

不完全性定理と反映原理 2. 不完全性定理（算術 3）

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2024 年 9 月 18 日 13:10–14:40

数学基礎論サマースクール 2024

テーマ：算術の証明論と構成的数学

東北大学情報科学研究科（青葉山キャンパス）

今回のテーマ

次の定理の証明の全体像を掴むことが目標.

不完全性定理 (Gödel, 1931)

- 第 1 不完全性定理
理論 T が IS_1 を含み, 原始再帰的, Σ_1 -健全の 3 条件を満たせば, T は不完全.
- 第 2 不完全性定理
理論 T が IS_1 を含み, 原始再帰的, 無矛盾の 3 条件を満たせば, T は T の無矛盾性を証明できない.



今回のアウトライン

- ① 原始再帰的関数
- ② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現
- ③ 算術化と証明可能性述語
- ④ 第 1 不完全性定理
- ⑤ 第 2 不完全性定理

今回は論理式や項といえば $\mathcal{L}_A$ -論理式や $\mathcal{L}_A$ -項を指すこととする
($\mathcal{L}_A = \{0, 1, +, \times, <\}$) .

① 原始再帰的関数

② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現

③ 算術化と証明可能性述語

④ 第 1 不完全性定理

⑤ 第 2 不完全性定理

原始再帰的関数

$n > 0$ として

- $s(x) = x + 1$ を後者関数という.
- $z_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ を (n 変数) ゼロ関数という.
- 各 i ($1 \leq i \leq n$) に対する $p_{n,i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$ を射影関数という.

定義 (原始再帰的関数)

自然数上の関数である**原始再帰的関数**を以下で定める.

- 後者関数, ゼロ関数, 射影関数はすべて原始再帰的関数.
- (合成) m 変数原始再帰的関数 g と, n 変数原始再帰的関数 $h_1, \dots, h_m$ について,

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x}))$$

で定義される n 変数関数 f も原始再帰的関数.

- (原始再帰) n 変数原始再帰的関数 g と $n + 2$ 変数原始再帰的関数 h について,

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y + 1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

で定義される $n + 1$ 変数関数 f も原始再帰的関数.

基本的ないくつかの関数が原始再帰的関数であることが容易に確認できる。

原始再帰的関数の例

- ① $s(z_n(\vec{x})) = 1$ であり, $s(s(z_n(\vec{x}))) = 2$ なので, (n 変数) 定数関数はすべて原始再帰的関数。

- ② 加法 $x + y$ は原始再帰的関数。

実際, 次の原始再帰で定められる 2 変数関数 f は加法と一致する:

$$\begin{cases} f(x, 0) = p_{1,1}(x) \\ f(x, y + 1) = s(p_{3,3}(x, y, f(x, y))) \end{cases}$$

次のように射影関数を省略した方が分かりやすい。

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + (y + 1) = s(x + y) \end{cases}$$

- ③ 同様にして乗法 $x \times y$, 前者関数 $\text{pred}(x) = x - 1$ (ただし $\text{pred}(0) = 0$), 指数関数 x^y , 階乗関数 $x!$ などは原始再帰的関数。

原始再帰的關係

定義 (特徴関数)

自然数上の n 項関係 R に対して、次を満たす n 変数関数 χ_R を、 R の**特徴関数**という：

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in R \text{ のとき} \\ 0 & \vec{x} \notin R \text{ のとき} \end{cases}$$

定義 (原始再帰的關係)

自然数上の n 項関係 R が**原始再帰的**： $\iff R$ の特徴関数 χ_R が原始再帰的。

① 原始再帰的関数

② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現

③ 算術化と証明可能性述語

④ 第 1 不完全性定理

⑤ 第 2 不完全性定理

準備

少しだけ用語の準備をしておく。

定義 ($\Delta_1(T)$ 論理式)

論理式 $\varphi(\vec{x})$ が $\Delta_1(T)$

: $\iff \Sigma_1$ 論理式 $\sigma(\vec{x})$ と Π_1 論理式 $\pi(\vec{x})$ が存在して, $T \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \sigma(\vec{x})$ かつ $T \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \pi(\vec{x})$ となる。

各自然数 n を値に持つ項のうち、標準的な項である数項を定める。

定義 (数項)

数項 $\bar{n}$ を以下で再帰的に定める：

- $\bar{0}$ は 0 のこととする。
- $\overline{n+1}$ は $\bar{n} + 1$ のこととする。

表現可能性

原始再帰関数や原始再帰的關係は算術の理論において論理式を用いて取り扱うことができる。

定義 (表現可能性)

- 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ が T 上で自然数上の k 変数関数 f を表現する
: $\iff$ 任意の $n_1, \dots, n_k, m \in \omega$ について

$$f(n_1, \dots, n_k) = m \iff T \vdash \forall y (\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m})$$

- 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ が T 上で自然数上の k 項関係 R を表現する
: $\iff$ 任意の $n_1, \dots, n_k \in \omega$ について

$$(n_1, \dots, n_k) \in R \Rightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$$

$$(n_1, \dots, n_k) \notin R \Rightarrow T \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$$

数の有限列のコード化

$I\Sigma_1$ における表現可能性を証明するには、 $I\Sigma_1$ における数の有限列のコード化が有用。

素因数分解に基づくコード化の例

$k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ を自然数の有限列とすると、

$$\langle k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \rangle := 2^{k_0+1} \times 3^{k_1+1} \times \dots \times pr(n-1)^{k_{n-1}+1}$$

をそのコードという ($pr(x)$ は x 番目の素数)。

n をこの有限列の長さという。

べきが k_i ではなく $k_i + 1$ となっているのは、要素に 0 を含む有限列を処理するため。

- $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = \langle 2, 1, 0, 1 \rangle$ (素因数分解の一意性に注意)。
- $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^2$ はどの有限列のコードでもない。

- $I\Sigma_1$ においてこうした有限列のコード化をうまく定式化し、実行できる。
- 例えば上述のコード化を $I\Sigma_1$ において実行するには、あらかじめ $I\Sigma_1$ において指数関数がうまく扱えることを示しておく必要がある。
- 他にも中国剰余定理に基づく β 関数を用いる Gödel による方法もある。

$\mathbf{IS}_1$ における有限列のコード化

いずれにせよ、うまくやることで次の有限列のコード化定理が得られる。

定理 ($\mathbf{IS}_1$ における有限列のコード化)

それぞれ「 x は有限列のコード」「 y は有限列 x の長さ」「 z は有限列 x の y 番目の要素」「 z は有限列 x の後に有限列 y をつなげて得られる有限列」を意図する $\Delta_1(\mathbf{IS}_1)$ 論理式 $\text{Seq}(x)$, $\text{Length}(x, y)$, $\text{Memb}(x, y, z)$, $\text{Concate}(x, y, z)$ が存在して、次が成立する：

- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \exists! y \text{Length}(x, y)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! z \text{Memb}(x, y, z)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! z \text{Concate}(x, y, z)$.

よって $\mathbf{IS}_1$ においては $\text{Length}(x, y)$, $\text{Memb}(x, y, z)$, $\text{Concate}(x, y, z)$ それぞれによって定義される関数に対応する関数記号 $l(x)$, $(x)_y$, $x \frown y$ を使用でき、更に次が成立：

- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x (\text{Seq}(x) \rightarrow l(x) \leq x)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \forall y (\text{Seq}(x) \wedge y < l(x) \rightarrow (x)_y < x)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \exists x (\text{Seq}(x) \wedge l(x) = 0)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \exists y (\text{Seq}(x) \wedge l(x) = 1 \wedge (x)_0 = y)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \forall y \left(\text{Seq}(x) \wedge \text{Seq}(y) \rightarrow \text{Seq}(x \frown y) \wedge l(x \frown y) = l(x) + l(y) \right.$
 $\left. \wedge \forall z < l(x) ((x \frown y)_z = (x)_z) \wedge \forall w < l(y) ((x \frown y)_{w+l(x)} = (y)_w) \right)$.
- $\mathbf{IS}_1 \vdash \forall x \forall y (\text{Seq}(x) \wedge \text{Seq}(y) \wedge l(x) = l(y) \wedge \forall w < l(x) ((x)_w = (y)_w) \rightarrow x = y)$.

原始再帰的関数の表現

定理 (原始再帰的関数の表現)

任意の k 変数原始再帰的関数 f に対して,

- $\mathbb{N}$ において f を定義し
- $\mathbf{IS}_1$ において f を表現する

Σ_1 論理式 $\sigma_f(x_1, \dots, x_k, y)$ があって,

$$\mathbf{IS} \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k \exists! y \sigma_f(x_1, \dots, x_k, y)$$

を満たす.

したがって, $\mathbf{IS}_1$ は全ての原始再帰的関数に対応する関数記号を有しているとしてもよい.

原始再帰関数の表現定理の証明

証明

原始再帰関数 f の構成に関する帰納法で証明する。

- f が後者関数 $s(x)$ のとき、論理式 $y = x + 1$ が条件を満たす。
- f がゼロ関数 $z_n(x_1, \dots, x_n)$ のとき、論理式 $y = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^n x_j = x_j$ が条件を満たす。
- f が射影関数 $p_{i,n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ のとき、論理式 $y = x_i \wedge \bigwedge_{j=1}^n x_j = x_j$ が条件を満たす。
- $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x}))$ のとき、帰納法の仮定よりそれぞれの関数に対応する Σ_1 論理式 $\sigma_{h_1}, \dots, \sigma_{h_m}, \sigma_g$ がとれ、 $\sigma_f(\vec{x}, y)$ を

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m (\sigma_{h_1}(\vec{x}, y_1) \wedge \cdots \wedge \sigma_{h_m}(\vec{x}, y_m) \wedge \sigma_g(y_1, \dots, y_m, y))$$

と定めれば条件を満たす。

- $\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$ のとき、帰納法の仮定よりそれぞれの関数に対応する Σ_1 論理式 σ_g と σ_h がとれ、 $\sigma_f(\vec{x}, y, z)$ を

$$\exists w \left(\text{Seq}(w) \wedge l(w) - 1 = y \wedge \sigma_g(\vec{x}, (w)_0) \right.$$

$$\left. \wedge (w)_y = z \wedge \forall u < y \sigma_h(\vec{x}, u, (w)_u, (w)_{u+1}) \right)$$

と同値な Σ_1 論理式とする（ここで $\text{IS}_1 \vdash \text{BS}_1$ を用いる）と、条件を満たす。

原始再帰的関係の表現

定理 (原始再帰的関係の表現)

任意の原始再帰的関係は、 $\mathbb{N}$ において関係を定義する $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式で IS_1 において表現可能。

証明

- R を任意の k 項原始再帰的関係とする。
- その特徴関数 χ_R は原始再帰的関数。
- $\mathbb{N}$ において χ_R を定義し、 IS_1 において χ_R を表現する Σ_1 論理式 $\sigma_\chi(\vec{x}, y)$ で、 $\text{IS}_1 \vdash \forall \vec{x} \exists! y \chi_R(\vec{x}, y)$ となるものがとれる。
- このとき R は Σ_1 論理式 $\sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 1)$ によって $\mathbb{N}$ において定義され、 IS_1 において表現される。
- 更に $\sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 1)$ は Π_1 論理式 $\neg \sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 0)$ と IS_1 上で同値なので、 $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式である。 □

① 原始再帰的関数

② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現

③ 算術化と証明可能性述語

④ 第 1 不完全性定理

⑤ 第 2 不完全性定理

算術化

- 論理式は記号の有限列であり、形式的証明は論理式の有限列.
- 一階述語論理に関する基本的な記号に自然数を割り当てれば、自然数の有限列のコード化を用いて、形式的証明などの概念を自然数でコードできる.
- これらの自然数 (**ゲーデル数**) を介して論理式や証明などの対象を形式的算術において取り扱う手法を**算術化**という.

ペアリング関数 $\langle x, y \rangle = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$ を用意しておく.

記号への自然数の割り当て

まずは次のように各記号 s に自然数 $\ulcorner s \urcorner$ を次の表に従って割り当てる。

0	1	+	×	<	=	¬	∧	∨	→	∃	∀	v_n
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$25 + 2n$

項や論理式に対して、固有の自然数をその再帰的定義に基づいて割り当てていく。

- $\ulcorner t + u \urcorner = 2 \times \langle 5, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle$
- $\ulcorner t \times u \urcorner = 2 \times \langle 7, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle$
- $\ulcorner t < u \urcorner = 2 \times \langle 9, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle$
- $\ulcorner t = u \urcorner = 2 \times \langle 11, \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \neg \varphi \urcorner = 2 \times \langle 13, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = 2 \times \langle 15, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner = 2 \times \langle 17, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner = 2 \times \langle 19, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \exists x \varphi \urcorner = 2 \times \langle 21, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \forall x \varphi \urcorner = 2 \times \langle 23, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$

算術化 1

ゲーデル数を通じて、記号や記号列について自然数論の言葉で言及できる。

$\text{Var}(x)$ を Δ_0 論理式 $\exists y \leq x (x = \overline{25} + \overline{2} \times y)$ とすれば、
関係「 x は変数のゲーデル数」を $\mathbb{N}$ において定義し、 IS_1 において表現する論理式。

数項 $\bar{n}$ は

$$\begin{cases} \bar{0} = 0, \\ \overline{n+1} = \bar{n} + 1 \end{cases}$$

として再帰的に定義されていた。数項のゲーデル数もまた

$$\begin{cases} \ulcorner \bar{0} \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner = 1, \\ \ulcorner \overline{n+1} \urcorner = \ulcorner \bar{n} + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner \bar{n} \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner \rangle \rangle = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner \bar{n} \urcorner, 3 \rangle \rangle \end{cases}$$

と再帰的に計算できる。

実際に n の数項のゲーデル数 $\ulcorner \bar{n} \urcorner$ を計算する原始再帰的関数 $N(x)$ がとれる。

したがって IS_1 は対応する関数記号 $N(x)$ を持っているとしてよい。

更に $\exists x \leq y (N(x) = y)$ は関係「 y は数項のゲーデル数」を $\mathbb{N}$ において定義し、 IS_1 において表現する $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式。

算術化 2

同様に「 x は項のゲーデル数」「 x は論理式のゲーデル数」「 x は文のゲーデル数」「 x は論理公理のゲーデル数」「 x は等号公理のゲーデル数」といった関係を $\mathbb{N}$ において定義し、 IS_1 において表現する $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式を適切に定められる（それぞれ $\text{Term}(x)$, $\text{Fml}(x)$, $\text{Sent}(x)$, $\text{LogAx}(x)$, $\text{EqAx}(x)$ とかく）。

- 「 z は論理式 x と y から MP で導出される」という $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式 $\text{MP}(x, y, z)$ は、 $x = \ulcorner \varphi \urcorner, z = \ulcorner \psi \urcorner$ のときに $y = \ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner$ となることであるから、

$$y = \bar{2} \times \langle \bar{19}, \langle x, z \rangle \rangle$$

と定めればよい。

- 「 y は論理式 x から Gen で導出される」という $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式 $\text{Gen}(x, y)$ も同様に定められる。

証明可能性述語

続いて、理論 T における形式的証明をコード化するが、その際に T とそのゲーデル数全体の集合 $\{\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N} \mid \varphi \in T\}$ を同一視する。

定義 (原始再帰的な理論)

理論 T が原始再帰的 : $\iff$ 上記の集合が原始再帰的。

T が原始再帰的なら、 T を IS_1 において表現する $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式 $\tau(x)$ がとれる。

「 y は論理式 x の T における形式的証明のコード」

という 2 項関係を $\mathbb{N}$ において定義し、 IS_1 において表現する $\Delta_1(\text{IS}_1)$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \text{Seq}(y) \wedge x = (y)_{l(y)-1} \\ \wedge \forall z < l(y) \Big(\text{LogAx}((y)_z) \vee \text{EqAx}((y)_z) \vee \tau((y)_z) \\ \vee (z \neq 0 \wedge \exists w_0, w_1 < z (\text{MP}((y)_{w_0}, (y)_{w_1}, (y)_z) \vee \text{Gen}((y)_{w_0}, (y)_z))) \Big). \end{aligned}$$

定義 (証明可能性述語)

Σ_1 論理式 $\exists y \text{Prf}_T(x, y)$ を $\text{Pr}_T(x)$ とかき、これを T の証明可能性述語という。

証明可能性述語の性質

定理

- ① $\text{Pr}_T(x)$ は $\mathbb{N}$ において T の定理全体の集合を定義する。
- ② 任意の論理式 φ について, $T \vdash \varphi$ ならば $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明

1. $\text{Prf}_T(x, y)$ は関係「 y は論理式 x の T における形式的証明のコード」を $\mathbb{N}$ において定義するので, 任意の論理式 φ について

$$\begin{aligned} T \vdash \varphi &\iff T \text{ における } \varphi \text{ の形式的証明のコード } p \text{ が存在} \\ &\iff \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p) \\ &\iff \mathbb{N} \models \exists y \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \\ &\iff \mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner). \end{aligned}$$

2. $T \vdash \varphi$ とすると, T における φ の形式的証明が存在する. そのコードを p とすれば, $\text{Prf}_T(x, y)$ は関係「 y は論理式 x の T における形式的証明のコード」を IS_1 において表現するので, $\text{IS}_1 \vdash \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$ となる. したがって $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である. $\square$

「 φ 」は自然数で「 $\ulcorner \varphi \urcorner$ 」はその数項であるが, 記述を簡潔にするために以降は「 $\ulcorner \varphi \urcorner$ 」を「 φ 」で表すことにする.

① 原始再帰的関数

② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現

③ 算術化と証明可能性述語

④ 第 1 不完全性定理

⑤ 第 2 不完全性定理

不動点定理

定理 (不動点定理)

$\varphi(v_0)$ を v_0 のみを自由変数にもつ任意の論理式とすると, ある文 ψ が存在して,

$$\text{IS}_1 \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

更に, φ が Σ_{n+1} なら ψ も Σ_{n+1} でとれ, φ が Π_{n+1} なら ψ も Π_{n+1} でとれる.

証明

- 原始再帰的関数 $d(x)$ を, n がある 1 変数 $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\delta(x)$ のゲーデル数のときに $d(n)$ は文 $\delta(\bar{n})$ のゲーデル数となるものとする.
- IS_1 は d を関数記号として持っているとしてよい.
- 1 変数論理式 $\varphi(d(x))$ のゲーデル数を k をすると, $d(k) = \ulcorner \varphi(d(\bar{k})) \urcorner$ となる.
- このとき

$$\text{IS}_1 \vdash \varphi(d(\bar{k})) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \varphi(d(\bar{k})) \urcorner).$$

- $\varphi(d(\bar{k}))$ が求める文.

ψ の適切な複雑さを評価する際には $d(x)$ を IS_1 において表現する Σ_1 論理式を用いてうまく書き換えればよい.

準備

用語を 2 つ用意する.

定義 (理論の完全性, 不完全性)

理論 T が**完全**: $\iff$ 任意の文 φ について, $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg \varphi$.
そうではないとき, T は**不完全**であるという.

定義 (理論の Σ_n -健全性)

理論 T が **Σ_n -健全**: $\iff$ 任意の Σ_n 文 φ について, $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$.

これらは理論の完全性と ($\mathbb{N}$ に対する) 健全性であり, 論理の完全性定理の近辺で導入した論理の完全性や健全性とは異なる概念なので注意が必要.

もし T が Σ_n -健全とすると, Σ_n 文 $0 = 1$ について $\mathbb{N} \not\models 0 = 1$ なので $T \not\vdash 0 = 1$ であり, T は無矛盾となる.
したがって, Σ_n -健全性は無矛盾性より強い条件.

第 1 不完全性定理

定理 (第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931))

理論 T が $\text{IS}_1 \subseteq T$, 原始再帰的, Σ_1 -健全の 3 条件を満たせば, T は不完全.
すなわち $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$ となるような文 φ が存在する.

証明

T は原始再帰的だから, その証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を Σ_1 論理式でとれる.
不動点定理より $\text{IS}_1 \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ となるような Π_1 文 φ が存在する.
このような文 φ を T の**ゲーデル文**という.

$T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$ となることを示そう.

- $T \vdash \varphi$ と仮定すると, $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
 φ の取り方より $\text{IS}_1 \vdash \neg\varphi$.
 $\text{IS}_1 \subseteq T$ なので $T \vdash \neg\varphi$ であり, T の無矛盾性に反する.
したがって $T \not\vdash \varphi$.
- $T \vdash \neg\varphi$ と仮定すると, 不動点の取り方より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
 T は Σ_1 -健全なので $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
このとき $T \vdash \varphi$ であり, T の無矛盾性に反する.
したがって $T \not\vdash \neg\varphi$.



第 1 不完全性定理の洗練化

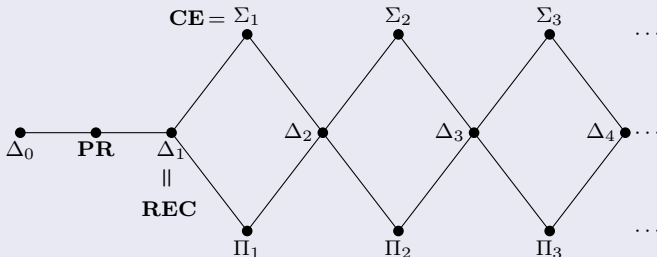
- PA^- の Σ_1 -完全性を上手く用いることで IS_1 は PA^- に弱められる。
- Σ_1 -健全性は Rosser による手法を用いて無矛盾性に弱められる。
- 原始再帰的という条件も Craig の手法を用いて c.e. (Σ_1 -定義可能) に弱められる。

第 1 不完全性定理の洗練化

理論 T が $PA^- \subseteq T$, Σ_1 -定義可能, 無矛盾の 3 条件を満たせば, T は不完全。

定理 (PA^- の Σ_1 -完全性)

φ が Σ_1 文で $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $PA^- \vdash \varphi$ 。



おまけ

一方、 Σ_1 -定義可能という条件は Δ_2 -定義可能に弱めることはできない。

事実

$\text{PA}^- \subseteq T$, Δ_2 -定義可能, 無矛盾の 3 条件を満たす理論 T で, 完全なものが存在する。

一方, 無矛盾性の仮定を強くすると, 理論の複雑さを上げてても不完全になる。

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 2017; Salehi and Seraji, 2017)

理論 T が $\text{PA}^- \subseteq T$, Σ_{n+1} -定義可能, Σ_n -健全の 3 条件を満たせば, T は不完全。

① 原始再帰的関数

② 原始再帰的関数と原始再帰的關係の表現

③ 算術化と証明可能性述語

④ 第 1 不完全性定理

⑤ 第 2 不完全性定理

第 2 不完全性定理と Löb の定理

第 2 不完全性定理は無矛盾性を表す文の証明不可能性に関する定理であるが、より一般に健全性を表す証明不可能性に関する Löb の定理の証明を目標とする。

- 第 2 不完全性定理および Löb の定理は理論の証明可能性に関する定理でもあり、更には証明可能性述語に関する定理でもある。
- 証明のためには証明可能性述語に関するより細かな分析が必要となる。
- その準備として、自由変数を持ったゲーデル数の表記を導入するところから始める。

原始再帰的関数 $N(x)$ 原始再帰的関数 $N(x)$

n から n の数項のゲーデル数 $\ulcorner n \urcorner$ を計算する原始再帰的関数およびそれに対応する関数記号を $N(x)$ とかいた.

- $N(0) = \ulcorner \bar{0} \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner = 1$
- $N(1) = \ulcorner \bar{1} \urcorner = \ulcorner \bar{0} + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner \bar{0} \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner \rangle \rangle = 2 \times \langle 5, \langle 1, 3 \rangle \rangle$
- ...

- 項 $v_0 + 1$ は v_0 を自由変数として持つが、そのゲーデル数 $\ulcorner v_0 + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle 25, 3 \rangle \rangle$ は自然数であり、自由変数 v_0 をもたない.
- ここで $v_0 + 1$ の v_0 に $\bar{n}$ を代入した $\bar{n} + 1$ のゲーデル数は $\ulcorner \bar{n} + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner \bar{n} \urcorner, 3 \rangle \rangle = 2 \times \langle 5, \langle N(n), 3 \rangle \rangle$ と書ける.
- $\ulcorner v_0 + 1 \urcorner := 2 \times \langle 5, \langle N(v_0), 3 \rangle \rangle$ と定めれば v_0 を自由変数に持つ.
- 更にこの v_0 に値 n を持つ閉項 t を代入すれば、 $N(t) = \ulcorner \bar{n} \urcorner$ なので $\ulcorner v_0 + 1 \urcorner(t) = \ulcorner \bar{n} + 1 \urcorner$ が成り立つ.

自由変数を持つゲーデル数の表記

自由変数を持つゲーデル数の表記を以下で再帰的に定める。

- $\ulcorner 0 \urcorner = 1$
- $\ulcorner 1 \urcorner = 3$
- $\ulcorner v_n \urcorner = N(v_n)$
- $\ulcorner t(\vec{x}) + u(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner t(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner u(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\vec{x}) \times u(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 7, \langle \ulcorner t(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner u(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\vec{x}) < u(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 9, \langle \ulcorner t(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner u(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\vec{x}) = u(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 11, \langle \ulcorner t(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner u(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \neg \varphi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 13, \ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 15, \langle \ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner \psi(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \vee \psi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 17, \langle \ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner \psi(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 19, \langle \ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner, \ulcorner \psi(\vec{x}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \exists y \varphi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 21, \langle \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi'(\vec{x}, y) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \forall y \varphi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 23, \langle \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi'(\vec{x}, y) \urcorner \rangle \rangle$

最後の二項目の $\ulcorner \varphi'(\vec{x}, y) \urcorner$ は $\ulcorner \varphi(\vec{x}, y) \urcorner$ の中の $N(y)$ を全て $\ulcorner y \urcorner$ で置き換えたもの。

導出可能性条件

定理 (導出可能性条件 (Löb, 1955; Feferman, 1960))

T を $\text{IS}_1 \subseteq T$ かつ原始再帰的とする。

- ① 任意の論理式 $\varphi(\vec{x})$ について, $T \vdash \varphi(\vec{x})$ ならば $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner)$.
- ② 任意の論理式 $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ について

$$\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}) \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\vec{x}) \urcorner).$$

- ③ (形式化された Σ_1 -完全性) 任意の Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について
 $\text{IS}_1 \vdash \varphi(\vec{x}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner)$.

導出可能性条件の一番目と二番目の項目を合わせると次が直ちに得られる。

導出可能性条件の系

任意の論理式 $\varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x})$ について,

$T \vdash \varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x})$ ならば $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\vec{x}) \urcorner)$.

導出可能性条件の証明

以降、単純化のために $\vec{x}$ が x の場合のみを示す。

証明

1. $T \vdash \varphi(x)$ とすると、Gen より $T \vdash \forall x \varphi(x)$ 。

各 k に対して $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\bar{k})$ は論理公理なので MP より $T \vdash \varphi(\bar{k})$ であるが、更に T における $\varphi(\bar{k})$ の証明のコードを計算する原始再帰関数 e がとれる。

すなわち $\text{IS} \vdash \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, e(x))$ なので $\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ 。

導出可能性条件の証明の続き

導出可能性条件の証明の続き

2. $\varphi(\bar{k}) \rightarrow \psi(\bar{k})$ の証明 p と $\varphi(\bar{k})$ の証明 q が与えられたら,
 $p \frown q \frown \langle \ulcorner \psi(\bar{k}) \urcorner \rangle$ が $\psi(\bar{k})$ の証明となることが $p \frown q \frown \langle \ulcorner \psi(\bar{k}) \urcorner \rangle$ の長さに関する帰納法で確かめられる.

これを算術化した主張は IS_1 においても Σ_1 帰納法公理を用いて確かめられる。
 すなわち

$$\begin{aligned} \text{IS}_1 \vdash \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x}) \urcorner, y) \wedge \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, z) \\ \rightarrow \text{Prf}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner, y \frown z \frown \langle \ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner \rangle) \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{IS}_1 \vdash \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x}) \urcorner, y) \wedge \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, z) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$$

とすれば y, z は $\rightarrow$ の右辺に現れないので

$$\text{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x}) \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$$

が成立する。

3. Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ の構成に関する帰納法で、項目 1 と 2 をフル活用しながら示す。 $\square$

Löb の定理

定理 (Löb の定理 (Löb, 1955))

T を $\mathbf{IS}_1 \subseteq T$, 原始再帰的, 無矛盾の 3 条件を満たす理論, φ を文とすると,
 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

証明

- 条件を満たす T について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ を仮定する.
- 論理式 $\text{Pr}_T(x) \rightarrow \varphi$ に対して不動点定理を適用することで

$$\mathbf{IS}_1 \vdash \psi \leftrightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \varphi)$$

を満たす文 ψ がとれる.

- 系より $\mathbf{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner)$.
- 導出可能性条件 2 より $\mathbf{IS}_1 \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner))$
- ここで $\text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ は Σ_1 文なので形式化された Σ_1 -完全性より
 $\mathbf{IS} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$ だから,
 $\mathbf{IS} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- 仮定と合わせると $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \varphi$.
- 不動点定理の取り方より $T \vdash \psi$.
- よって $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ であり, $T \vdash \varphi$.



第 2 不完全性定理

- Löb の定理において扱った $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ という文は、「 T において証明できるなら正しい」という ($\mathbb{N}$ に関する) 健全性の形式化だと思える。
- 理論 T の無矛盾性は $T \not\vdash 0 = 1$ という条件と同値なので、 T の無矛盾性を形式化は Π_1 文 $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ としてとれる。
- この文を $\text{Con}(T)$ と書く。

定理 (第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931))

T を $\text{IS}_1 \subseteq T$, 原始再帰的, 無矛盾の 3 条件を満たす理論とすると, $T \not\vdash \text{Con}(T)$.

証明

$T \vdash \text{Con}(T)$ と仮定すれば, $T \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ すなわち

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \rightarrow 0 = 1$.

Löb の定理より $T \vdash 0 = 1$ なので T の無矛盾性に反する。

したがって $T \not\vdash \text{Con}(T)$.



第 2 不完全性定理の応用

第 2 不完全性定理は文や理論の証明不可能性の分析に使える。

例えば $n \geq 1$ について $\text{I}\Sigma_{n+1} \vdash \text{Con}(\text{I}\Sigma_n)$ なので $\text{I}\Sigma_n \not\vdash \text{I}\Sigma_{n+1}$ 。

完全性定理から次のことが分かる。

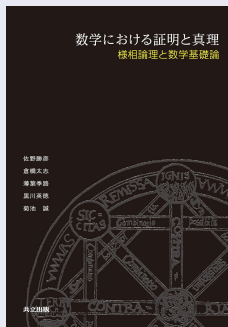
$\text{PA} + \neg\text{Con}(\text{PA})$ のモデル（超準モデル）が存在する。

（このモデルでは PA は $0 = 1$ の証明を持っている）

- 第 2 不完全性定理に関しては多くの議論が行われている。
- 導出可能性条件を様相論理を用いて分析する「証明可能性論理」も盛んに研究されている。

宣伝

好評発売中！



- 数学における証明と真理 - 様相論理と数学基礎論
- 佐野勝彦 ・ 倉橋太志 ・ 薄葉季路 ・ 黒川英徳 ・ 菊池誠 著
- 共立出版