

第1回「微分積分1」 2022年4月12日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

関数の極限と連続性

数列 $\{a_n\}$ が収束するとは、ある極限 α が存在して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ が成り立つことである。この等式の正確な定義は次のようになる。

- 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある自然数 n_0 が存在して、 $n > n_0$ ならば常に $|a_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ。

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、発散するという。特に正の無限大に発散することは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と表されるが、この等式の正確な定義は次のようになる。

- 任意の $M > 0$ に対し、ある自然数 n_0 が存在して、 $n > n_0$ ならば常に $a_n > M$ が成り立つ。

例題 1

(1) $a_n = \frac{1}{2^n}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を証明せよ。

(2) $a_n = 2^n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ を証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x \rightarrow a$ で α に収束することは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と表される。この等式の正確な定義は次のようになる。

- 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$ ならば常に $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ。

この定義には $|x - a| = 0$ の場合が含まれないことに注意されたい。すなわち、 $x = a$ での関数 f の値 $f(a)$ とは関係なく、極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は定義される。もしそれらが一致するならば、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つならば、 f は点 a で連続という。

例題 2

次の関数 f の原点での連続性を調べよ。

$$(1) f(x) = 2|x| \quad (2) f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

例題 2 (2) の関数はヘヴィサイド関数と呼ばれ、原点では不連続である。しかし、 $x > 0$ のもとで $x \rightarrow 0$ としたとき、極限は $f(0)$ と一致する。このとき f は原点で右側連続といい、このような極限を右側極限という。

一般に、点 a での f の右側極限は $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と表される。同様の考え方で、左側極限も定義でき、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ と表される。このとき、

- $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ は a で右側連続。
- $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ は a で左側連続。

ある区間 I のすべての点で f が連続であるとき、 f は区間 I 上連続という。ただし I が端点を含む場合、端点での連続は右側あるいは左側連続を意味する。連続性についての基本的な定理として、次が知られている。

定理 1 (最大値・最小値) f が $[a, b]$ 上連続ならば、 f は $[a, b]$ で最大値および最小値を取る。

定理 2 (中間値の定理) f が $[a, b]$ 上連続かつ $f(a) < f(b)$ ならば、任意の $c \in (f(a), f(b))$ に対して、 $f(\xi) = c$ を満たすある $\xi \in (a, b)$ が存在する。

演習問題 1

次の関数 f は原点で連続、右側連続、左側連続、不連続のいずれであるか答えよ。

$$(1) f(x) = -x \ (x \geq 0), \ x^2 - 1 \ (x < 0). \\ (2) f(x) = e^{-1/x} \ (x > 0), \ 0 \ (x \leq 0).$$

※解答は本日中に BEEF から提出して下さい。

第1回「微分積分1」演習問題の解答 2022年4月12日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題1

次の関数 f は原点で連続，右側連続，左側連続，不連続のいずれであるか答えよ．

(1) $f(x) = -x \ (x \geq 0), \ x^2 - 1 \ (x < 0)$.

(2) $f(x) = e^{-1/x} \ (x > 0), \ 0 \ (x \leq 0)$.

解答 (1) 右側連続 (2) 連続

解説 (1) $f(0) = 0$. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1 \neq f(0)$$

より，原点で右側連続だが左側連続ではない．

(2) $f(0) = 0$. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = f(0)$$

より，原点で連続．

第2回「微分積分1」 2022年4月19日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

逆三角関数

f がある区間上連続な単調関数ならば、逆関数 f^{-1} も連続で単調となる。三角関数の逆関数を逆三角関数という。

$f(x) = \sin x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上連続かつ単調増加である。よって逆関数 f^{-1} が存在するが、これを $f^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin} x$ (アークサイン) と表す。 $\operatorname{Arcsin} x$ の定義域は $[-1, 1]$ で、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(-1) &= -\frac{\pi}{2}, & \operatorname{Arcsin} 1 &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Arcsin} 0 &= 0, & \operatorname{Arcsin}(-x) &= -\operatorname{Arcsin} x.\end{aligned}$$

$f(x) = \cos x$ は区間 $[0, \pi]$ 上連続かつ単調減少である。よって逆関数 f^{-1} が存在するが、これを $f^{-1}(x) = \operatorname{Arccos} x$ (アークコサイン) と表す。 $\operatorname{Arccos} x$ の定義域は $[-1, 1]$ で、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}(-1) &= \pi, & \operatorname{Arccos} 1 &= 0, \\ \operatorname{Arccos} 0 &= \frac{\pi}{2}, & \operatorname{Arccos}(-x) &= \pi - \operatorname{Arccos} x.\end{aligned}$$

$f(x) = \tan x$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上連続かつ単調増加である。よって逆関数 f^{-1} が存在するが、これを $f^{-1}(x) = \operatorname{Arctan} x$ (アークタンジェント) と表す。 $\operatorname{Arctan} x$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ で、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan} x &= -\frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} x &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Arctan} 0 &= 0, & \operatorname{Arctan}(-x) &= -\operatorname{Arctan} x.\end{aligned}$$

例題 1

次の値を求めよ。

- (1) $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{4}{3}\pi\right)$
- (2) $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}$

1 変数関数の微分

極限

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき、 f は点 a で微分可能という。 A を点 a での f の微分係数といい、 $f'(a)$ と表す。一方、右側あるいは左側極限

$$A^+ = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad A^- = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき、 f は点 a でそれぞれ右側微分可能および左側微分可能という。 $A^+ = A^-$ ならば、 f は点 a で微分可能である。また、

$$f \text{ が点 } a \text{ で微分可能} \Rightarrow f \text{ が点 } a \text{ で連続}$$

が成り立つが、この逆は必ずしも成り立たない。

例題 2

次の関数の原点での微分可能性を調べよ。

$$(1) |x| \quad (2) \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

f が区間 I 上微分可能とは、 f が区間 I の任意の点で微分可能であることをいう。ただし I が端点を含むとき、端点での微分可能は右側あるいは左側微分可能を意味する。 f が区間 I 上微分可能であるとき、 $x \in I$ に対して x での微分係数を対応させる関数 $f'(x)$ を導関数という。

f が区間 I 上微分可能かつ単調で、 $f'(x) \neq 0$ ならば、逆関数 f^{-1} の導関数は $1/f'$ となる。逆三角関数の導関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}(\operatorname{Arcsin} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\operatorname{Arccos} x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\operatorname{Arctan} x)' &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

演習問題 2

次の値を求めよ。

$$\cos\left(2\operatorname{Arctan} \frac{1}{2}\right) - \sin\left(2\operatorname{Arctan} \frac{1}{3}\right)$$

第2回「微分積分1」演習問題の解答 2022年4月19日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題2

次の値を求めよ.

$$\cos\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\right) - \sin\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right)$$

解答 0

解説 $\theta_1 = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$ および $\theta_2 = \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$ と

する. 2倍角の公式より, 与式は

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta_2 \\ &= 2\cos^2\theta_1 - 1 - 2\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ &= 2\frac{1}{1+\tan^2\theta_1} - 1 - 2\tan\theta_2\cos^2\theta_2 \\ &= 2\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} - 1 - 2\frac{1}{3}\frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2} \\ &= \frac{8}{5} - 1 - \frac{3}{5} = 0 \end{aligned}$$

と計算できる.

第3回「微分積分1」 2022年4月26日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

双曲線関数

指数関数を用いて次のように定義される関数のことを双曲線関数という.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{ハイパボリックコサイン})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{ハイパボリックサイン})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{ハイパボリックタンジェント})$$

双曲線関数は以下の等式を満たす.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x.$$

$x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ ($a, b \neq 0$) とするとき, 等式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

が成り立つ. これは双曲線の方程式である.

虚数単位 i ($i^2 = -1$) を用いると,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix),$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \sinh(ix)$$

という関係式が成り立つ. すなわち, 変数に複素数を含めると, 三角関数と双曲線関数は同じ関数の族に属すると言える. 次の公式はオイラーの公式と呼ばれる.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

特に $x = \pi$ のとき,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

が導かれるが, これをオイラーの等式という.

平均値定理

点 $a \in \mathbb{R}$ の ϵ -近傍 $U_\epsilon(a)$ は

$$U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\}$$

である. f がある开区間 I の点 a で極大とは, ある (十分小さい) $\epsilon > 0$ が存在して

$$x \in U_\epsilon(a), x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

が成り立つときをいう. 右の式の不等号を逆にすれば極小が定義できる. f が点 a で極値をとり, $f'(a)$ が存在するならば, $f'(a) = 0$ である. しかし, $f'(a) = 0$ であっても $f(a)$ が極値であるとは限らない.

次の定理は **Rolle** の定理と呼ばれる.

定理 1 (Rolle の定理) f は区間 $[a, b]$ 上微分可能で, $f(a) = f(b)$ ならば, $f'(c) = 0$ を満たすある $c \in (a, b)$ が存在する.

Rolle の定理より次の平均値定理が得られる.

定理 2 (平均値定理) f が区間 $[a, b]$ 上微分可能ならば,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすある $c \in (a, b)$ が存在する.

例題 1

$f(x) = x^2$ とし, $a < b$ とするとき, 平均値定理の等式

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a, b)$ を求めよ.

演習問題 3

$0 < a < b$ とするとき, 平均値定理を利用して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$be^b - ae^a > (b - a)(1 + a)e^a$$

第3回「微分積分1」演習問題の解答 2022年4月26日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題3

$0 < a < b$ とするとき、平均値定理を利用して、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$be^b - ae^a > (b-a)(1+a)e^a$$

解答例 $f(x) = xe^x$ とすると、 $f(x)$ は $[a, b]$ 上
微分可能であり、

$$f'(x) = (1+x)e^x$$

なので、平均値定理より

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = (1+c)e^c$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。右辺は $c > 0$
について単調増加なので

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > (1+a)e^a$$

となる。整理すると

$$be^b - ae^a > (b-a)(1+a)e^a$$

となり、問題の不等式が成立することが分かる。

第4回「微分積分1」 2022年5月10日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

Newton 法

数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは、ある定数 M が存在して、任意の自然数 n に対して $a_n \leq M$ が成り立つことをいう。不等号の向きを逆にすると下に有界が定義できる。単調増加で上に有界（あるいは、単調減少で下に有界）な実数列 $\{a_n\}$ は収束する（実数の連続性）。

$f(x) = 0$ の解 $x = c$ を数値計算で求める方法を考える。ただし $f(x)$ は $[a, b]$ 上 2 回微分可能で、 $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ であり、 $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすとする。中間値の定理より、 $f(c) = 0$ を満たすある $c \in (a, b)$ が存在する。特に f は単調増加なので、そのような c は唯一つである。 c を求めるための以下の方法を **Newton 法** という。

- 1) $x_1 = b$ とする。
- 2) x_1 における f の接線と x 軸との交点の x 座標を x_2 とする。このとき

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

より

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

を得る。

- 3) 以後、同様に

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

によって数列 $\{x_n\}$ を計算する。

- 4) $\{x_n\}$ は単調減少で下に有界なので、収束する。その極限が求める c である。

例えば、 $f(x) = x^2 - 2$ とし、 $x_1 = 2$ として Newton 法の数列を計算すると

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= 1.5, \\ x_3 &\approx 1.4167, \\ x_4 &\approx 1.4142, \dots \end{aligned}$$

となり、数列が $\sqrt{2} \approx 1.4142$ に収束する様子が確認できる。

Taylor の定理

f が n 回微分可能で、 n 階導関数 $f^{(n)}$ が連続であるとき、 f は C^n 級という。単に連続であるときは C^0 級であり、無限回微分可能であるときは C^∞ 級である。 C^{n+1} 級ならば C^n 級である。次の定理は **Taylor の定理** と呼ばれる。

定理 1 (Taylor の定理) f が区間 I 上 C^n 級ならば、任意の $x, a \in I$ に対し、

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \xi \text{ は } x \text{ と } a \text{ の間の数}$$

は剰余項と呼ばれる。

例えば、 $f(x) = e^x$ は C^∞ 級なので、任意の n に対して Taylor の定理の等式が成り立つ。 $a = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + R_2 \quad (n=2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3 \quad (n=3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_4 \quad (n=4) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、任意の x に対して

$$R_n = \frac{e^\xi}{n!}x^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることから、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つが、これを（0 を中心とする） e^x の **Taylor 展開** という（Maclaurin 展開ともいう）。

演習問題 4

$f(x) = 1 + x^2 + x^3$ とする。 $x = 1$ を中心とする f の Taylor 展開を求めよ。ヒント：求める Taylor 展開は $x - 1$ の多項式

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots$$

の形で表される。

第4回「微分積分1」演習問題の解答 2022年5月10日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題4

$f(x) = 1 + x^2 + x^3$ とする. $x = 1$ を中心とする f の Taylor 展開を求めよ. ヒント：求める Taylor 展開は $x - 1$ の多項式の形で表される.

解答 $3 + 5(x - 1) + 4(x - 1)^2 + (x - 1)^3$

解説

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 3x^2, \quad f''(x) = 2 + 6x, \\ f^{(3)}(x) &= 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 4) \end{aligned}$$

なので, f は C^∞ 級. $x = 1$ を中心とする Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 3 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

となる.

第5回「微分積分1」 2022年5月17日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

Taylor 定理の応用

定理 1 (Taylor の定理) f が区間 I 上 C^n 級ならば、任意の $x, a \in I$ に対し、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

が成り立つ。ただし

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \xi \text{ は } x \text{ と } a \text{ の間の数}$$

は剰余項と呼ばれる。

Taylor の定理は極限計算に応用できる。

例題 1

Taylor の定理を利用して、次の極限値を求めよ。

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

例題 2

任意の実数 $\alpha > 0$ に対し、 e^x は x^α より早く無限大に発散すること、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$$

が成り立つことを示せ。

Taylor の定理は、次の **Cauchy** の平均値定理を利用することで証明できる。

定理 2 (Cauchy の平均値定理) F と G は区間 $[a, b]$ 上微分可能かつ $G(a) \neq G(b)$ であり、 F' と G' は同じ点で 0 にはならないとする。このとき、

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

を満たす $\xi \in (a, b)$ が存在する。

Taylor 展開

Taylor の定理において、 f が C^∞ 級であり、 $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つなら、 f は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

のように表すことができる。これを、点 a を中心とする f の **Taylor 展開** という。特に、原点を中心とする Taylor 展開のことを **Maclaurin 展開** という。主な初等関数の Maclaurin 展開を以下に挙げる。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha - (n-1)]}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

Maclaurin 展開を利用すると、オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つことを示すことができる。

演習問題 5

1) Taylor の定理を利用して、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$$

2) $\cosh x$ と $\sinh x$ の Maclaurin 展開を求めよ。

第5回「微分積分1」演習問題の解答 2022年5月17日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題5

- 1) Taylor の定理を利用して、次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$$

- 2) $\cosh x$ と $\sinh x$ の Maclaurin 展開を求めよ.

解答 1) $\frac{1}{12}$

$$2) \cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$3) \sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

解説 1) Taylor の定理より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{\sin \xi}{5!}x^5$$

ただし ξ は 0 と x の間の数. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{4!} - \frac{2 \sin \xi}{5!}x \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2), 3) 省略

第6回「微分積分1」 2022年5月24日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

Taylor の定理の応用

f は2回微分可能で、 $f'' > 0$ を満たすとする。このとき、Taylor の定理を利用すると、次の不等式を示すことができる。

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときのみ成り立つ。特に $f(x) = -\log x$ とすることで、正の $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

が成り立つことがわかる。これは相加相乗平均の一般化である。

近似値の計算にも Taylor の定理を応用できる。 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対し、 $x=0$ を中心として Taylor の定理を用いると

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_3$$

を得る。 $\sqrt{9.08} = 3\sqrt{1+8/900}$ に注意すると

$$\sqrt{9.08} = 3 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{8}{900} - \frac{1}{8} \left(\frac{8}{900} \right)^2 + R_3 \right]$$

となり、これをもとに $\sqrt{9.08} \approx 3.0133037$ を得る。

例題 1

次の関数の $x=0$ を中心とする Taylor 展開 (Maclaurin 展開) を示せ。ただし x について5次以上の項を R_5 と書いてよい。

- 1) $x \sin x$
- 2) $e^{1-\cos x}$

例題 2

$\text{Arctan } x$ の $x=0$ を中心とする Taylor 展開 (Maclaurin 展開) を求めよ。ただし $|x| < 1$ とする。

不定形の極限

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

のような極限のことを、不定形の極限という。次の定理は不定形の極限の計算に利用できる。

定理 1 (ロピタルの定理) f, g は $[a, b]$ 上微分可能であり、 $f(a) = g(a) = 0$ とする。もし

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

が存在するなら、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

が成り立つ。

ロピタルの定理は、 $x \rightarrow b-0$ や $x \rightarrow \pm\infty$, ∞/∞ などの場合も同様に成り立つ。

例題 3

ロピタルの定理を利用して、次の極限値を求めよ。

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin } x}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

演習問題 6

Taylor の定理を利用して、 $\sqrt[3]{1.05}$ の近似値を小数点以下3桁目まで求めよ。

第6回「微分積分1」演習問題の解答 2022年5月24日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題 6

Taylor の定理を利用して、 $\sqrt[3]{1.05}$ の近似値を小数点以下 3 桁目まで求めよ。

解答 1.016

解説 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に Taylor の定理 ($n = 3$, $a = 0$) を適用すると

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_3$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} &= \sqrt[3]{1 + \frac{1}{20}} \\ &\approx 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{20} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{20} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{59}{3600} \approx 1.016\end{aligned}$$

を得る。

第7回「微分積分1」 2022年5月31日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

不定形の極限

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

のような極限のことを，不定形の極限という．次の定理は不定形の極限の計算に利用できる．

定理 1 (ロピタルの定理) f, g は $[a, b]$ 上微分可能であり， $f(a) = g(a) = 0$ とする．もし

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

が存在するなら，

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

が成り立つ．

ロピタルの定理は， $x \rightarrow b-0$ や $x \rightarrow \pm\infty$ ， ∞/∞ などの場合も同様に成り立つ．

例題 1

ロピタルの定理を利用して，次の極限値を求めよ．

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

Landau の記号

$f(x)/g(x)$ が $x \rightarrow a$ の極限で有界であるとき，

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

と書く．例えば，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 + x^5 &= O(x) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= O(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= x^2 + O(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= x^2 + x^4 + O(x^5) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

一方， $f(x)/g(x)$ が $x \rightarrow a$ の極限で 0 に収束するとき，

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

と書く．例えば，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 + x^5 &= o(x) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= x^2 + x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

このような O と o をランダウの記号という．明らかに， $f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$ ならば， $f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$ である．Taylor の定理より

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + O(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つ． f がある開区間の点 a において微分可能であり，その微分係数が A であることは

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \quad (x \rightarrow a)$$

と同値である．

例題 2

等式

$$\frac{e^x - 1}{x} = a \sin x + b \cos x + O(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

がみたされるように定数 a と b を決めよ．

演習問題 7

次の等式をみたす最大の整数 m を求めよ．

1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$

2) $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\sin x}{2} + o(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$

第7回「微分積分1」演習問題の解答 2022年5月31日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題7

次の等式をみたす最大の整数 m を求めよ.

1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^m) \ (x \rightarrow 0)$

2) $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\sin x}{2} + o(x^m) \ (x \rightarrow 0)$

解答 1) 4 2) 2

解説 1) Taylor 展開より

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \ (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

である. よって $m = 4$.

2) Taylor 展開より

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 - \cdots\end{aligned}$$

である. 一方, Taylor 展開より

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{2} &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{240}x^5 - \cdots\end{aligned}$$

である. したがって

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{24}x^3 - \cdots \\ &= \frac{\sin x}{2} + o(x^2) \ (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

である. よって $m = 2$.

第1回「微分積分2」 2022年6月14日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

近傍・領域

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の2点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間の距離は

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で定義できる．点 (x_0, y_0) の ε -近傍とは，点 (x_0, y_0) からの距離が ε より小さい点の集合であり，

$$U_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}$$

のように表される．

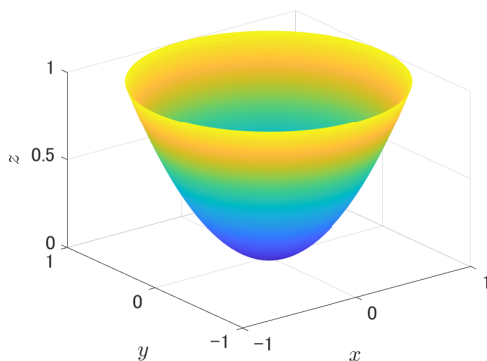
$S \subseteq \mathbb{R}^2$ とする． S が開集合であるとは， S の任意の点に対してある $\varepsilon > 0$ が存在し，その点の ε -近傍が S の真部分集合であるときをいう． S が閉集合であるとは，補集合 S^c が開集合であるときをいう． S が連結であるとは， S が共通点をもたない二つの空でない開集合に分割できないときをいう．連結な開集合のことを領域という．

多変数関数

2つの実数から1つの実数への対応のことを2変数関数といい， $f(x, y)$ のように表す． D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし， f は D 上で定義されるとき， D を定義域， $f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ を値域という．このとき， f のグラフは

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

であり，(適当な条件のもとで) 3次元空間の曲面として表される．



$f(x, y) = x^2 + y^2$ のグラフ

多変数関数の極限と連続性

平面内の点 (x, y) を点 (a, b) に近づけるととき，近づけ方によらずに $f(x, y)$ が唯一つの極限值 α に近づくととき，

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \alpha$$

と書く．特に，

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つとき， f は点 (a, b) で連続であるという．例えば， $f(x, y) = x^2 + y^2$ は原点 $(0, 0)$ で連続である．実際，

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) = 0 = f(0, 0)$$

が成り立つ．一方，

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

は原点で連続ではない．実際， (x, y) の原点への近づけ方によって $f(x, y)$ が異なる値に近づくため，極限值 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ が存在しない．例えば，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0$$

だが

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1$$

である．

演習問題 1

次の関数 f は原点で連続であるか答えよ．

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ 2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{e^{xy}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

第1回「微分積分2」演習問題の解答 2022年6月14日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題1

次の関数 f は原点で連続であるか答えよ.

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ 2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{e^{xy}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

解答 1) 連続ではない 2) 連続

解説 1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$$

である. しかし $f(0, 0) = 0$ なので, 連続ではない.

2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{e^{r^2 \cos \theta \sin \theta}}$$

だが,

$$0 \leq \frac{r^2}{e^{r^2 \cos \theta \sin \theta}} \leq \frac{r^2}{e^{-r^2}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

なので,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

一方, $f(0, 0) = 0$ なので, 連続.

第2回「微分積分2」 2022年6月21日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

偏微分

多変数関数において、一つの変数以外は定数と見なして、その一つの変数について微分することを偏微分という。2変数関数 $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

であり、 f_x と表すこともある。 y に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

であり、 f_y と表すこともある。 f_x や f_y を関数と見なすときは偏導関数という。

例題 1

次の2変数関数 $f(x, y)$ の偏導関数 f_x, f_y を求めよ。

- 1) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$
- 2) $f(x, y) = x^2 e^{xy}$

x に関する偏微分は、曲面 $z = f(x, y)$ を $y =$ 一定の平面で切ったときの、切り口に現れる1変数関数の微分に他ならない。 y に関する偏微分についても同様である。より一般に、 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 方向の方向微分は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h\cos\theta, y+h\sin\theta) - f(x, y)}{h}$$

で定義される。 f_x と f_y が存在して連続関数であるとき、これは次と一致する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

例題 2

$\tan \theta = y/x$ とするとき、

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

の $(\cos \theta, \sin \theta)$ 方向の方向微分を求めよ。

高階の偏微分

偏導関数をさらに偏微分することで、高階の偏微分（偏導関数）が考えられる。 $f(x, y)$ の2階の偏導関数は、それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{yx}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy}. \end{aligned}$$

ある領域において $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つとき、 f はその領域で偏微分の順序交換が可能という。

例題 3

例題1の各関数は、 $\mathbb{R}^2$ 全体で偏微分の順序交換が可能であることを示せ。

一方、次の関数は原点で偏微分の順序交換ができない。

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

偏微分の順序交換可能性については、次の定理が成り立つ。

定理 1 (Schwartz) 領域 D において f_x, f_y, f_{xy} が存在して f_{xy} が連続ならば、 f_{yx} も存在して $f_{xy} = f_{yx}$ 。

1変数関数の場合、ある点で微分可能であればその点で連続であった。2変数関数の場合、ある点で偏微分可能であってもその点で連続とは限らない。第1回で紹介した「原点で連続ではない関数 f 」は、原点で偏微分可能である。

演習問題 2

次の関数 $f(x, y)$ は原点で偏微分の順序交換が可能であるか答えよ。

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

第2回「微分積分2」演習問題の解答 2022年6月21日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題2

次の関数 $f(x, y)$ は原点で偏微分の順序交換が可能であるか答えよ.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

解答 不可能

解説 今

$$f_x(0, k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = 0,$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$f_y(h, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} = h,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

である. よって

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 0,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 1$$

である. $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ なので, 原点で偏微分の順序交換は不可能である.

第3回「微分積分2」 2022年6月28日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

全微分

1 変数関数の場合、ある点で微分可能であればその点で連続である。2 変数関数の場合、ある点で偏微分可能であってもその点で連続とは限らない。例えば、次の関数は原点で連続ではないが、偏微分可能である。さらに、原点で偏微分の順序交換も可能 ($f_{xy} = f_{yx}$) である。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2 変数関数の場合、ある点で全微分可能であれば、その点で連続である。したがって、全微分は1 変数関数の微分の自然な拡張と言える。ランダウの記号を使うと、1 変数関数 $f(x)$ がある点 a で微分可能であることは、等式

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a) \quad (x \rightarrow a)$$

を満たす定数 A が存在することで定義できる。これを拡張して、2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であることは、等式

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}) \quad (x, y) \rightarrow (a, b)$$

を満たす定数 A, B が存在することで定義する。

1 変数関数 $f(x)$ が点 a で微分可能ならば、定義式の定数は $A = f'(a)$ である。同様に、2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば、定義式の定数は

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

である。また、定義式において $x = a + h \cos \theta$, $y = b + h \sin \theta$ とすれば、 f の $(\cos \theta, \sin \theta)$ 方向の方向微分が

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \sin \theta$$

であることが確かめられる。

例題 1

次の関数は原点で全微分可能か答えよ。

1) $1 + 2x - 3y + x^2 + y^2$

2) $\sqrt{|xy|}$

全微分可能性の判定には、次の定理を利用してもよい。

定理 1 ある領域 D 上で f_x と f_y が存在して連続ならば、 f は D 上で全微分可能である。

1 変数関数 $f(x)$ が点 a で微分可能であるとき、 a における接線の方程式は

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

である。これの自然な拡張として、2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるとき、 (a, b) における接平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

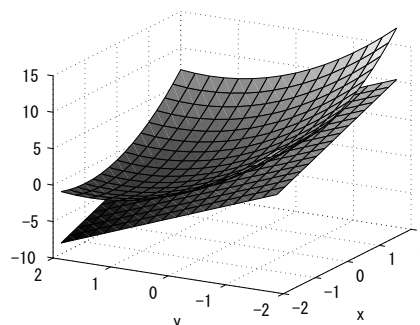
である。

例題 2

次の関数の点 P での接平面の方程式を求めよ。

1) $1 + 2x - 3y + x^2 + y^2$, $P = (0, 0)$

2) $2x + 3y + xy$, $P = (1, 1)$



1) の関数と接平面

演習問題 3

$f(x, y) = \arcsin x + \cosh y + \tanh y$ は原点で全微分可能であることを示し、原点での接平面の方程式を求めよ。

第3回「微分積分2」演習問題の解答 2022年6月28日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題3

$f(x, y) = \operatorname{Arcsin} x + \cosh y + \tanh y$ は原点で全微分可能であることを示し，原点での接平面の方程式を求めよ．

解答 接平面の方程式： $z = 1 + x + y$

解説 偏微分すると

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_y = \sinh y + \frac{1}{\cosh^2 y}$$

である．これらは原点を含む領域（近傍）で連続なので， f は原点で全微分可能である．接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) \\ &= 1 + x + y. \end{aligned}$$

第4回「微分積分2」 2022年7月5日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

連鎖律

$z = f(x, y)$ は全微分可能であり, $x = x(t)$ および $y = y(t)$ は t の関数として微分可能とする. このとき, $z = z(t)$ も t の関数として微分可能であり, 次の等式が成り立つ (連鎖律):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

例題 1

$z = 2xy$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ のとき, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

$z = f(x, y)$ は全微分可能とする. $x = a + t \cos \theta$, $y = b + t \sin \theta$ として, z を t の関数として微分すれば

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

を得る. これは $(\cos \theta, \sin \theta)$ 方向の方向微分である.

$z = f(x, y)$ が全微分可能であり, $x = x(t, s)$ および $y = y(t, s)$ も全微分可能であれば, $z = z(t, s)$ は t, s について偏微分可能であり, 連鎖律の式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}$$

例えば, $z = f(x, y)$ は全微分可能であり, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする. このとき連鎖律より

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

であることから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

を得る (偏微分の極座標変換).

演算子

演算を表す記号を演算子という. 例えば,

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

は微分演算子と呼ばれ,

$$Xf = f_x, \quad Yf = f_y, \quad X^2f = f_{xx}$$

などが成り立つ. 偏微分の順序交換ができない例から明らかのように, 一般に $XY = YX$ が成り立つとは限らない.

例題 2

次の2つの演算子 X, Y に対して, XY と YX を求めよ.

- 1) $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $Y = \sin \theta$
- 2) $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x$

左記の例より, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

と書ける. これを利用して, 物質などの拡散を考慮するときに用いられるラプラス演算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を極座標変換すると,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

が得られる.

演習問題 4

$z = \frac{\text{Arctan } x}{y}$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$ とするとき, $\frac{dz}{dt}$ を t の式で表せ.

第4回「微分積分2」演習問題の解答 2022年7月5日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題4

$z = \frac{\operatorname{Arctan} x}{y}$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$ とするとき,
 $\frac{dz}{dt}$ を t の式で表せ.

解答 $\frac{2t^2}{1+t^4} + \operatorname{Arctan} t^2$

解説 z の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \operatorname{Arctan} x$$

である. よって, 連鎖律より

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{y} \frac{1}{1+x^2} (t^2)' - \frac{1}{y^2} \operatorname{Arctan} x \left(\frac{1}{t} \right)' \\ &= t \frac{1}{1+t^4} 2t - t^2 \operatorname{Arctan} t^2 \left(-\frac{1}{t^2} \right) \\ &= \frac{2t^2}{1+t^4} + \operatorname{Arctan} t^2 \end{aligned}$$

を得る.

第5回「微分積分2」 2022年7月12日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

Taylor 展開

$f(x, y)$ が C^n 級であるとは、 n 階までの偏導関数がすべて存在して連続であることをいう。 $f(x, y)$ が C^n 級であるとき、

$$x = a + ht, \quad y = b + kt$$

として、 $f = f(t)$ に (t の関数として) Taylor の定理を利用すれば、

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{Df(a, b)}{1!} + \frac{D^2f(a, b)}{2!} + \cdots + \frac{D^{n-1}f(a, b)}{(n-1)!} + R_n$$

を得る。ただし R_n は剰余項であり、 D は演算子

$$D = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}$$

である。特に $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) のとき、Taylor 展開の式が得られる。具体的に、原点を中心とする Taylor 展開の式は次のようになる。

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}[xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] + \frac{1}{2!}[x^2f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2f_{yy}(0, 0)] + \cdots$$

例題 1

$f(x, y) = e^x \sin y$ の原点を中心とする Taylor 展開を求めよ。ただし x と y について 3 次以上の項を R_3 と書いてよい。

2 変数関数の Taylor 展開を求める際、1 変数関数の Taylor 展開を利用できることもある。例えば、例題 1 の Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^x \sin y \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= y + xy + R_3 \end{aligned}$$

のように計算できる。

陰関数定理

$y = f(x)$ と表されるとき、 y を x の陽関数という。一方、 $F(x, y) = 0$ によって y を x の関数として定めるとき、 y を x の陰関数という。

例えば、 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とするとき、 $F(x, y) = 0$ によって x の陰関数 y を定めると、 (x, y) は単位円上の点である。 $-1 < x < 1$ ならば $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ である (2 価関数)。

次の定理は、陽関数 $y = \varphi(x)$ の形を直接得ることが難しい場合にも、極値等について調べることができる。

定理 1 (陰関数定理) $F(x, y)$ はある領域 D 上で C^1 級であり、点 $(a, b) \in D$ において

$$F(a, b) = 0, \quad F_y(a, b) \neq 0$$

を満たすとする。このとき、 $x = a$ の近傍で、以下を満たす $y = \varphi(x)$ が唯一つ存在する。

1) $\varphi(a) = b$

2) $F(x, \varphi(x)) = 0$

3) φ は C^1 級であり、 $\varphi' = -\frac{F_x}{F_y}$ 。特に、 $\varphi' =$

0 を満たす点において、 $\varphi'' = -\frac{F_{xx}}{F_y}$ が成り立つ。

例題 2

$F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1$ として、 $F(x, y) = 0$ で定められる x の陰関数 y を考える。極値を取る点をすべて求め、それが極大か極小かを判定せよ。

演習問題 5

$F(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ として、 $F(x, y) = 0$ で定められる x の陰関数 y を考える。極値を取る点をすべて求め、それが極大か極小かを判定せよ。

第5回「微分積分2」演習問題の解答 2022年7月12日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題5

$F(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ として、 $F(x, y) = 0$ で定められる x の陰関数 y を考える。極値を取る点をすべて求め、それが極大か極小かを判定せよ。

解答 $x = 0$ のとき、極大値 0、極小値 2。

解説 F の偏導関数は

$$F_x = 2x, \quad F_y = -2y + 2$$

である。 $y = 1$ のときに限り $F_y = 0$ だが、 $F(x, 1) = x^2 + 1 > 0$ なので、 $F(x, y) = 0$ を満たす y は 1 ではない。よって $F_y \neq 0$ であり、陰関数定理により

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y-1}$$

を得る。よって $x = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = 0$ である。

$F(0, y) = -y^2 + 2y = 0$ を解くと、 $y = 0, 2$ なので、極値をとる点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, 2)$$

である。 $F_{xx} = 2$ であり、極値をとる点で

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} = \frac{1}{y-1}$$

である。 $(x, y) = (0, 0)$ では

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0, 0) = -1 < 0$$

なので、 $y = 0$ は極大値。 $(x, y) = (0, 2)$ では

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0, 2) = 1 > 0$$

なので、 $y = 2$ は極小値。

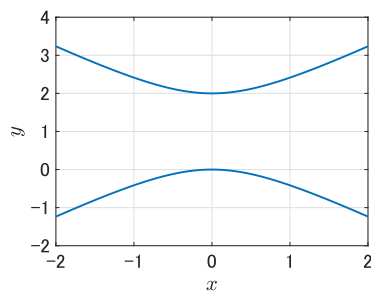


図 1. $x^2 - y^2 + 2y = 0$

第6回「微分積分2」 2022年7月19日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

極値問題

2変数関数 $f(x, y)$ を考える．点 (a, b) の近傍のすべての点 $(x, y) \neq (a, b)$ に対し，

$$f(x, y) < f(a, b)$$

が成り立つとき， f は (a, b) で極大という．一方，点 (a, b) の近傍のすべての点 $(x, y) \neq (a, b)$ に対し，

$$f(x, y) > f(a, b)$$

が成り立つとき， f は (a, b) で極小という． f が (a, b) で極大あるいは極小であるとき， f は (a, b) で極値をとるといふ．不等号に等号を含めるとき，広義の極大，広義の極小，広義の極値が定義される．

以後， f は C^2 級とする． f が点 (a, b) で広義の極値をとるならば， $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立つ．しかし，この逆は一般に成り立たない．例えば $f(x, y) = x^2 - y^2$ に対し， $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるが， $f(0, 0)$ は x 軸に沿った方向では極小， y 軸に沿った方向では極大となる．このような場合， $f(0, 0)$ を鞍点という．

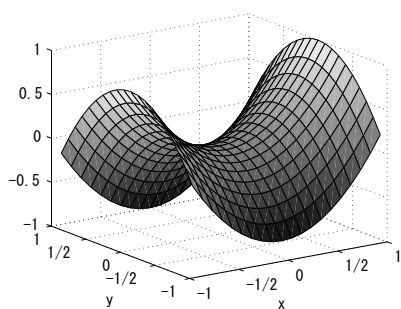


図 1. $f(x, y) = x^2 - y^2$

$f(x, y)$ が C^2 級であるとき，次の行列を，点 (a, b) における f の Hesse 行列という．

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ のとき，次が成り立つ．

$$\det H(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b) \text{ は極値}$$

さらに $f_{xx}(a, b) > 0$ (< 0) ならば， $f(a, b)$ は極小値（極大値）となる．

例題 1

$f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値をすべて求め，極大か極小かを判定せよ．

実際，絶対値が十分小さい任意の h, k に対し

$$f(a + h, b + k) < f(a, b)$$

が成り立つならば f は (a, b) で極大であり，逆向きの不等式が成り立つならば極小である．Taylor の定理より

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{1!} (hf_x(a, b) + kf_y(a, b)) + R_2$$

が成り立つが， $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ならば

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + R_2$$

が成り立つ． R_2 の符号が常に負ならば f は (a, b) で極大であり，常に正ならば極小である． R_2 は

$$R_2 = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$$

と書ける．ただし各偏微分は $(x, y) = (a + \theta h, b + \theta k)$ ($0 < \theta < 1$) での値である．このような R_2 の符号と $\det H(a, b)$, $f_{xx}(a, b)$ との関係を調べれば，前述の極値の判定法が得られる．

例題 2

$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - \frac{1}{3}y^3$ の極値をすべて求め，極大か極小かを判定せよ．

例題 3

$f(x, y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ ($a > 0$) の極値をすべて求め，極大か極小かを判定せよ．

演習問題 6

$f(x, y) = x^2y + x^2 + 2y^2$ の極値をすべて求め，極大か極小かを判定せよ．

第6回「微分積分2」演習問題の解答 2022年7月19日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題 6

$f(x, y) = x^2y + x^2 + 2y^2$ の極値をすべて求め、極大か極小かを判定せよ。

解答 $(x, y) = (0, 0)$ のとき、極小値 $f(0, 0) = 0$.

解説 偏導関数は

$$f_x = 2xy + 2x, \quad f_y = x^2 + 4y$$

である。よって、極値の候補となる点 ($f_x = f_y = 0$ となる点) は

$$(x, y) = (0, 0), (2, -1), (-2, -1)$$

である。Hesse 行列は

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + 2 & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$\det H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

であり、 $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ より、 $f(0, 0) = 0$ は極小値。また

$$\det H(\pm 2, -1) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

より、 $f(\pm 2, -1)$ は極値ではない。

第7回「微分積分2」 2022年7月26日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

条件付き極値問題

ある条件のもとで、ある関数の極値について考える問題のことを条件付き極値問題という。例えば、条件 $\varphi(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ の極値を求める問題が考えられる。

例題 1

条件 $x + y - 1 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

条件付き極値問題において、極値を与える点の候補を見つける際に、次の **Lagrange** の未定乗数法を利用できる。

定理 1 (Lagrange の未定乗数法) 関数 $f(x, y)$ と $\varphi(x, y)$ はある領域上で C^1 級であり、 $\varphi(x, y) = 0$ である点では $(\varphi_x, \varphi_y) \neq (0, 0)$ とする。このとき、条件 $\varphi(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ が極値をとる点では、次の等式が成り立つ。

$$L_x = L_y = L_\lambda = 0.$$

ここで、関数 L は

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y)$$

で定義され、Lagrange 関数と呼ばれる。

例題 2

Lagrange の未定乗数法を用いて、例題 1 の条件付き極値問題を解け。

証明の概要 極値を与える点では、条件 $\varphi(x, y) = 0$ が表す曲線と、 $f(x, y) = \text{定数}$ が表す等高線が接する。そのような点では (φ_x, φ_y) と (f_x, f_y) が平行であることから、ある定数 λ が存在して

$$f_x = \lambda \varphi_x, \quad f_y = \lambda \varphi_y$$

が成り立つ。これは $L_x = L_y = 0$ を意味する。また、条件 $\varphi = 0$ より $L_\lambda = 0$ が得られる。

変数や条件が増えた場合でも、Lagrange の未定乗数法は同様に有効である。変数が n 個 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で条件が m 個 $(\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = 0)$ のときの Lagrange 関数は

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

であり、極値をとる点では次の等式が成り立つ。

$$L_{x_1} = \dots = L_{x_n} = L_{\lambda_1} = \dots = L_{\lambda_m} = 0$$

Lagrange の未定乗数法の等式は、必要条件であるが十分条件ではない。すなわち、 f が極値をとる点では等式が満たされるが、等式が満たされる点で f が極値をとるかどうかは分からない。その点の周辺での f の振る舞いを調べる必要がある。

例題 3

条件 $x^2 + 2y^2 = 1$ のもとで、 $x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

例題 4

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点における $f(x, y, z) = yz + zx + xy$ の最大値と最小値を求めよ。

演習問題 7

条件 $x^2 + y^2 = 2$ のもとで、 $2(x + y)$ の極値を求めよ。

第7回「微分積分2」演習問題の解答 2022年7月26日

教科書：南和彦著「微分積分講義」裳華房 担当：國谷

演習問題7

条件 $x^2 + y^2 = 2$ のもとで、 $2(x+y)$ の極値を求めよ。

解答 $(x, y) = (1, 1)$ のとき、極大値4. $(x, y) = (-1, -1)$ のとき、極小値-4.

解説 $f(x, y) = 2(x+y)$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ とし、

$$L = f - \lambda\varphi = 2x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

とする。このとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 2 - 2\lambda x, & \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 - 2\lambda y, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2 - x^2 - y^2\end{aligned}$$

となる。極値をとる候補となる点は、 $L_x = L_y = L_\lambda = 0$ を満たすので、

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$$

である。

$\varphi = 0$ より、

$$y = \pm\sqrt{2-x^2}$$

である。 $(x, y) = (1, 1)$ の近傍では、 $y = \sqrt{2-x^2}$ であり、

$$f = 2\left(\sqrt{2-x^2} + x\right)$$

である。これを x の関数として微分すれば

$$\begin{aligned}f' &= 2\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} + 1\right), \\ f'' &= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{x^2}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

であり、 $x = 1$ では $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2 < 0$ なので、 f は極大値をとる。

$(x, y) = (-1, -1)$ の近傍では、 $y = -\sqrt{2-x^2}$ であり、

$$f = 2\left(-\sqrt{2-x^2} + x\right)$$

である。これを x の関数として微分すれば

$$\begin{aligned}f' &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} + 1\right), \\ f'' &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

であり、 $x = -1$ では $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 2 > 0$ なので、 f は極小値をとる。