とする．例えば 1 と 0 の和は 10 という入力記号で表す．入力の終了を b で表す．このとき，状態遷移図は次の重み付き有向グラフで表される．



有限オートマトン

受理と**却下**の 2 つの状態がある有限状態機械のことを**有限オートマトン**という．受理状態を 2 重丸，却下状態を 1 重丸で表す．例えば，a と b からなる文字列の入力に a が 3 の倍数個あるとき受理する有限オートマトンは，以下の重み付き有向グラフで表される．



一般に，有限オートマトンは以下の 5 つの組で与えられる．

- 入力記号の集合 Σ（**アルファベット**）
- 状態の集合 Q
- 受理状態の集合 T
- 初期状態 q_0
- 状態遷移関数 $f : Q \times \Sigma \to Q$

例題 1

前述の有限オートマトンにおいて，Σ, Q, T, f を具体的に示せ．

記号を並べたものを**語**という．語に含まれる記号の数を**長さ**という．アルファベット Σ 上の語で長さが有限のものの全体を Σ^* と表し，Σ の**閉包**という．Σ^* の部分集合を Σ 上の（**形式**）**言語**という．例えば，$\Sigma = \{0, 1\}$ であるとき，

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\},\ \varepsilon : \text{空語}$$

であり，長さ 2 以下の語からなる言語は

$$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$$

である．和集合を $+$，閉包を $*$，**連接**（語を並べること）を $\cdot$ で表す表現を**正規表現**という．

例題 2

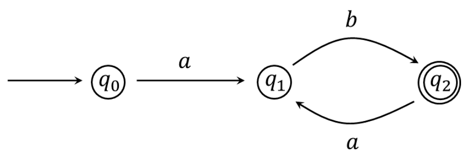
次の正規表現の定義する言語を説明せよ．

1)　$0 + 11$　　2)　$0\,(0 + 1)^*$

有限オートマトンで受理される語からなる言語は正規表現で定義できる．その逆も成り立つ．

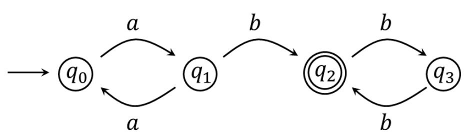
例題 3

次の有限オートマトンで受理される語からなる言語を正規表現で表せ．なお，ある状態において指示されていない入力があれば，その文字列は却下されるとする．



演習問題 11

次の有限オートマトンで受理される語からなる言語を正規表現で表せ．

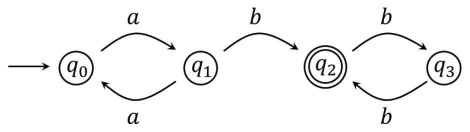


第 11 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 7 月 5 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

演習問題 11

次の有限オートマトンで受理される語からなる言語を正規表現で表せ.



解答　$a(aa)^*b(bb)^*$

解説　a が奇数個あり，続いて b が奇数個ある語の集合である.

第 12 回「離散数学」 2022 年 7 月 12 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

同値関係

集合 S に対して，$S \times S\ (= S^2)$ の部分集合 R を S 上の**二項関係**という．特に，次の 3 つの性質を満たすとき，R を**同値関係**という．

反射律 任意の $x \in S$ に対し，$(x, x) \in R$.
対称律 $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.
推移律 $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

例題 1

集合 R と S が次のように与えられるとき，R は S 上の同値関係であることを示せ．

1) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y \mod 3\}$, $S = \mathbb{Z}$
2) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0$ または $x = y = 0\}$, $S = \mathbb{R}$
3) $R = \{(x, y) \in V^2 \mid x$ と y を結ぶ道が存在 $\}$，$V =$ ある無向グラフ $G = (V, E)$ の点集合

R が S 上の同値関係であるとき，任意の $x \in S$ に対して次のように定められる集合のことを，x の**同値類**という．

$$[x] = \{y \in S \mid (x, y) \in R\}.$$

このとき x を**代表元**という．次が成り立つ．

- $a \in [x] \ \Rightarrow\ [a] = [x]$
- $a \in S \setminus [x] \ \Rightarrow\ [a] \cap [x] = \emptyset$

したがって S は同値類によって分割される．そのような同値類全体の集合を**商集合**といい，S/R と表す．

例題 2

例題 1 の各 R と S に対し，S/R を求めよ．

半順序関係

S 上の二項関係 R は，反射律，推移律に加えて次の性質を満たすとき，**半順序関係**という．

反対称律 $(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

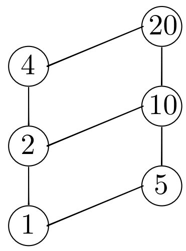
例題 2

集合 R と S が次のように与えられるとき，R は S 上の半順序関係であることを示せ．

1) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \geq y\}$, $S = \mathbb{N}$
2) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x$ は y の約数 $\}$, $S = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

R が S 上の半順序関係であるとき，$(x, y) \in R$ であることを $x \prec y$ と書く．任意の $x, y \in S$ に対して $x \prec y$ か $y \prec x$ が成り立つとき，R を**全順序関係**という．例えば，テニスの個人ランキングは全順序関係であり，トーナメントでの順位は半順序関係である．

$x, y \in S$ が $x \prec y$ を満たし，$x \prec z \prec y$ である $y \in S$ が存在しないとき，x から y へ上向きの辺を描いてできるグラフを**ハッセ図**という．例えば，例題 2 の半順序集合に対するハッセ図は次のようになる．



任意の $x \in S$ に対して $x \prec y$ を満たす $y \in S$ を**最大元**という．$y \prec x$ を満たす $x \in S$ が存在しないような $y \in S$ を**極大元**という．

演習問題 12

$S = \mathbb{R}$（実数全体）とするとき，S 上の二項関係 R で，反射律と対称律は満たすが推移律は満たさないものの例を挙げよ．

第 12 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 7 月 12 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

演習問題 12

$S = \mathbb{R}$（実数全体）とするとき，S 上の二項関係 R で，反射律と対称律は満たすが推移律は満たさないものの例を挙げよ．

解答例 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{|x-y|}$ は整数 $\}$

解説 $x \in \mathbb{R}$ ならば，$\sqrt{|x-x|} = 0$ は整数であるため，$(x, x) \in R$．よって R は反射律を満たす．

$x, y \in \mathbb{R}$ かつ $(x, y) \in R$ ならば，$\sqrt{|x-y|}$ は整数であり，$\sqrt{|y-x|}$ も整数である．よって $(y, x) \in R$ であり，R は対称律を満たす．

例えば $x = 0$, $y = 1$, $z = 5$ とすると，$\sqrt{|x-y|} = 1$ かつ $\sqrt{|y-z|} = 2$ なので，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ である．しかし，$\sqrt{|x-z|} = \sqrt{5}$ は整数ではないので，$(x, z) \notin R$．よって R は推移律を満たさない．

第 13 回「離散数学」 2022 年 7 月 19 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

同値関係

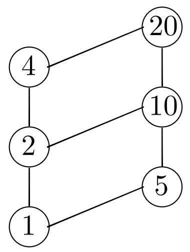
S 上の二項関係 R は，反射律，推移律，反対称律を満たすとき，**半順序関係**という．例えば，

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ は } y \text{ の約数}\},$$
$$S = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

であるとき，R は S 上の半順序関係である．

R が S 上の半順序関係であるとき，$(x,y) \in R$ であることを $x \prec y$ と書く．このとき，$(S, \prec)$ を**半順序集合**という．任意の $x, y \in S$ に対して $x \prec y$ か $y \prec x$ が成り立つとき，R を**全順序関係**という．例えば，テニスの個人ランキングは全順序関係であり，トーナメントでの順位は半順序関係である．

$x, y \in S$ が $x \prec y$ を満たし，$x \prec z \prec y$ である $y \in S$ が存在しないとき，x から y へ上向きの辺を描いてできるグラフを**ハッセ図**という．例えば，例題 2 の半順序集合に対するハッセ図は次のようになる．

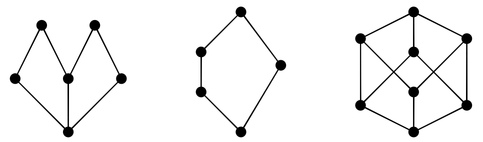


任意の $x \in S$ に対して $x \prec y$ を満たす $y \in S$ を**最大元**という．$y \prec x$ を満たす $x \in S$ が存在しないような $y \in S$ を**極大元**という．$x, y \in S$ に対し，$\{x, y\}$ の**上限** $\sup\{x,y\}$ と**下限** $\inf\{x,y\}$ を次のように定義する．

$$\sup\{x,y\} = \min\{a \in S \mid x \prec a \text{ かつ } y \prec a\}$$
$$\inf\{x,y\} = \max\{a \in S \mid a \prec x \text{ かつ } a \prec y\}$$

半順序集合 $(S, \prec)$ は，任意の $x, y \in S$ に対してそれらの上限，下限が存在するとき，**束**という．

束ではない　　束　　束



群

G を集合とし，$*$ を演算とする．任意の $x, y \in G$ に対して $x * y \in G$ が成り立つとき，G は演算 $*$ について**閉じている**といい，$(G, *)$ を**代数系**という．次の性質を満たす代数系 $(G, *)$ のことを**群**という．

1) **結合律**が成り立つ．すなわち，任意の $x, y, z \in G$ に対して，$(x * y) * z = x * (y * z)$．
2) **単位元**が存在する．すなわち，ある $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して $x * e = e * x = x$．
3) 任意の元 $x \in G$ の**逆元**が存在する．すなわち，ある $x^{-1} \in G$ が存在して，$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$．

例題 1

集合 G と演算 $*$ が次のように与えられるとき，$(G, *)$ は群であるかどうか答えよ．

1) $G = \mathbb{Z}$, $* = +$
2) $G = \mathbb{Q}$, $* = \times$
3) $G = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \setminus \{0\}$, $* = \times$
4) $G = \{0, 1, 2, 3\}$, $x * y = x + y \mod 4$

群 $(G, *)$ について，次が成り立つ（$a * b$ を ab と表す）．

- 単位元 $e \in G$ は唯一つ．
- 任意の $x, y, z \in G$ に対し，$xy = xz$ ならば $y = z$．
- 任意の $x, y \in G$ に対し，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$．

演習問題 13

集合 G を次のように定めるとき，$(G, \times)$ は群であるかどうか調べよ．ただし $\times$ は行列の積を表す．

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

第 13 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 7 月 19 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

演習問題 13

集合 G を次のように定めるとき，$(G, \times)$ は群であるかどうか調べよ．ただし $\times$ は行列の積を表す．

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

解答　群である．

解説　$a, b \in G$ を

$$a = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

のように定める．このとき

$$\begin{aligned} ab &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので，$ab \in G$ である．よって G は演算 $\times$ について閉じており，$(G, \times)$ は代数系である．行列の積なので，結合律が成り立つことは明らか．また単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は G に含まれる（$\theta = 0$）ので，単位元の存在も成り立つ．任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in G$$

とすると，

$$[A(\theta)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A(-\theta) \in G$$

である．よって逆元の存在も成り立つ．以上より，$(G, \times)$ は群である．

第14回「離散数学」 2022年7月26日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

環と体

R を集合とし，2つの演算を $+$ と $\times$ と表す（和，積とは限らない）．R が各演算について閉じているとき，$(R,+,\times)$ を代数系という．次の性質を満たす代数系 $(R,+,\times)$ のことを**環**という．

1) $(R,+)$ は（演算 $+$ に関する）**可換群**である．すなわち，$(R,+)$ は群であり，任意の $x,y\in R$ に対して，$x+y=y+x$ が成り立つ．
2) $(R,\times)$ は（演算 $\times$ に関する）結合律が成り立ち，単位元が存在する．
3) **分配律**が成り立つ．すなわち，任意の $x,y,z\in R$ に対して，

$$x(y+z)=xy+xz,\quad (x+y)z=xz+yz$$

が成り立つ．

環は，演算 $\times$ について逆元の存在を要請しないため，演算 $\times$ に関する群であるとは限らない．環の例を以下に挙げる．

- $(\mathbb{Z},+,\times)$：整数環
- $(\mathbb{Z}_m,+,\times)$：剰余環．ただし

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z}_m=\{0,1,2,\dots,m-1\},\\&x+y=x+y \pmod m,\\&x\times y=x\times y \pmod m)\end{aligned}$$

- $(\mathbf{R}[x],+,\times)$：多項式環．ただし

$$\mathbf{R}[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n:\ a_i\in\mathbb{R},\ n\geq 0\}$$

代数系 $(F,+,\times)$ は，次の条件を満たすとき，**体**という．

1) $(F,+)$ は（演算 $+$ に関する）可換群．
2) $(F\setminus\{0\},\times)$ は（演算 $\times$ に関する）可換群．ただし 0 は群 $(F,+)$ の単位元．
3) 分配律が成り立つ．

体は四則演算が自由に行える代数系と言える．$+$ と $\times$ を通常の意味での和と積とするとき，$(\mathbb{R},+,\times)$ や $(\mathbb{Q},+,\times)$ は体であるが，$(\mathbb{Z},+,\times)$ は体ではない．

次の定理は**フェルマーの小定理**と呼ばれる：

定理 1 (フェルマーの小定理) p を素数とする．$1\leq x\leq p-1$ を満たす任意の整数 x に対して，合同式

$$x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

が成り立つ．

フェルマーの小定理より，任意の素数 p に対して，剰余環 $(\mathbb{Z}_p,+,\times)$ は体であることがわかる．実際，$(\mathbb{Z}_p\setminus\{0\},\times)$ が可換群であることを示すために，任意の $x\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ に対して逆元 $x^{-1}\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ が存在することを示す．フェルマーの小定理より，$\mathbb{Z}_p$ において

$$x^{p-1}=1$$

が成り立つ．したがって，$y=x^{p-2}$ とすれば，$xy=yx=1$ である．よって $y=x^{-1}$ であることが分かる．

剰余環 $(\mathbb{Z}_n,+,\times)$ が体であるための必要十分条件は，n が素数であることである．

例題 1

$(\mathbb{Z}_n,+,\times)$ を剰余環とする．

1) $(\mathbb{Z}_3,+,\times)$ は体であることを示せ．
2) $(\mathbb{Z}_4,+,\times)$ は体でないことを示せ．

演習問題 14

集合 F を次のように定めるとき，$(F,+,\times)$ は体であるかどうか調べよ．ただし $+$ と $\times$ 通常の意味での和と積を表す．

$$F=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$$

第 14 回「離散数学」演習問題の解答 2022 年 7 月 26 日

教科書：上野修一著「工学のためのグラフ理論」数理工学社
参考書：加納幹雄著「例題と演習でわかる離散数学」森北出版　担当：國谷

演習問題 14

集合 F を次のように定めるとき，$(F,+,\times)$ は体であるかどうか調べよ．ただし $+$ と $\times$ 通常の意味での和と積を表す．

$$F = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

解答　体である．

解説　以後，$x, y, z \in F$ を

$$x = a + b\sqrt{3},\ y = c + d\sqrt{3},\ z = e + f\sqrt{3}$$

と表す．$x + y \in F$ および $x \times y \in F$ より，$(F,+,\times)$ は代数系である．結合律

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

が成り立つことは明らか．$(F,+)$ の単位元は 0，$(F,\times)$ の単位元は 1 である．また，$(F,+)$ における x の逆元は

$$x^{-1} = -a - b\sqrt{3}$$

である．$(F \setminus \{0\}, \times)$ における x の逆元は

$$x^{-1} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2}$$

である．よって $(F,\times)$ および $(F \setminus \{0\}, \times)$ は群．さらに

$$x + y = y + x, \quad x \times y = y \times x$$

も成り立つので，可換群．分配律が成り立つことも明らか．よって $(F,+,\times)$ は体である．