

第1回「複素関数論」 2021年10月1日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 複素数

$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とよぶ. 実数 x, y に対し, $z = x + iy$ を複素数とよぶ. x を z の実部, y を z の虚部といい, それぞれ

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

と書く. $\bar{z} = x - iy$ を z の共役複素数あるいは複素共役という. 実数全体を $\mathbb{R}$, 複素数全体を $\mathbb{C}$ と表す.

複素数 $z = x + iy$ は実数の組 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と同一視できる. したがって, 複素数 z は2次元平面上の点となり, このような平面を複素平面という. 複素平面の x 軸を実軸, y 軸を虚軸という. 絶対値 $|z|$ は, 複素平面上の点 z と原点の間の距離であり, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で定められる.

例題 1 次の等式と不等式が成り立つことを確かめよ. ただし $z, w \in \mathbb{C}$ とする.

- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
- 2) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- 3) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- 4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)

2 極形式

$z \neq 0$ ならば, z と原点を結ぶ半直線と, 正の実軸がなす角度 θ が定義される. このような角度を z の偏角といい, $\arg z$ と表す. 偏角は一回転 2π 分の不定性がある. すなわち

$$\arg z = \theta + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

である ($\mathbb{Z}$ は整数全体). 特に $-\pi < \arg z \leq \pi$ や $0 \leq \arg z < 2\pi$ のように制限したものを偏角の主値といい, $\operatorname{Arg} z$ と表す.

$r = |z|$, $\theta = \arg z$ とすれば, $\operatorname{Re} z = r \cos \theta$, $\operatorname{Im} z = r \sin \theta$ である. したがって

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

と表される. これを z の極形式とよぶ.

例題 2 次の等式が成り立つことを示せ. ただし $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (z, w は0でない複素数) とする.

- 1) $|zw| = |z||w|, \arg(zw) = \arg z + \arg w$
- 2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$

3 複素関数

複素数 z に対して複素数 w が定まるような対応を $w = f(z)$ と書き, 複素関数という. $z = x + iy, w = u + iv$ とするとき, $w = f(z)$ は実数の組 (x, y) から実数の組 (u, v) が定まる対応と見なすことができる. よって, $(u, v) = f(x, y)$ と書くことができ, f は z 平面から w 平面への写像と見なせる.

$w = z^2$ を z 平面から w 平面への写像と考える. このとき, z 平面上の

- 1) 実軸に平行な直線 (の族)
- 2) 虚軸に平行な直線 (の族)

が w 平面上のどのような曲線に写るかを考える.

1) z 平面上の実軸に平行な直線 $y = b$ は, w 平面上の次の放物線に写る.

$$u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2$$

2) z 平面上の虚軸に平行な直線 $x = a$ は, w 平面上の次の放物線に写る.

$$u = -\frac{v^2}{4a^2} + a^2$$

演習問題 1

$z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

演習問題の解答は BEEF から提出してください. 提出期限: 授業の翌日中.

第1回「複素関数論」解答解説 2021年10月1日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題1

$z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

解答 $z = -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$

解説 $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{9\pi}{2}}$ である.
よって

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

は $z^3 = -1$ を満たす. このような z は

$$z = -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$$

である.

第2回「複素関数論」 2021年10月4日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 複素関数の微分

複素関数 $f(z)$ は点 $c \in \mathbb{C}$ の近傍で定義されているとする。 f が c で連続であるとは

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。 f が c で微分可能であるとは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。この極限値を f の c における微分係数といい、 $f'(c)$ や $\frac{df(c)}{dz}$ などで表す。

U を開集合とする。すべての点 $c \in U$ で f が連続（微分可能）であるとき、 f は U で連続（微分可能）という。 f が U で微分可能ならば、 U 上の導関数 $f'(z)$ を得る。

例題 1 自然数 n に対し、 $f(z) = z^n$ とする。 $\mathbb{C}$ 上の導関数 $f'(z)$ を求めよ。

実関数の場合と同様に、次が成り立つ。

- $a, b, c \in \mathbb{C}$ とし、 f, g は c で微分可能とする。このとき、 $af + bg$ と fg も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}(af + bg)'(c) &= af'(c) + bg'(c), \\ (fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

が成り立つ。また $g(c) \neq 0$ ならば、 f/g も c で微分可能であり

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

が成り立つ。

- f が c で微分可能であり、 g が $f(c)$ で微分可能ならば、合成関数 $g(f(z))$ は c で微分可能であり、

$$\left.\frac{dg(f(z))}{dz}\right|_{z=c} = g'(f(c))f'(c)$$

が成り立つ。

2 正則関数

$\mathbb{C}$ 全体で微分可能でない関数 $f(z)$ の例として、次のものが挙げられる。

- $f(z) = \bar{z}$
- $f(z) = |z|^2$

f が開集合 U で微分可能であるとき、 f は U で正則という。また、任意の集合 E に対し、 f が E で正則とは、ある開集合 $U \supset E$ が存在して f が U で正則であるときをいう。ある集合上、微分可能だが正則ではない関数が存在する。

例題 2 $f(z) = |z|^2$ は原点で微分可能だが正則ではないことを示せ。

微分可能性の判定には、コーシー・リーマンの関係式を利用できる。 $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$ とすると、 u と v は x, y の関数と見なせる。実際

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

である。 $z_0 = x_0 + iy_0$ とするとき、 f が z_0 で微分可能であるための必要十分条件は、 u, v が (x_0, y_0) で（全）微分可能であり、コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を (x_0, y_0) で満たすことである。

例題 3 次の複素関数 $f(z)$ の微分可能性を調べよ。

- 1) $f(z) = z^2$
- 2) $f(z) = \operatorname{Re} z$
- 3) $f(z) = |z|^2 + i \operatorname{Im} z^2$

演習問題 2

次の複素関数 $f(z)$ の微分可能性を調べよ。

- 1) $f(z) = e^z$
- 2) $f(z) = |z|^2 + i \operatorname{Im} \bar{z}^2$

第2回「複素関数論」解答解説 2021年10月4日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 2

次の複素関数 $f(z)$ の微分可能性を調べよ.

1) $f(z) = e^z$

2) $f(z) = |z|^2 + i\operatorname{Im} \bar{z}^2$

解答 1) $\mathbb{C}$ 全体で正則 2) 虚軸上でのみ微分可能

解説 1) $z = x + iy$ とすると, $f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. したがって

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

このとき, コーシー・リーマンの関係式

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

が任意の (x, y) で成り立つため, $f(z) = e^z$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則.

2) $z = x + iy$ とすると

$$f(z) = |z|^2 + i\operatorname{Im} \bar{z}^2 = x^2 + y^2 - 2ixy$$

である. したがって

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = -2xy.$$

このとき,

$$u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = -2y, \quad v_y = -2x$$

であり, $x = 0$ のときのみコーシー・リーマンの関係式が成り立つ. よって虚軸上でのみ微分可能である.

第3回「複素関数論」 2021年10月8日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 コーシー・リーマンの関係式

$z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ に対する
コーシー・リーマンの関係式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

である。 $f(z)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能ならば、
コーシー・リーマンの関係式が成り立つことを示そう。
実際、微分係数の式

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

において、 $y = y_0$ としてから $x \rightarrow x_0$ とすれば

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

を得る。一方、 $x = x_0$ としてから $y \rightarrow y_0$ とすれば

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

を得る。これらの実部と虚部をそれぞれ比較すれば、
コーシー・リーマンの関係式が得られる。

2 具体的な正則関数

指数関数

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

は整関数（複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則）である。次の性質が成り立つ。

- $(e^z)' = e^z$
- $|e^z| = e^x > 0$
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
- $e^{z+2n\pi i} = e^z, n \in \mathbb{Z}$ (周期 $2\pi i$)

例題 1 次の方程式を解け。

- 1) $e^z = -2$
- 2) $e^z = 1 + i$

オイラーの公式より、実数 x に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が成り立つ。これを複素数 z に拡張することで、

三角関数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

が定義される。これらは整関数であり、

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$$

が成り立つ。また、 $\tan z = \sin z / \cos z$ であり、
これは分母が 0 にならない点で正則である。

例題 2 次の方程式を解け。

- 1) $\sin z = 0$
- 2) $\cos z = 1$

一般に $|\cos z| \leq 1$ や $|\sin z| \leq 1$ が成り立つとは限らないことに注意されたい。例えば

$$\cos(i) = \frac{e^{-1} + e}{2} > 1$$

である。

正の数 x の対数を $\log_e x$ と表す。複素数 $z \neq 0$ の対数関数は、

$$\log z = \log_e |z| + i \arg z$$

で定義される。主値を取る場合は

$$\text{Log } z = \log_e |z| + i \text{Arg } z, \quad -\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

である。これは $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ で正則であり、

$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}$$

が成り立つ。

例題 3 複素数の対数関数 $\log z$ について、次の値を求めよ。

- 1) $\log(1 + i)$
- 2) $\log(-2)$

演習問題 3

次の方程式を解け。

$$5 \cos z - 3i \sin z = 4$$

第3回「複素関数論」解答解説 2021年10月8日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 3

次の方程式を解け.

$$5 \cos z - 3i \sin z = 4$$

解答 $-i \log_e 2 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

解説 三角関数の定義より

$$5 \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - 3i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4$$

である. これを整理すると

$$e^{iz} - 4 + 4e^{-iz} = 0$$

を得る. $w = e^{iz}$ とすれば

$$w - 4 + 4w^{-1} = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4w + 4 = 0$$

より, $w = 2$ である. よって $e^{iz} = 2$ であり,
(複素) 対数を取ると

$$\begin{aligned} iz &= \log 2 \\ &= \log_e 2 + i2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

である. 両辺を i で割って整理すれば

$$z = -i \log_e 2 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

を得る.

第4回「複素関数論」 2021年10月11日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 調和関数

$u = u(x, y)$ は、次の方程式を満たすとき調和関数という。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\Delta u = 0).$$

この式をラプラス方程式といい、 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ をラプラシアンという。

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数であるとき、コーシー・リーマンの関係式より、 u と v は調和関数であることがわかる。逆に、 u が調和関数であるとき、 $f = u + iv$ が正則関数になるような調和関数 v が求められる。このような v のことを、 u の共役調和関数という。

例題 1 関数 $u = 2xy + e^x \sin y$ が調和関数であることを示し、 u の共役調和関数 v を求めよ。また、正則関数 $f(z) = u + iv$ を求めて、変数 $z = x + iy$ を含む式で表せ。

解答の方針 u が調和関数であることは偏微分すれば確かめられる。コーシー・リーマンの関係式より

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = -2x - e^x \cos y \\ v_y &= u_x = 2y + e^x \sin y \end{aligned}$$

を得る。 v_x の式を x について積分すると

$$v = -x^2 - e^x \cos y + \varphi(y)$$

を得る。ただし $\varphi(y)$ は y の関数。これを y について微分すると

$$v_y = e^x \sin y + \varphi'(y)$$

を得る。これを前の v_y の式と比較すると、 $\varphi'(y) = 2y$ 。すなわち $\varphi(y) = y^2 + C$ (C : 任意定数) である。よって、 u の共役調和関数 v は

$$v = -x^2 + y^2 - e^x \cos y + C$$

である。あとは

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= 2xy + e^x \sin y \\ &\quad + i(-x^2 + y^2 - e^x \cos y + C) \end{aligned}$$

を z の式で表せばよい。

2 複素級数

(複素) 数列を $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ または省略して $\{c_n\}$ と表す。数列 $\{c_n\}$ が収束するとは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ となる $c \in \mathbb{C}$ が存在するときをいう。そうでないとき、数列 $\{c_n\}$ は発散するという。

数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ の和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を(無限)級数という。省略して $\sum c_n$ と書くこともある。級数 $\sum c_n$ が収束するとは、部分和

$$S_N = \sum_{n=1}^N c_n$$

の数列 $\{S_N\}$ が収束するときをいう。そうでないとき、級数 $\sum c_n$ は発散するという。各項の絶対値を取った級数 $\sum |c_n|$ が収束するとき、級数 $\sum c_n$ は絶対収束するという。

- 級数 $\sum c_n$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ である。
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$ ならば、級数 $\sum c_n$ は発散する。
- 級数 $\sum c_n$ は絶対収束するならば、収束する。

級数 $\sum c_n$ の収束判定法には、次のようなものがある。

(コーシー・アダマール) $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$ とするとき、 $\lambda < 1$ ならば $\sum c_n$ は絶対収束し、 $\lambda > 1$ ならば発散する。

(ダランベール) $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}|/|c_n|$ が収束するとき、 $\lambda < 1$ ならば $\sum c_n$ は絶対収束し、 $\lambda > 1$ ならば発散する。

例題 2 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ は絶対収束することを示せ。

演習問題 4

関数 $u = x/(x^2 + y^2)$ の共役調和関数 v を求めよ。また、正則関数 $f(z) = u + iv$ を求めて、変数 $z = x + iy$ を含む式で表せ。ただし $z \neq 0$ とする。

第4回「複素関数論」解答解説 2021年10月11日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題4

関数 $u = x/(x^2 + y^2)$ の共役調和関数 v を求めよ。また、正則関数 $f(z) = u + iv$ を求めて、変数 $z = x + iy$ を含む式で表せ。ただし $z \neq 0$ とする。

解答 C を任意定数とすると、

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C$$
$$f(z) = \frac{1}{z} + iC$$

解説 コーシー・リーマンの関係式より

$$v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$v_y = u_x = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

を得る。 v_x の式を積分すると

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi(y)$$

を得る。これを y について微分すると

$$v_y = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(y)$$

を得る。したがって $\varphi'(y) = 0$ なので、 $\varphi(y) = C$: 任意定数。よって

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C \quad (C : \text{任意定数})$$

である。関数 $f = u + iv$ は

$$f = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + C \right)$$
$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + iC$$
$$= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + iC = \frac{1}{z} + iC$$

である。

第5回「複素関数論」 2021年10月15日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 ベキ級数

複素級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

のことを、 a を中心とするベキ級数という。また c_n をベキ級数の係数という。ベキ級数の（絶対）収束・発散については、ある $0 \leq R \leq \infty$ が存在し、

- $|z-a| < R$ ならばベキ級数は収束し、
 $|z-a| > R$ ならば発散する。

が成り立つ。このような R を収束半径という。例えば、

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は $R=1$ 。
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の収束半径は $R=\infty$ 。

である。 λ を級数 $\sum c_n$ の収束判定法（コーシー・アダマールやダランベール）で用いられる値とすると、 $R=1/\lambda$ である。

例題 1 次のベキ級数の収束半径 R を求めよ。

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} z^n \quad (p > 0)$

$$\text{収束半径 } R \text{ のベキ級数 } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

は、 a を中心とする半径 R の開円板

$$\mathbb{D}(a, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$$

において正則である。すなわち、 $z \in \mathbb{D}(a, R)$ において $f(z)$ は微分可能であり、

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

が成り立つ（項別微分）。これを繰り返すと、 $z \in \mathbb{D}(a, R)$ において $f(z)$ は何回でも微分可能であり、係数 c_n は

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

を満たすことが分かる。

2 線積分

複素数値関数 $f(t) = u(t) + iv(t)$, $a \leq t \leq b$ の積分は

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

となる。積分の評価式

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

が成り立つ。複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線 C は

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

のように表される。 $z(a)$ を始点、 $z(b)$ を終点という。始点と終点が一致 ($z(a) = z(b)$) する曲線を閉曲線という。自分自身と交わらない曲線を単一曲線という。 $z(t)$ が C^1 級で $z'(t) \neq 0$ である曲線を滑らかな曲線という。曲線 C_1 の終点と曲線 C_2 の始点が一致するとき、 C_1 と C_2 をつないだ曲線を $C_1 + C_2$ で表す。有限個の滑らかな曲線がつながってできる曲線を区分的に滑らかな曲線という。

曲線 $C : z(t)$ が定義される区間 $[a, b]$ を

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

と分割する。 $|\Delta| := \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$ とし、 $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ とするとき、 $f(z)$ の線積分は

$$\int_C f(z) dz := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z(\tau_k)) [z(t_k) - z(t_{k-1})]$$

で定義される。 $z(t)$ が C^1 級で、 f が曲線 C 上連続ならば、次式が成り立つ。

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

演習問題 5

次のベキ級数の収束半径 R を求めよ。

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2}}{n!} z^n \quad (a > 0)$

第5回「複素関数論」解答解説 2021年10月15日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題5

次のべき級数の収束半径 R を求めよ.

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2}}{n!} z^n \quad (a > 0)$

解答

1) 2

2) $a \leq 1$ のとき ∞ . $a > 1$ のとき 0.

解説 1) $c_n = n/2^n$ とすると

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

である. よって,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{2}$$

であり, $R = 1/\lambda = 2$ である.

2) $c_n = a^{n^2}/n!$ とすると

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{a^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^{n^2}} = \frac{a^{2n+1}}{n+1}$$

である. よって,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \begin{cases} 0, & a \leq 1, \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$$

であり,

$$R = \frac{1}{\lambda} = \begin{cases} \infty, & a \leq 1, \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

である.

第6回「複素関数論」 2021年10月18日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 具体的な線積分

曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ 上で z が C^1 級であり f が連続ならば, C に沿った f の線積分は

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

となる. $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とする. a を中心とする半径 r の円を正の方向 (反時計方向) に1周する曲線 C は

$$C: z(t) = a + re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

とパラメータ表示できる. $z'(t) = ire^{it}$ に注意し, C に沿った $(z-a)^n$ (n : 整数) の線積分 $\int_C (z-a)^n dz$ を計算すると

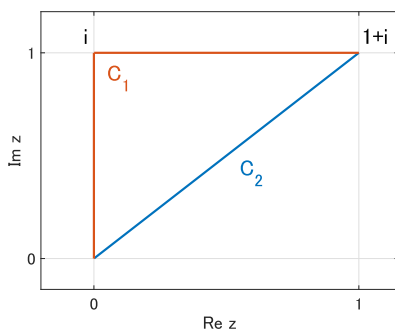
$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

が得られる.

領域 D で $F'(z) = f(z)$ となっているとき, $F(z)$ を $f(z)$ の原始関数という. $f(z)$ が原始関数をもつならば, 区分的に滑らかな曲線 C に沿った線積分 $\int_C f(z) dz$ は曲線 C の両端だけで定まる (途中の経路に依存しない).

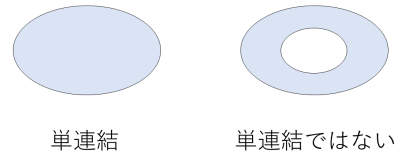
例題 1 点 $0, i, 1+i$ をこの順に結んだ折れ線を C_1 とし, 0 から $1+i$ に向かう線分を C_2 とする. 各 $j = 1, 2$ について, 以下の問いに答えよ.

- 1) C_j をパラメータ表示せよ.
- 2) $\int_{C_j} z dz$ を求めよ.
- 3) $\int_{C_j} \operatorname{Re} z dz$ を求めよ.



2 コーシーの積分定理

2つ以上の開集合に分けられない開集合を連結という. 空でない連結開集合を領域という. 有界領域 D が単連結とは, D の任意の単一閉曲線の内部が D に含まれるときをいう.



定理 1 (コーシーの積分定理) $f(z)$ は単連結領域 D で正則とする. このとき, D 内の任意の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

長方形に対するコーシーの積分定理を示す. 閉長方形領域 R 上で $f(z)$ は正則とする. R の境界を ∂R とするとき,

$$I = \int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

を示す. R の各辺の中点を取り, 小長方形を4つ作ると, そのどれかの周に関する線積分の絶対値は $|I|/4$ 以上であり, その長方形を R_1 とする. R_1 について同様の手順を取り, 以下繰り返すと, 小長方形の列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}, \quad \partial R_n \text{ の長さ} = \frac{L}{2^n}$$

を満たすものが存在する. これを利用して, $|I| \neq 0$ を仮定すると矛盾が生じることを示す.

演習問題 6

0 から $\sqrt{2}$ に向かった後に中心 0 , 半径 $\sqrt{2}$ の円弧に沿って $1+i$ に至る曲線を C_1 とし, 0 から $1+i$ に向かう線分を C_2 とする. 各 $j = 1, 2$ について, 次の線積分を求めよ.

$$\int_{C_j} \bar{z} dz$$

第6回「複素関数論」解答解説 2021年10月18日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 6

0 から $\sqrt{2}$ に向かった後に中心 0, 半径 $\sqrt{2}$ の円弧に沿って $1+i$ に至る曲線を C_1 とし, 0 から $1+i$ に向かう線分を C_2 とする. 各 $j = 1, 2$ について, 次の線積分を求めよ.

$$\int_{C_j} \bar{z} dz$$

解答

- 1) $1 + \frac{\pi}{2}i$
- 2) 1

解説 1) 曲線 C_1 は

$$C_1 = \tilde{C}_1 + \hat{C}_1$$

$$\tilde{C}_1 : z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2},$$

$$\hat{C}_1 : z(t) = \sqrt{2}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

とパラメータ表示できる. よって求める線積分は

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \bar{z} dz &= \int_0^{\sqrt{2}} t dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}e^{-it} (i\sqrt{2}e^{it}) dt \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}i \end{aligned}$$

となる.

2) 曲線 C_2 は

$$C_2 : z(t) = (1+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

とパラメータ表示できる. よって求める線積分は

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \bar{z} dz &= \int_0^1 (1-i)t(1+i) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる.

第7回「複素関数論」 2021年10月22日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 コーシーの積分定理

単連結でない領域を複連結領域という。複連結領域 D の境界 ∂D は有限個の単一閉曲線 $C_0, C_1, \dots, C_n$ でできているとする。特に C_0 を外部境界とする。コーシーの積分定理の一般化： f が $D \cup \partial D$ で正則ならば、次が成り立つ。

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{i=0}^n \int_{C_i} f(z) dz = 0$$

関数が正則な範囲では、積分経路を変えても線積分は変わらない。実際、次が成り立つ。

定理 1 (周回変形の原理) (i) 2つの曲線 Γ_1 と Γ_2 の始点と終点がそれぞれ一致しており、 f が正則な範囲で Γ_1 を Γ_2 に連続的に変形できるならば、次が成り立つ。

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

(ii) 2つの閉曲線 C_1 と C_2 が囲む領域とその境界で f が正則ならば、次が成り立つ。

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

周回変形の原理を利用して、様々な問題を解くことができる。

例題 1 1) C を $z(t) = -1 + e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) で定められる曲線とする。 $\int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$ の値を求めよ。

2) C を ± 1 を通らない単一閉曲線とする。 $\int_C \frac{dz}{z^2 - 1}$ の取りうる値をすべて求めよ。

C を閉曲線とし、 a を C 上にない点とする。このとき

$$W(a, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

は整数値であり、 C の a の回りの回転数という。

2 コーシーの積分公式

次の定理が成り立つ。

定理 2 (コーシーの積分公式) D は有界領域であり、境界 ∂D は区分的に滑らかな曲線 (の有限和) とする。 f が $D \cup \partial D$ で正則ならば、次が成り立つ。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (a \in D)$$

証明の概要 $a \in D$ とするとき、 $r > 0$ が十分小さければ、 a を中心とする半径 r の円周 $C_r : |z - a| = r$ が D に含まれる。このとき、周回変形の原理より

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

が成り立つ。ここで、第6回の内容より

$$\int_{C_r} \frac{f(a)}{z - a} dz = f(a) \int_{C_r} (z - a)^{-1} dz = 2\pi i f(a)$$

が成り立つことに注意すると

$$\left| \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i f(a) \right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} |dz|$$

を得る。 $r \rightarrow 0$ で右辺が0に収束することを示せば良い。

例題 2 C がそれぞれ次のように与えられるとき、 $\int_C \frac{\cos z}{z^2 - 1} dz$ を求めよ。

1) $C : |z - 1| = 1$

2) $C : |z + 1| = 1$

3) $C : |z - i| = 1$

演習問題 7

次の積分を求めよ。

1) $\int_C \frac{\cos z}{z^2 + 2z} dz$, $C : |z| = 1$

2) $\int_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz$, $C : |z| = 2$

第7回「複素関数論」解答解説 2021年10月22日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題7

次の積分を求めよ.

- 1) $\int_C \frac{\cos z}{z^2 + 2z} dz, \quad C : |z| = 1$
- 2) $\int_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz, \quad C : |z| = 2$

解答

- 1) πi
- 2) $4\pi i$

解説 1) $f(z) = \cos z/(z+2)$ とすると, 求める線積分は

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz$$

である. $f(z)$ は C の内部で正則であり, $z=0$ は C の内部にあることに注意すると, コーシーの積分公式より

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

を得る.

2) 部分分数分解より

$$\frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$$

を得る. $f(z) = 1$ とすると, $f(z)$ は C の内部で正則であり, $z = \pm i$ は C の内部にあることに注意すると, コーシーの積分公式より

$$\begin{aligned} \int_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz &= \int_C \frac{f(z)}{z+i} dz + \int_C \frac{f(z)}{z-i} dz \\ &= 2\pi i f(-i) + 2\pi i f(i) \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

を得る.

第8回「複素関数論」 2021年10月25日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 平均値原理と最大値原理

a を中心とする半径 R の開円板を $\mathbb{D}(a, R)$ と表す. コーシーの積分公式を利用すると, 次の平均値原理が成り立つことを証明できる.

定理 1 (平均値原理) $f(z)$ は $\mathbb{D}(a, R)$ で正則とする. 任意の $0 < r < R$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

平均値原理の等式より,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[|f(a)| - |f(a + re^{i\theta})| \right] d\theta \leq 0$$

が成り立つ. したがって, 領域 $\mathbb{D}(a, R)$ 上の $|f(z)|$ の最大値が $|f(a)|$ であったとすると, 任意の $0 < r < R$ と $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して

$$|f(a)| = |f(a + re^{i\theta})|$$

が成り立つ. したがって $|f(z)|$ は領域 $\mathbb{D}(a, R)$ で定数である. このとき, $f(z)$ も領域 $\mathbb{D}(a, R)$ で定数である (例題 1).

例題 1 D を領域とし, $f(z)$ は D 上の正則関数とする. $|f(z)|$ が D で定数ならば, $f(z)$ も D で定数であることを示せ.

上の考察より, 次の最大値原理が成り立つ.

定理 2 (最大値原理) (i) 領域上の定数でない正則関数の絶対値は, 領域内部の点で最大にならない.

(ii) 有界領域上の正則関数の絶対値は, 境界上で取られる.

例題 2 領域 $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ および正則関数 $f(z) = e^z$ に対して, 最大値原理を確かめよ.

2 テイラー展開

コーシーの積分公式を利用すると, 次の定理が成り立つことを示すことができる.

定理 3 (正則関数のテイラー展開) D を領域とし, $f(z)$ は D 上の正則関数とする. $a \in D$ に対し, 正の実数 R は $\mathbb{D}(a, R) \subset D$ を満たすようなものとする. このとき, 任意の $z \in \mathbb{D}(a, R)$ に対して, $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

のようにべき級数で表される. これを $f(z)$ の a を中心とするテイラー展開という. 係数 c_n は

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

を満たす. ただし C は a のまわりを正の方向に一周する D 内の任意の単一閉曲線である.

証明の概要 $z \in \mathbb{D}(a, R)$ に対して, コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

を得る. ここで $|z - a|/|\zeta - a| < 1$ より

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

を得る. これを $f(z)$ の式に代入して, 周回変形の原理を用いる.

テイラー展開より, 正則関数は何回でも微分可能であり, 正則関数の微分は正則関数であることがわかる. また, 次の等式が成り立つ (グルサの定理).

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

演習問題 8

$C : z(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ とする. グルサの定理を利用して, $\int_C \frac{\cos z}{(z + \pi)^3} dz$ の値を求めよ.

第8回「複素関数論」解答解説 2021年10月25日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 8

$C : z(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ とする. グルサの定理を利用して, $\int_C \frac{\cos z}{(z + \pi)^3} dz$ の値を求めよ.

解答 πi

解説 $f(z) = \cos z$ は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) であり, C は $-\pi$ のまわりを正の方向に一周する単一閉曲線である. よって, グルサの定理より

$$f''(-\pi) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z + \pi)^3} dz = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{\cos z}{(z + \pi)^3} dz$$

が成り立つ. 書き換えると,

$$\int_C \frac{\cos z}{(z + \pi)^3} dz = \pi i f''(-\pi) = \pi i [-\cos(-\pi)] = \pi i$$

である.

第9回「複素関数論」 2021年10月29日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 テイラー展開

領域 D で $f(z)$ は正則とする. $\mathbb{D}(a, R) \subset D$ であるとき, 点 a を中心とする $f(z)$ のテイラー展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \mathbb{D}(a, R)$$

である. ただし係数 c_n は

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

である ($C: a$ のまわりを正の方向に一周する D 内の任意の単一閉曲線). $\mathbb{D}(a, R)$ において $|f(z)| \leq M$ ならば,

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$$

が成り立つ. 代表的な初等関数の原点を中心とするテイラー展開 (マクローリン展開) は

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots, \quad |z| < \infty, \\ \cos z &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots, \quad |z| < \infty, \\ \sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots, \quad |z| < \infty \end{aligned}$$

である. 次の命題が成り立つ.

命題 1 $f(z)$ は原点で正則な関数であり, マクローリン展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- 1) f が奇関数ならば, $c_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
- 2) f が偶関数ならば, $c_{2n+1} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

べき級数には係数の一意性があるため, 係数 c_n を計算するときは微分や積分以外の方法を用いてもよい.

例題 1 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

- 1) $\frac{1}{z^2 + z - 2}, \quad |z| < 1$
- 2) $(z+1)e^z$

2 代数学の基本定理

複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を整関数という. 次の定理が成り立つ.

定理 1 (リュービルの定理) 有界な整関数は定数しかない.

次の定理は代数学の基本定理と呼ばれる.

定理 2 複素係数の $n (\geq 1)$ 次方程式

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0, \quad c_n \neq 0$$

は複素数の範囲で必ず解をもつ. 特に, 重複を含めて解の数はちょうど n 個である.

証明の概要 方程式の左辺を $P(z)$ とする. $\mathbb{C}$ 全体で $P(z) \neq 0$ を仮定し, 矛盾を示す. このとき $f(z) = 1/P(z)$ は整関数であるが, $|P(z)| \rightarrow \infty$ ($|z| \rightarrow \infty$) であることから, $f(z)$ は有界であることがわかる. よってリュービルの定理より $f(z)$ は定数であり, $P(z)$ も定数となるが, $P(z)$ は多項式なので矛盾である.

3 正則関数の零点

$f(a) = 0, a \in D$ のとき, 点 a を $f(z)$ の零点という. テイラー展開が

$$f(z) = c_k (z-a)^k + c_{k+1} (z-a)^{k+1} + \cdots, \quad c_k \neq 0$$

となるとき, k を零点 a の位数といい, a を $f(z)$ の k 位の零点という. a が $f(z)$ の k 位の零点であるための必要十分条件は

$$0 = f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a), \quad f^{(k)}(a) \neq 0,$$

である.

例題 2 $(1 - e^z) \sin z$ の零点とその位数を求めよ.

演習問題 9

関数 $\frac{z+2}{1-z^2}, |z| < 1$ のマクローリン展開を求めよ.

第9回「複素関数論」解答解説 2021年10月29日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題9

関数 $\frac{z+2}{1-z^2}$, $|z| < 1$ のマクローリン展開
を求めよ.

解答 $2+z+2z^2+z^3+2z^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2} z^n$

解説 部分分数分解すると

$$\frac{z+2}{1-z^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+z}$$

である. $|z| < 1$ では等比級数の公式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1+z+z^2+\cdots, \\ \frac{1}{1+z} &= 1-z+z^2-\cdots \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{1-z^2} &= \frac{3}{2}(1+z+z^2+\cdots) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-z+z^2-\cdots) \\ &= 2+z+2z^2+z^3+2z^4+\cdots \end{aligned}$$

を得る.

第10回「複素関数論」 2021年11月1日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 ローラン展開

$f(z)$ が $\mathbb{D}(a, R) \setminus \{a\}$ で正則なとき, a を $f(z)$ の特異点という. a が $f(z)$ の特異点であるとき, $f(z)$ は a の周りで負のべきも許したべき級数で表すことができる. そのような級数展開をローラン展開という.

定理 1 (ローラン展開) $f(z)$ は円環

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}, \quad 0 \leq r < R \leq \infty$$

で正則とする. このとき $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (r < |z - a| < R)$$

と表される. ただし

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

であり, C は a の周りを正の向きに一周する円環内の単一閉曲線である.

ローラン展開における負のべきの和

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

のことを主要部という. 主要部に応じて a は次の3種類に分類される.

- (i) 主要部がないとき, a を除去可能特異点という.
- (ii) 主要部が有限和 ($c_{-k} \neq 0$ かつ $c_n = 0, n < -k$) のとき, a を k 位の極という.
- (iii) 主要部が無限和のとき, a を真性特異点という.

例題 1 次の関数 $f(z)$ の点 a を中心とするローラン展開を求め, 特異点 a の種類を答えよ.

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad a = 0$

2) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}, \quad a = 1$

3) $\frac{1}{z(z-1)^2}, \quad a = 0$

2 留数

C を a の周りを正の向きに一周する $\mathbb{D}(a, R)$ 内の任意の単一閉曲線とする.

$$\int_C (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

に注意して, ローラン展開の両辺を C に沿って積分すると

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

を得る. すなわち, ローラン展開の -1 次の項の係数 c_{-1} によって積分が求まる. このような c_{-1} のことを $f(z)$ の a における留数とよび, $\text{Res}(f, a)$ や省略して $\text{Res}(a)$ などと書く. より一般に, 次の留数定理が成り立つ.

定理 2 (留数定理) f が $D \cup \partial D$ において有限個の特異点 $z_1, \dots, z_n \in D$ を除いて正則ならば, 次の等式が成り立つ.

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

留数計算では, 次の方法を利用できる.

定理 3 a を $f(z)$ の特異点とする.

- (i) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \neq 0$ が存在すれば, a は f の 1 位の極であり, $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.
- (ii) $k \geq 2$ のとき, $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) \neq 0$ が存在すれば, a は f の k 位の極であり,

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}$$

例題 2 関数 $f(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}, a \neq b$ の特異点とそこにおける留数を求めよ.

演習問題 10

関数 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z-1)}$ の特異点とそこにおける留数を求めよ.

第10回「複素関数論」解答解説 2021年11月1日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 10

関数 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 1)}$ の特異点とそこにおける留数を求めよ。

解答 特異点は $1, \pm i$. 留数は $\text{Res}(1) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(i) = \frac{1-i}{4}$, $\text{Res}(-i) = \frac{1+i}{4}$

解説 分母は $(z+i)(z-i)(z-1)$ と因数分解できるので, $z = 1, \pm i$ が特異点. すべて1位の極である.

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z+i)(z-1)} = \frac{-1}{2i(i-1)} = \frac{1-i}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-1)} = \frac{-1}{2i(i+1)} = \frac{1+i}{4}. \end{aligned}$$

第 11 回「複素関数論」 2021 年 11 月 8 日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 留数

$f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ の形の関数を考える. $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ は $z = a$ で正則であり, $\varphi(a) \neq 0$ かつ $\psi(a) = 0$ (1 位の零点) とする. このとき, $z = a$ は $f(z)$ の 1 位の極であり, 留数 $\text{Res}(f, a)$ は次の公式で求められる.

$$\text{Res}(f, a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

例題 1 関数 $f(z) = z/\sin z$ の特異点とそこにおける留数を求めよ.

2 無限遠点における留数

複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えてできる $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を拡張された複素平面という. $\mathbb{C}^*$ は立体射影によって 3 次元空間の複素球面と同一視される.

$f(z)$ が $|z| > R$ で正則ならば,

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$$

は $0 < |w| < 1/R$ で正則である. $F(w)$ の原点を中心とするローラン展開を $F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n$ とするとき, $c_n = a_{-n}$ とおくと

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > R$$

を得る. これを $f(z)$ の ∞ におけるローラン展開という. この場合の主要部は $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ である. 有限の a の場合と同様に, ∞ は

- (i) 主要部がないとき, 除去可能特異点.
- (ii) 主要部が有限和 ($c_k \neq 0$ かつ $c_n = 0, n > k$) のとき, k 位の極.
- (iii) 主要部が無限和のとき, 真性特異点.

∞ における留数は $\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$ である. このことより, $f(z)$ が $\mathbb{C}$ において有限個の特異点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ を除いて正則ならば

$$\text{Res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) = 0$$

が成り立つ.

例題 2 次の関数の $\mathbb{C}^*$ での特異点と留数を求めよ.

$$1) \frac{z^2}{z+1} \quad 2) \frac{1}{(z+1)^n(z-2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3 留数計算

留数を用いて定積分を計算することを留数計算とよぶ. 例として, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ を留数計算で求める. $f(z) = 1/(z^2+1)$ とし, 原点を中心とする半径 $R > 1$ の上半円周を C_R とする. 留数定理より

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi$$

を得る. $R \rightarrow \infty$ とすると, 左辺の第 2 項は 0 に収束するので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

となる.

別の例として, 三角関数の定積分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\sin\theta}$ を留数計算で求める. $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とすると $d\theta = dz/(iz)$ かつ $\sin\theta = (z - z^{-1})/(2i)$. よって

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\sin\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3+2\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+3iz-1} \end{aligned}$$

となる. この右辺に留数定理を用いれば, 解 $2\pi/\sqrt{5}$ が得られる.

演習問題 11

次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$$

第11回「複素関数論」解答解説 2021年11月8日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 11

次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta}$$

解答 2π

解説 $C: z(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする (原点中心の単位円). オイラーの公式より

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

が成り立つ. $d\theta = dz/(iz)$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta} d\theta &= \int_C \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{i} \int_C \frac{2}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} dz \\ &= -\frac{2}{i} \int_C \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} dz \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad \beta = \sqrt{2} - 1$$

とした. C の内部にある特異点は $z = \beta$ なので, 留数定理より

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta} d\theta &= 2\pi i \left(-\frac{2}{i} \right) \text{Res}(f, \beta) \\ &= -4\pi \lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta) \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{4\pi}{\alpha - \beta} = 2\pi \end{aligned}$$

となる. ただし

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

とした.

第12回「複素関数論」 2021年11月12日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 留数計算

留数を用いて定積分を計算することを留数計算とよぶ。例として、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ を留数計算で求める。 $f(z) = 1/(z^2+1)$ とし、原点を中心とする半径 $R > 1$ の上半円周を C_R とする。留数定理より

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) \\ = \pi$$

を得る。 $R \rightarrow \infty$ とすると、左辺の第2項は0に収束するので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

となる。

例題1 次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

解答の方針 $f(z) = \cos z/(z^2+1)$ として計算するとうまくいかないのでは、

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

として複素積分を計算する。上の例のように留数定理を利用すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$$

を得る。 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ なので、実部を比較すると、求める積分値は π/e である。

関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

である。ここで ξ は実数である。

例題2 $f(x) = 1/(x^2+1)$ のフーリエ変換を求めよ。

2 主値積分

$1/x$ は $x=0$ に特異点をもつので、広義積分の意味では $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ は定まらない。ところが、次の主値積分を考えることができる。

$$\text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right] \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \log \frac{\epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \log 1 = 0.$$

主値積分を応用して、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求める。

例題1と同様に、 $f(z) = e^{iz}/z$ として、積分の虚部をとればよい。原点を中心とする半径 $0 < \epsilon < R$ の下半円周を Γ_{ϵ} とする。すなわち

$$\Gamma_{\epsilon} : z(t) = \epsilon e^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

である。留数定理より

$$\left(\int_{\epsilon}^R + \int_{-R}^{-\epsilon} \right) \frac{dx}{x} + \left(\int_{C_R} + \int_{\Gamma_{\epsilon}} \right) \frac{dz}{z} \\ = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i$$

である。 $R \rightarrow \infty$ とすると、 C_R 上の積分は0に収束する。一方、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると、 Γ_{ϵ} 上の積分は πi に収束する。よって、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi$$

である。虚部を取れば

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

演習問題 12

次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

第12回「複素関数論」解答解説 2021年11月12日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 12

次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

解答 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

解説 $f(z) = 1/(z^2 + z + 1)$ とする. 特異点は

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad a_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

であり, 上半平面にあるのは a_1 (1位の極) のみである. 原点を中心とする半径 $R > 1$ の上半円周を C_R とすれば, 留数定理より

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \int_{C_R} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz \\ = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_1) \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (1)$$

である. 一方

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{i2\theta} + Re^{i\theta} + 1} d\theta \right| \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2 - R - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より, (1) において $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

を得る.

第13回「複素関数論」 2021年11月15日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 偏角の原理

特異点が極だけである関数を有理型関数という。 $f(z)$ を有理型関数とし、 $z = a$ は k 位の零点とする。このとき、 a で正則な関数 $g(z)$ で $g(a) \neq 0$ を満たすものが存在して、

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

と書ける。すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

を得るが、 $g'(z)/g(z)$ は a で正則なので、

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a \right) = k$$

が成り立つ。同様に、 $z = b$ が $f(z)$ の ℓ 位の極ならば、

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, b \right) = -\ell$$

が成り立つことがわかる。

単一閉曲線 C に囲まれた領域を D とし、 D 内の f の零点の個数を $n(0, f)$ 、極の個数を $n(\infty, f)$ と表す。ただしいずれも重複度を含める。 $f(z)$ が $D \cup C$ で有理型であり、 C 上に零点も極ももたないならば、次の等式が成り立つ（偏角の原理）：

$$n(0, f) - n(\infty, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

また、 C に沿って z が動いたときの $f(z)$ の偏角の増分を $\int_C d \arg f(z)$ と表すと、

$$n(0, f) - n(\infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z)$$

も成り立つ。

例題 1 原点を中心とする単位円を C とし、 $f(z) = \frac{z-2i}{z^2}$ とするとき、 f による C の像 $f(C)$ の 0 の周りの回転数 $W(0, f(C))$ を求めよ。

2 ルーシェの定理

偏角の原理を利用すると、次のルーシェの定理を証明できる。

定理 1 (ルーシェの定理) 単一閉曲線 C に囲まれた領域を D とし、 $f(z)$ と $g(z)$ は $D \cup C$ で正則であり、 C 上では $|f(z)| > |g(z)|$ を満たすとする。このとき、 $f(z)$ と $f(z) + g(z)$ の D 内の零点の個数は等しい。

証明の概要 $h(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)}$ とすると、

$$|h(z) - 1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

が C 上で成り立つ。よって $h(C)$ は原点の周りを通らず、偏角の原理より $n(0, h) = 0$ となる。一方、

$$\frac{[f(z) + g(z)]'}{f(z) + g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

なので、

$$n(0, f + g) = n(0, f) + n(0, h) = n(0, f)$$

となる。

例題 2 ルーシェの定理を用いて、次のそれぞれの集合における方程式 $z^7 - 3z^6 + z^2 + 9z - 1 = 0$ の解の個数を答えよ。

- 1) 単位円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- 2) 円環 $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
- 3) 円の外部 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$

演習問題 13

原点を中心とする単位円を C とし、 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{2z^2 + 1}{z^3 + 2iz^2 + z}$$

とするとき、 f による C の像 $f(C)$ の原点まわりの回転数 $W(0, f(C))$ を求めよ。

第13回「複素関数論」解答解説 2021年11月15日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 13

原点を中心とする単位円を C とし, $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{2z^2 + 1}{z^3 + 2iz^2 + z}$$

とすると, f による C の像 $f(C)$ の原点まわりの回転数 $W(0, f(C))$ を求めよ.

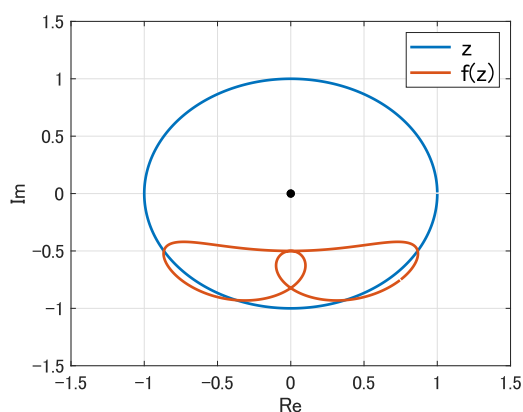
解答 0

解説

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z^2 + 1}{z(z^2 + 2iz + 1)} \\ &= \frac{2(z + i/\sqrt{2})(z - i/\sqrt{2})}{z[z + (1 + \sqrt{2})i][z + (1 - \sqrt{2})i]} \end{aligned}$$

なので, $f(z)$ の零点は $z = \pm i/\sqrt{2}$, 極は $z = 0, -(1 \pm \sqrt{2})i$ である. このうち, 単位円 C の内側にあるのは零点 $z = \pm i/\sqrt{2}$ と極 $z = 0, -(1 - \sqrt{2})i$ である. よって $n(0, f) = n(\infty, f) = 2$ なので, 偏角の原理より, 回転数は

$$n(0, f) - n(\infty, f) = 0.$$



第14回「複素関数論」 2021年11月19日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

1 一次分数変換

次のような変換を一次分数変換という.

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

基本的な一次分数変換は以下の3つである.

(平行移動) $w = z + b$

(回転) $w = az \quad (a \neq 0)$

(反転) $w = 1/z$

すべての一次分数変換は, これら3つを合成することで得られる. 逆変換は

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

であり, 逆変換も一次分数変換である.

一次分数変換で動かない点, すなわち

$$w = f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{az + b}{cz + d}$$

を満たす z を不動点という. 整理すると

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

を得る. この解は, $c = d - a = b = 0$ ならばすべての複素数であり, そうでなければ高々2個の複素数である. このことから次の事実が成り立つ.

- 一次分数変換は, 3点の変換先が定めれば唯一つに定まる.

例題 1 点 $1, 0, \infty$ をそれぞれ点 $0, -1/2, 1$ に写す一次分数変換を求めよ.

また, 次の事実が成り立つ.

(円々対応) 一次分数変換は, z 平面の円を w 平面の円に写す. ただし, 直線は無限遠点 ∞ を通る円と見なす.

- 上半平面 $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ を上半平面 $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ に写す一次分数変換は

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0)$$

である.

- 単位円板 $\{|z| < 1\}$ を単位円板 $\{|w| < 1\}$ に写す一次分数変換は

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (|\alpha| < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

である.

- 上半平面 $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ を単位円板 $\{|w| < 1\}$ に写す一次分数変換は

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (\operatorname{Im} \alpha > 0, \theta \in \mathbb{R})$$

である.

2 ジュウコフスキー変換

次の変換はジュウコフスキー変換と呼ばれる.

$$w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

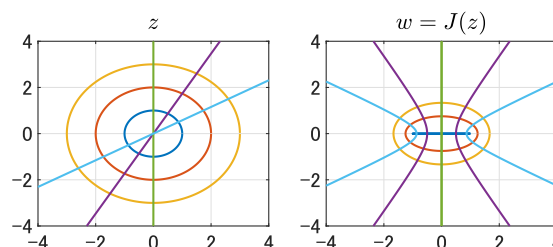
原点を中心とする半径 r の円 $z = re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ は, ジュウコフスキー変換 $w = J(z) = u + iv$ によって, 楕円

$$\left[\frac{u}{(r + r^{-1})/2} \right]^2 + \left[\frac{v}{(r - r^{-1})/2} \right]^2 = 1$$

に写る. また, 原点から出る放射線 $z = re^{i\alpha} \quad (0 < r < \infty)$ は, 双曲線

$$\left(\frac{u}{\cos \alpha} \right)^2 - \left(\frac{v}{\sin \alpha} \right)^2 = 1$$

に写る.



演習問題 14

点 $0, -1, 1$ をそれぞれ点 $1, 0, \infty$ に写す一次分数変換を求めよ.

第14回「複素関数論」解答解説 2021年11月19日

教科書：相川弘明著「複素関数入門」共立出版

演習問題 14

点 $0, -1, 1$ をそれぞれ点 $1, 0, \infty$ に写す一次分数変換を求めよ。

解答 $w = \frac{z+1}{-z+1}$

解説 $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とする. $z=0$ のとき $w=1$ より,

$$1 = \frac{b}{d} \Leftrightarrow b = d$$

を得る. また, $z=-1$ のとき $w=0$ より

$$0 = \frac{-a+b}{-c+d} \Leftrightarrow a = b$$

を得る. よって, $a = b = d$ であり,

$$w = \frac{az+a}{cz+a}$$

である. また, $z=1$ のとき $w=\infty$ より

$$\infty = \frac{2a}{c+a} \Leftrightarrow c = -a$$

を得る. まとめると

$$w = \frac{az+a}{-az+a} = \frac{z+1}{-z+1}$$

である.