数学基礎論サマースクール 2024 講義資料
担当：不完全性定理と反映原理（算術 1, 3, 4）
2024/9/17(火)〜9/20(金)

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

最終更新：2024 年 9 月 18 日

概要

この資料は数学基礎論サマースクール 2024「算術の証明論と構成的数学」の倉橋担当分（算術 1,3,4）のためのものです．各回では次の内容の講義を行います．

第 1 回目（9/17, 10:10–11:40）命題論理と一階述語論理の基本（算術 1）

全体の初回ということで，古典命題論理と古典一階述語論理の導入を行います．それぞれに対する意味論，構文論の枠組みを導入し，それらを結ぶ完全性定理について紹介します．これら基本的な話題についての概観を得ることを目標とし，定理の証明は行いません．

第 2 回目（9/18, 13:10–14:40）不完全性定理（算術 3）

第 1 不完全性定理と第 2 不完全性定理の証明の概要を追っていきます．原始再帰的関数を導入し，それらが理論 $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現されることを確認します．続いて算術化を通じて証明可能性述語を導入し，それを用いて第 1 不完全性定理，第 2 不完全性定理を証明します．証明全体の全体像を掴んでもらうことが目標であり，最短コースでの紹介となるので，証明の詳細を省略したり粗めの議論をしたりします．
本講義資料は横山先生が担当される算術 2 の内容は含んでいないため，自己充足的になっていません．適宜横山先生の資料も参照してください．

第 3 回目（9/18, 15:00–16:30）反映原理（算術 4）

健全性の形式化である一様反映原理に注目し，それらの基本的な性質を導入したうえで，一様反映原理に関する重要な定理である Kreisel and Lévy の定理およびその階層化である Leivant–Ono の定理の証明を行います．これらを通じて，算術において一様反映原理が重要な位置にあることを体感してもらうことが目標です．Kreisel and Lévy の定理の証明にはシークエント計算のカット除去定理の形式化を用いるため，途中でシークエント計算 $\mathbf{LK}$ を導入し，そのカット除去定理の証明も行います．

目次

1　命題論理と一階述語論理の基本（算術 1）

「算術 1」とあるが，本節は算術というよりは数理論理学の基本中の基本である，古典命題論理と一階述語論理の導入を行う．まずは命題論理について，その意味論，構文論を導入し，そしてそれらをつなぐ完全性定理について紹介する．続いて一階述語論理についても同様に意味論，構文論を導入し，完全性定理を紹介する．本節の内容は多くの数理論理学の教科書に記載されているが，古典一階述語論理の完全性定理の証明までを簡潔に学習できる教科書として坪井 [33] を薦めたい．

1.1　古典命題論理

主張と主張のつながりの間に発生する論理構造について，議論・分析する枠組みを命題論理という．真偽の定まっていない何らかの命題を表す**命題変数** $p_0, p_1, p_2, \ldots$ と，矛盾した命題を表す**命題定数** $\perp$ を用意する．命題変数と命題定数から論理結合子 $\neg$ (でない)，$\vee$ (または)，$\wedge$ (かつ)，$\rightarrow$ (ならば) を用いて次々と新しい主張を作り出すことができ，そのようにして作られた主張を**論理式**という．論理式は次のように再帰的に定義される．

定義 1.1 (論理式)**.**

1. 各命題変数 p_i と $\perp$ は論理式.
2. A が論理式なら $\neg(A)$ も論理式.
3. A, B が論理式なら $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \rightarrow (B)$ も論理式.

括弧が多すぎると読みにくいので，論理式 $((\neg(p_0)) \wedge (p_1)) \rightarrow (p_0)$ を $(\neg p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_0$ のように適宜括弧を省略して表記する．

注意 1.2. 論理式 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ のことを $A \leftrightarrow B$ と略記する．今回は $\neg$ を記号として導入しているが，論理式 $\neg A$ を $A \rightarrow \perp$ の省略表現だとすることも多い．

1.1.1　古典命題論理の意味論

主張の真偽がもたらす論理構造を分析する枠組みが古典命題論理の意味論である．各論理式の真偽を，真を 1，偽を 0 として数値を用いて表す．

定義 1.3 (真理値割り当て)**.** 各命題変数に 0 もしくは 1 を割り当てる写像を**真理値割り当て**という．

各真理値割り当て f は論理式に 0 もしくは 1 を割り当てる写像 f^* に次のように拡張される．

命題 1.4. 各真理値割り当て f は，次を満たすように，論理式に 0 もしくは 1 を割り当てる写像 f^* に一意に拡張可能である：

1. $f^*(p_i) = f(p_i)$

2. $f^*(\bot) = 0$
3. $f^*(\neg A) = 1 \iff f^*(A) = 0$
4. $f^*(A \wedge B) = 1 \iff f^*(A) = 1$ かつ $f^*(B) = 1$
5. $f^*(A \vee B) = 1 \iff f^*(A) = 1$ または $f^*(B) = 1$
6. $f^*(A \to B) = 1 \iff f^*(A) = 0$ または $f^*(B) = 1$

以降，真理値割り当て f と，f を拡張した写像 f^* とを同一視し，それらを単純に f と表すこととする．

真理値割り当てに基づく論理式の 0, 1 の計算は定義に基づいて行うと非常に面倒なので，次のように**真理値表**をかいた方がやりやすい．各論理式に対して，含まれる命題変数への 0, 1 の割り当て (真理値割り当て) は有限通りなので，可能なパターンに対する 0, 1 の値を下の表に従って計算する．

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1

例 1.5 ($(\neg A \wedge B) \to A$ の真理値表)**.**

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \to A$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

どのような状況下でも真となるような命題をトートロジーという．

定義 1.6 (トートロジー)**.** 論理式 A が**トートロジー**であるとは，全ての真理値割り当て f について $f(A) = 1$ となることをいう．A がトートロジーであることを $\models A$ とかく．

例 1.7 ($A \to (B \to A)$ の真理値表)**.** 次の真理値表は $\models A \to (B \to A)$ を示している．

例 1.8 (トートロジーの例)**.**

$$\models A \to A$$
$$\models \big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C)$$
$$\models \bot \leftrightarrow (A \wedge \neg A)$$
$$\models \neg A \leftrightarrow \big(A \to \bot\big) \qquad \models (A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

爆発律	$\models \bot \to B$	
排中律	$\models A \vee \neg A$	
場合分け	$\models \big((A \to B) \wedge (\neg A \to B)\big) \to B$	
べき等律	$\models A \leftrightarrow (A \wedge A)$	$\models A \leftrightarrow (A \vee A)$
交換律	$\models (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$	$\models (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$
結合律	$\models ((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$	$\models ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
分配律	$\models (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	$\models (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
ド・モルガン律	$\models \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	$\models \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
	$\models A \leftrightarrow (\neg\neg A)$	
	$\models (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	

論理式の集合を何らかの知識の集まりだとみなし，単に理論と呼ぶことにする．

定義 1.9 (理論)**.** 論理式からなる集合を**理論**という．

理論 T の全ての要素が満たされるという状況下では必ず論理式 A が正しくなるとき，A が T から（意味論的に）帰結する，と考えて次の定義を与える．

定義 1.10 (意味論的な帰結)**.** 論理式 A と理論 T について，$T \models A$ を，任意の真理値割り当て f について，「全ての $B \in T$ について $f(B) = 1$」ならば $f(A) = 1$ となることとする．

定義より，A がトートロジーであること（つまり $\models A$）と $\emptyset \models A$ は等しい．

例 1.11 (意味論的な帰結の例)**.** 論理式 A と B について $\{A, A \to B\} \models B$.

証明. $f(A) = f(A \to B) = 1$ となるような任意の真理値割り当て f について，もし $f(B) = 0$ なら $f(A \to B) = 0$ となりおかしいから $f(B) = 1$ である．よって $\{A, A \to B\} \models B$ が成り立つ． □

1.1.2 古典命題論理の構文論

論理式の真偽は参照せず，形式的な操作のみで推論を行う枠組みである**構文論**について扱う．数学の特定の分野における定理は，その分野の公理を用いた証明を具体的に書き下すことでその正しさが保証される．この観点から，理論 T とはその分野の公理の集合であり，T のもとで命題 A が導けるとは「T の要素を公理として用いた，A の証明がある」と考えることもできる．証明とは何か，を非

常に単純化して述べるならば，いくつかの仮定から何らかの結論を得るという導出を書き下したものである．その導出の際には仮定，つまり理論 T の要素（公理）および論理的に正しい原理を用いて，論理的に正しい推論が行われなければならない．どのような導出を行うのかに応じていろいろな証明体系が考えられ，ヒルベルト流 **HK**，シークエント計算 **LK**，自然演繹 **NK** がその主なものとして挙げられる．ここではまずはヒルベルト流の体系 **HK** を導入する．シークエント計算の体系 **LK** も第 3 節において導入される．

ヒルベルト流の体系 **HK** は論理公理と推論規則を持つ．まず **HK** の論理公理は次の通り．

定義 1.12 (**HK** の論理公理)**.**

Ax1　$A \to (B \to A)$

Ax2　$(A \to B) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to C)]$

Ax3　$A \land B \to A, \quad A \land B \to B$

Ax4　$A \to (B \to A \land B)$

Ax5　$A \to A \lor B, \quad B \to A \lor B$

Ax6　$(A \to C) \to [(B \to C) \to (A \lor B \to C)]$

Ax7　$(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$

Ax8　$\bot \to A, \quad A \land \neg A \to \bot$

Ax9　$A \lor \neg A$

Ax1 の $A \to (B \to A)$ は，この形をした論理式が全て論理公理であることを表している（無限個ある）．例えば $p_0 \to (p_1 \to p_0)$ や $(p_1 \land \neg p_0) \to (p_{100} \to (p_1 \land \neg p_0))$ も論理公理である．実は **HK** の論理公理は全てトートロジーであり，これらの正しさはその意味で保証されている．

理論の要素および論理公理を用いて更に新しい結論を推論するために用いる，論理式から論理式を導くための規則を導入する．そのような，論理的に正しい導出の規則を**推論規則**という．

定義 1.13 (**HK** の推論規則)**.** 体系 **HK** においては，論理式 A と $A \to B$ が既に導出できていれば，それらから B を導出してよいとする．この推論規則を**モーダス・ポネンス**といい，MP で表す．

HK の論理公理は無条件に導出できる論理式たちであり，既に導出できている論理式たちに対して推論規則を順次適用していくことで論理公理以外のいろいろな論理式を導出できる．ちなみに体系 **HK** の特徴は，論理公理が多いが，他方で推論規則が MP のただ一つだけである点である．さて，例として $A \to A$ の導出を示そう．

例 1.14 ($A \to A$ の導出)**.**

1. $A \to (A \to A)$　（**Ax1**: $A \to (B \to A)$ の B を A とした）
2. $(A \to (A \to A)) \to [(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)]$
（**Ax2**: $(A \to B) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to C)]$ の B と C をそれぞれ $A \to A$ と A とした）

3. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ (1 と 2 から MP)
4. $A \to ((A \to A) \to A)$ (**Ax1**: $A \to (B \to A)$ の B を $A \to A$ とした)
5. $A \to A$ (3 と 4 から MP)

この例のように，1, 2, 3, 4, 5 で得られる論理式はそれぞれ論理公理であるか，これまでに現れる要素から推論規則 MP を適用して得られるかのどちらかであり，1, 2, 3, 4, 5 のような論理式の列を形式的証明という．より一般に，論理公理以外にも理論の公理を仮定として用いるような形式的証明を定める．

定義 1.15 (形式的証明)**.** 論理式の列 $A_0, A_1, \dots, A_k$ が 理論 T における A_k の**形式的証明**であるとは，各 $i \leq k$ について

1. A_i が論理公理であるか
2. A_i が T の要素であるか
3. ある $j, m < i$ について，A_i が A_j と A_m から MP で導かれるか

のいずれかであることをいう．このとき A_k は T において**証明可能**であるといい，$T \vdash A_k$ とかく．

$\emptyset \vdash A$ のときは単に $\vdash A$ とかく．例 1.14 より $\vdash A \to A$ である．A が T において証明可能でないときは $T \nvdash A$ とかく．

理論の証明可能性に関する基本的な性質を示す．

命題 1.16. T, S を理論，A と B を論理式とする．

1. $A \in T$ ならば $T \vdash A$.
2. $T \vdash A$ かつ $T \subseteq S$ ならば $S \vdash A$.
3. $T \vdash A$ かつ $T \vdash A \to B$ ならば $T \vdash B$.

証明. 1. $A \in T$ とする．このとき論理式の列 A は T における A の形式的証明であり，よって $T \vdash A$ が成り立つ．

2. $T \vdash A$ かつ $T \subseteq S$ とする．T における A の形式的証明 $A_0, A_1, \dots, A$ をとれば，$T \subseteq S$ より，これは S における A の形式的証明でもある．よって $S \vdash A$ が成り立つ．

3. $T \vdash A$ かつ $T \vdash A \to B$ とする．T における A の形式的証明 $A_0, A_1, \dots, A$ と T における $A \to B$ の形式的証明 $B_0, B_1, \dots, A \to B$ がとれる．ここで列

$$A_0, A_1, \dots, A, B_0, B_1, \dots, A \to B, B$$

は T における B の形式的証明である．特に最後の B はそれより前の A と $A \to B$ から MP で導ける．よって $T \vdash B$ が成り立つ． □

定理 1.17 (演繹定理)**.** T を理論，A と B を論理式とすると，以下は同値である：

1. $T \cup \{A\} \vdash B$.

2. $T \vdash A \to B$.

証明． $(1 \Rightarrow 2)$: $T \cup \{A\} \vdash B$ と仮定する．このとき $T \cup \{A\}$ における B の形式的証明 $B_0, \ldots, B_k$（ただし B_k は B）がとれる．全ての $i \leq k$ について $T \vdash A \to B_i$ となることを，$i \leq k$ に関する帰納法で証明する．

1. B_0 は論理公理か T の要素か A そのものかのいずれかである．B_0 が論理公理か T の要素の場合は列 $B_0, B_0 \to (A \to B_0), A \to B_0$ は $A \to B_0$ の形式的証明なので，$T \vdash A \to B_0$ である．B_0 が A のときは例 1.14 より $\vdash A \to A$ なので命題 1.16(2) より $T \vdash A \to B_0$ である．
2. $T \vdash A \to B_0, \ldots, T \vdash A \to B_i$ であると仮定して，$T \vdash A \to B_{i+1}$（$i+1 \leq k$） を示す．B_{i+1} が論理公理か $T \cup \{A\}$ の要素の場合は B_0 のときと同様に $T \vdash A \to B_{i+1}$ が示せる．B_{i+1} が $j, m < i+1$ について B_j と B_m から MP で導けるときは，例えば B_m が $B_j \to B_{i+1}$ という形をしている（B_j が $B_m \to B_{i+1}$ という形のときも同様に示せる）．帰納法の仮定より $T \vdash A \to B_j$ かつ $T \vdash A \to (B_j \to B_{i+1})$ である．論理公理 **Ax2** より $T \vdash (A \to B_j) \to [(A \to (B_j \to B_{i+1})) \to (A \to B_{i+1})]$ なので，命題 1.16(3) を二回適用して $T \vdash A \to B_{i+1}$ を得る．

以上より特に $T \vdash A \to B$ が得られる．

$(2 \Rightarrow 1)$: $T \vdash A \to B$ と仮定する．命題 1.16(1) より $T \cup \{A\} \vdash A$ である．$T \subseteq T \cup \{A\}$ なので命題 1.16(2) と仮定より $T \cup \{A\} \vdash A \to B$ である．よって命題 1.16(3) より $T \cup \{A\} \vdash B$ である． □

例 1.18 (演繹定理を用いた導出の例)**.** $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$.

証明． 理論 $\{A \to (B \to C), B, A\}$ において，命題 1.16(1) より A と $A \to (B \to C)$ が証明できるので，命題 1.16(3) より $B \to C$ が証明できる．更に B も証明できるので，$\{A \to (B \to C), B, A\} \vdash C$ である．演繹定理を順次適用して

$$\begin{aligned}\{A \to (B \to C), B\} &\vdash A \to C \\ \{A \to (B \to C)\} &\vdash B \to (A \to C) \\ &\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big).\end{aligned}$$ □

真理値割り当てに基づく $T \models A$ と形式的証明に基づく $T \vdash A$ という二つの帰結関係は実は同値であり，そのことを主張するのが完全性定理である．

定理 1.19 (古典命題論理の完全性定理)**.** *T を理論，A を論理式とすると，$T \models A \iff T \vdash A$.*

より正確にはこの定理における含意 $(\Rightarrow)$ の成立を古典命題論理の完全性といい，$(\Leftarrow)$ の成立は健全性と呼ばれる．特に $T = \emptyset$ の場合に得られる $\models A \iff \vdash A$ という同値性の成立を完全性定理と呼んで，定理 1.19 の主張を正確には強完全性定理と呼ぶ．健全性 $(\Leftarrow)$ の証明は T における A の形式的証明の長さに関する帰納法．完全性 $(\Rightarrow)$ の証明が本質的であり，対偶 $T \nvdash A \Rightarrow T \not\models A$ を示す方針で進めるが，それはつまり $T \nvdash A$ という仮定から，$T \cup \{\neg A\}$ の全ての要素を 1 にするような

真理値割り当てがうまく作るれることを示す，ということ．

1.2 古典一階述語論理

命題論理では命題変数と命題定数に論理結合子 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$ を結合して作られる主張たちの構造について分析した．他方，通常，数学的主張は何らかの数学的構造における個々の要素や構造そのものの性質について述べるものである．命題論理の枠組みでは，例えば自然数の構造 $\mathbb{N}$ における「5 は素数である」「最小の自然数が存在する」といった，構造に関する具体的な内容に踏み込んだり，また個々の要素について言及したりすることはなかった．一階述語論理はこうした主張を記述し，分析することのできる枠組みである．

1.2.1 一階述語論理の論理式

述語論理が命題論理と大きく異なる点は**存在量化子** $\exists$ 及び**全称量化子** $\forall$ を用いることである．ここで，$\exists y(\cdots)$ は「ある要素 y について $\cdots$」を意味し，$\forall y(\cdots)$ は「全ての要素 y について $\cdots$」を意味する．また，量化記号を使用するためには，具体的な要素を表すのではないが何らかの要素を表すための記号である**変数**を用いる．以上をふまえて，まずは数学の主張の論理構造を表す記号である**論理記号**を用意する．

定義 1.20 (論理記号)**.**

論理結合子: $\neg, \vee, \wedge, \to$
量化子: $\exists, \forall$
変数: $v_0, v_1, v_2, \ldots$

変数は v_i という形の記号に制限しているが，変数を表す略記として x, y, z 等も用いる．すなわち，$\forall x$ と書いたときの x は何らかの i についての v_i のことである．

- 自然数に関する主張は $\forall x(\neg x = 0 \to \exists y\,(x = y + 1))$ のように記号 $0, 1, +$ などを用いてかける．
- 集合に関する主張は $\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z = x)$ のように記号 $\in$ などを用いてかける．

自然数論，実数論，集合論など，議論したい「理論」に応じて，その理論に関する構造の性質を記述するために適した記号を用意する必要がある．理論に固有の記号を**非論理記号**といい，それらには，大きく分けて定数記号，関数記号，および関係記号がある．

定義 1.21 (定数記号，関数記号，関係記号)**.**

- 特定の要素を表す記号を**定数記号**という．例えば自然数論において記号 0 は自然数 0 を表すことを意図する定数記号．定数記号 0 は自然数 0 そのものではなく，単なる記号であることに注意.
- 演算を表す記号を**関数記号**という．各関数記号には 1 以上の自然数である**アリティ**が定められ

ている．例えば自然数論において $+, \times$ は 2 変数関数記号．

- 関係を表す記号を**関係記号**という．各関係記号にもアリティが定められている．例えば自然数論において $<$ は 2 変数関係記号．

定義 1.22 (言語)**.** 定数記号，関数記号，関係記号からなる集合を**言語**という．ただし，2 変数関係記号である等号 $=$ は，明記しなくともどの言語にも自動的に含まれるとする．等号を論理記号に含める，とする教科書もある．

例 1.23 (言語の例)**.**

1. 算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, 1, +, \times, <\}$ は自然数に関する主張を記述するのに用いる言語．$0, 1$ は定数記号，$+, \times$ は 2 変数関数記号，$<$ は 2 変数関係記号．
2. 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$ は集合に関する主張を記述するのに用いる言語．$\in$ は 2 変数関係記号．

変数，定数記号，関数記号を用いて作られる，要素を表す記号列を**項**という．

定義 1.24 ($\mathcal{L}$-項)**.** 言語 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}$-項を以下で再帰的に定める：

1. 変数 v_i は $\mathcal{L}$-項．
2. $\mathcal{L}$ の定数記号 c は $\mathcal{L}$-項．
3. f が $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号で $t_1, \ldots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ も $\mathcal{L}$-項．

例 1.25 (項の例)**.**

1. 算術の言語 $\mathcal{L}_A$ について，$(x \times x) + 0$ や $(1 + x) \times y$ などは $\mathcal{L}_A$-項．定義通りだと $x + y$ と $x \times y$ はそれぞれ $+(x, y)$ と $\times(x, y)$ のように書くべきであるが，分かりづらくなるので慣例に従って上述のように表記する．
2. 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ は定数記号も関数記号も持たないので，$\mathcal{L}_\in$-項は変数のみ．

変数を含まない項を**閉項**という．

命題論理の場合は命題変数と命題定数に論理結合子を適用していくことで論理式が生成された．述語論理において最も基本的な論理式は次の**原子論理式**である．

定義 1.26 ($\mathcal{L}$-原子論理式)**.** $\mathcal{L}$ を言語とするとき，$\mathcal{L}$ の n 変数関係記号 R と $\mathcal{L}$-項 $t_1, \ldots, t_n$ について，$R(t_1, \ldots, t_n)$ を $\mathcal{L}$-原子論理式という．

例 1.27 (原子論理式の例)**.**

1. $\mathcal{L}_A$-項 t_1, t_2 について，$t_1 < t_2$ および $t_1 = t_2$ は $\mathcal{L}_A$-原子論理式．
2. $\mathcal{L}_\in$-原子論理式は $x \in y$ および $x = y$．

定義 1.28 ($\mathcal{L}$-論理式)**.** $\mathcal{L}$ を言語とするとき，$\mathcal{L}$-論理式を次で再帰的に定める：

1. $\mathcal{L}$-原子論理式は $\mathcal{L}$-論理式.
2. φ が $\mathcal{L}$-論理式のとき，$\neg(\varphi)$, $\exists v_i(\varphi)$, $\forall v_i(\varphi)$ も $\mathcal{L}$-論理式.
3. φ と ψ が $\mathcal{L}$-論理式のとき，$(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$ も $\mathcal{L}$-論理式.

命題論理の場合と同様に括弧が多すぎると読みづらいので，可読性を失わない範囲で括弧は省略することとする．一階述語論理においても命題論理の場合と同様に $\leftrightarrow$ を略記として用いる．言語 $\mathcal{L}$ を決めれば，$\mathcal{L}$-項と $\mathcal{L}$-論理式が定まることまで確認できた.

例 1.29 (論理式の例)**.**

1. $\mathcal{L}_A$-論理式の例: $x > 1 \wedge \forall y \left(\exists z\,(x = y \times z) \rightarrow y = 1 \vee y = x\right)$
2. $\mathcal{L}_\in$-論理式の例: $\neg\exists x \forall y\,(y \in x \leftrightarrow \neg y \in y)$

定義 1.30 (束縛変数と自由変数)**.** 論理式 φ の中で，変数の出現 y が量化記号 $\forall y$ もしくは $\exists y$ の作用する範囲の中にあるとき，この y を φ の**束縛変数**という．束縛変数ではない変数の出現を**自由変数**という.

例 1.31.

1. 論理式 $\exists y \forall x (y \leq x)$ の束縛変数は x と y で自由変数はない.
2. 論理式 $\forall x (y \leq x)$ の束縛変数は x で，自由変数は y.
3. 論理式 $y = 0 \wedge \exists y (y \leq 0)$ の束縛変数は $y \leq 0$ の y で，自由変数は $y = 0$ の y.

自由変数を含まない論理式を**閉論理式**もしくは**文**という.

項の中の変数や，論理式の中の自由変数を別の項で置き換えることで新しい項や論理式が得られる.

定義 1.32 (項の代入)**.** s を $\mathcal{L}$-項とする.

1. $\mathcal{L}$-項 $t(x)$ に含まれる全ての変数 x を s で置き換えることで得られる $\mathcal{L}$-項を $t(s)$ とかく.
2. $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(x)$ に自由に現れる全ての変数 x を s で置き換えることで得られる $\mathcal{L}$-論理式を $\varphi(s)$ とかく.

注意 1.33 (代入に関する細かな注意)**.** 論理式への代入には実は注意が必要．$\exists y\,(x < y)$ は $\mathbb{N}$ において x がどんな自然数であっても成り立つ．一方 x に y を代入してしまうと $\exists y\,(y < y)$ となり，正しくなく，論理式の意図する内容が変化してしまう．このように，$\varphi(x)$ の自由な x が変数 y について $\exists y$ もしくは $\forall y$ の作用する範囲にあるときには，x に $\underline{y\text{ を含む項}}$を代入することはできない.

1.2.2 一階述語論理の意味論

量化記号 $\exists$ と $\forall$ を扱う述語論理においては，各原子論理式が正しいかどうかを決めるだけでは全ての論理式の正しさが決まるわけではない．論理式 $\exists x \varphi(x)$ や $\forall y \psi(y)$ の正しさを判断するためには，量化記号が走る範囲，つまり集合を特定しなければならない．ここでは，集合の上に言語の解釈

を定めることによって得られる「構造」の概念を導入し，述語論理の意味論を展開する．

言語とは定数記号，関数記号，関係記号からなる集合であった．ここで注意してほしいのが，例えば $\forall x \exists y\,(y < x)$ のような論理式は単なる記号列であり，現段階では $<$ は何らかの集合の上の大小関係を表すわけではない．この論理式が有意味な主張であることを見出すには，まずは量化記号 $\exists$ と $\forall$ の走る集合 M を定め，そして記号 $<$ を M 上の適切な 2 項関係 $<^M$ として解釈する．そうすれば，論理式 $\forall x \exists y\,(y < x)$ はこの解釈のもとで

全ての $a \in M$ に対して，$b \in M$ が存在して，$b <^M a$ が成り立つ

と読める．このように，集合の上に，言語の各記号に対応する要素，関数，関係を定めたものを**構造**という．

定義 1.34 ($\mathcal{L}$-構造)**.** 言語 $\mathcal{L}$ に対して, $\mathcal{L}$-構造とは次の条件を満たす組 $(M, \{c^M\}_{c\in\mathcal{L}}, \{f^M\}_{f\in\mathcal{L}}, \{R^M\}_{R\in\mathcal{L}})$ のことである：

1. M は空でない集合．これをこの構造の**領域**という．
2. 各定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対して，c^M は M のある要素.
3. 各 n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対して，f^M は M 上のある n 変数関数.
4. 各 n 変数関係記号 $R \in \mathcal{L}$ に対して，R^M は M 上のある n 項関係.
5. ただし $=^M$ は常に M 上の相等関係 $\{(x,x) \in M^2 \mid x \in M\}$ とする．これを単に $=$ で表す.

構造と領域を同一視して，この構造のことを M と書いたりする．

例 1.35 (構造の例)**.**

1. 言語 $\mathcal{L}_A = \{0, 1, +, \times, <\}$ について，$\mathcal{L}_A$-構造 $(\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \times^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}})$ は $0^{\mathbb{N}}$ と $1^{\mathbb{N}}$ をそれぞれ自然数 0 と 1, $+^{\mathbb{N}}$ と $\times^{\mathbb{N}}$ をそれぞれ自然数上の通常の加法と乗法，そして $<^{\mathbb{N}}$ を自然数上の通常の大小関係としたもの．この構造 $\mathbb{N}$ を**一階算術の標準モデル**という.
2. 言語 $\mathcal{L}_A$ について，空でない適当な集合 M の適当な要素を $0^M, 1^M$ とし，適当な 2 変数関数を $+^M$, $\times^M$ とし，適当な 2 項関係を $<^M$ とした $(M, 0^M, s^M, +^M, \times^M, <^M)$ も $\mathcal{L}_A$-構造.

続いて，$\mathcal{L}$-構造における $\mathcal{L}$-項の解釈を定める．変数を含まない項，すなわち閉項 t は定数記号と関数記号から成り，$\mathcal{L}$-構造において t は何らかの要素を表す．しかし，閉項によって領域の全ての要素を表し尽くすことができるわけではない．例えば定数記号を含まない言語では，項は必ず変数を含むために閉項ではない．この状況を回避するために，まずは次のように言語を拡張する．

定義 1.36 (言語の拡張)**.** $\mathcal{L}$ を言語とし，M を $\mathcal{L}$-構造とする．M の各要素 a に対して定数記号 c_a を用意し，これらを全て言語 $\mathcal{L}$ に加えて得られる言語を $\mathcal{L}(M)$ とする．すなわち $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in M\}$.

この拡張は，後に構造における論理式の真偽を定める際に $\forall$ や $\exists$ について考える場合に用いられる．では各 $\mathcal{L}(M)$-閉項 t に対する M における解釈 t^M を定める．

定義 1.37 (項の解釈)**.** $\mathcal{L}$ を言語とし，M を $\mathcal{L}$-構造とする．各 $\mathcal{L}(M)$-閉項 t に対して，M の要素 t^M を以下で再帰的に定める：

1. t が $\mathcal{L}$ の定数記号 c なら $t^M = c^M$.
2. t が M の要素 a に対応する項 c_a なら $t^M = a$.
3. t が $\mathcal{L}(M)$-閉項 $t_1, \dots, t_n$ について $f(t_1, \dots, t_n)$ のとき，$t^M = f^M(t_1^M, \dots, t_n^M)$.

$\mathcal{L}$-構造 M と $\mathcal{L}$ の n 変数関係記号 R について，R^M は M 上の n 項関係であった．したがって $\mathcal{L}(M)$-閉項 $t_1, \dots, t_n$ について，M の要素の n 組 $(t_1^M, \dots, t_n^M)$ が R^M を満たすかどうかは決まっている．すなわち $(t_1^M, \dots, t_n^M) \in R^M$ もしくは $(t_1^M, \dots, t_n^M) \notin R^M$ である．これが決まれば後は M において各 $\mathcal{L}(M)$-文（自由変数を含まない論理式）の真偽が決まる．

述語論理においては，どの構造においてどの文が真になるかが重要なので，「構造 M において文 φ が真」を表す記法 $M \models \varphi$ を定める．

定義 1.38 (構造における文の真偽)**.** $\mathcal{L}$ を言語とし，M を $\mathcal{L}$-構造とする．各 $\mathcal{L}(M)$-文 φ に対して，$M \models \varphi$ を以下で再帰的に定める：

1. 原子論理式 $R(t_1, \dots, t_n)$ について，$M \models R(t_1, \dots, t_n) :\Longleftrightarrow (t_1^M, \dots, t_n^M) \in R^M$.
2. $M \models \neg\varphi :\Longleftrightarrow M \models \varphi$ でない．
3. $M \models \varphi_1 \vee \varphi_2 :\Longleftrightarrow M \models \varphi_1$ または $M \models \varphi_2$.
4. $M \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 :\Longleftrightarrow M \models \varphi_1$ かつ $M \models \varphi_2$.
5. $M \models \varphi_1 \to \varphi_2 :\Longleftrightarrow (M \models \varphi_1$ ならば $M \models \varphi_2)$.
6. $M \models \exists x\, \varphi(x) :\Longleftrightarrow M \models \varphi(t)$ となる $\mathcal{L}(M)$-閉項 t が存在する．
7. $M \models \forall x\, \varphi(x) :\Longleftrightarrow$ 全ての $\mathcal{L}(M)$-閉項 t について $M \models \varphi(t)$.

特に項目 6 と 7 において M の要素に言及する必要があり，M の要素 a に対応する $\mathcal{L}(M)$-閉項 c_a 達がその役割を担ってくれている．$\mathcal{L}$ を考えるだけではなく $\mathcal{L}(M)$ を考えなければならなかった理由がここにある．$\mathcal{L}$-文 φ は $\mathcal{L}(M)$-文でもあるので，これで $M \models \varphi$ かどうかが定められた．

例 1.39 (構造における文の真偽の例)**.** 算術の標準モデル $\mathbb{N}$ について，

1. $\mathbb{N} \models 0 < 1$.
2. $\mathbb{N} \models \forall x \exists y (x < y)$.

命題論理の場合と同様に理論や意味論的な帰結関係を定める．

定義 1.40 ($\mathcal{L}$-理論)**.** $\mathcal{L}$-<u>文</u>の集合を **$\mathcal{L}$-理論**という（論理式の集合ではない）.

定義 1.41 (理論のモデル)**.** M を $\mathcal{L}$-構造，T を $\mathcal{L}$-理論とする．全ての $\varphi \in T$ について $M \models \varphi$ となるとき，M を T の**モデル**であるといい，$M \models T$ と表す．

定義 1.42 (意味論的な帰結)**.** T を $\mathcal{L}$-理論とし，φ を論理式とするとき，$T \models \varphi$ を，任意の $\mathcal{L}$-構造

M について，$M \models T$ ならば $M \models \varphi$ となることとする．

$\emptyset \models \varphi$ のとき，$\models \varphi$ とかく．つまりこれは $\mathcal{L}$-論理式 φ が全ての $\mathcal{L}$-構造で正しいことを意味する．

例 1.43. 群の公理からなる理論 T_G と群の言語の文 φ について，$T_G \models \varphi$ とは，φ が全ての群において成立することを表す．例えば $T_G \models \forall x(x \circ e = x)$ や $T_G \models \forall x((x)^{-1} \circ x = e)$.

1.2.3 一階述語論理の構文論

ヒルベルト流証明体系の枠組みを述語論理に拡張する．そのために，命題論理の場合と同様に，述語論理における論理公理および推論規則を定める．述語論理においてはこれら以外にも等号 $=$ に関する公理を用意する．今から定める述語論理版の方も **HK** とかくことにする．

定義 1.44 (**HK** の論理公理と等号公理，推論規則)**.** $\mathcal{L}$ を言語とする．

HK の論理公理は以下の論理式を適当に $\forall\vec{x}$ で縛って文にしたもの（**全称閉包**という）．

Ax1〜Ax9　命題論理の論理公理

Q1　$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t)$（$t$ は $\varphi(x)$ の x に代入可能な $\mathcal{L}$-項）

Q2　$\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x)$（$t$ は $\varphi(x)$ の x に代入可能な $\mathcal{L}$-項）

Q3　x を自由変数に持たない φ について，$\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\, \psi)$

Q4　x を自由変数に持たない φ について，$\forall x\,(\psi \to \varphi) \to (\exists x\, \psi \to \varphi)$

HK の等号公理は以下の論理式の全称閉包.

E1　$x = x$

E2　$x = y \to y = x$

E3　$(x = y \wedge y = z) \to x = z$

E4　$\mathcal{L}$ の各 n 変数関数記号 f に対して

$$(x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

E5　$\mathcal{L}$ の各 n 変数関係記号 P に対して

$$(x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$$

HK の推論規則は以下の通り：

モーダス・ポネンス（MP）　φ と $\varphi \to \psi$ から ψ を導く．

一般化則（Gen）　φ から $\forall x\, \varphi$ を導く．

一般化則 Gen は，任意に選んだ要素（ここでは自由変数）について主張が示せたら，全ての要素について示せたことになる，という事実を表す．

命題論理の場合と同様に形式的証明の概念を定義する．

定義 1.45 (形式的証明)**.** T を $\mathcal{L}$-理論とする．$\mathcal{L}$-論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ が T における φ_k の形式的証明であるとは，各 $i \leq k$ について

1. φ_i が論理公理であるか
2. φ_i が等号公理であるか
3. $\varphi_i \in T$ であるか
4. ある $j, m < i$ について φ_i が φ_j と φ_m から MP で導出されるか
5. ある $j < i$ について φ_i が φ_j から $\textsc{Gen}$ で導出されるか

のいずれかであることをいう．このとき φ_k は T において**証明可能**であるといい，$T \vdash \varphi_k$ とかく．

$\emptyset \vdash \varphi$ を単に $\vdash \varphi$ とかく．

命題論理の場合と同様に次の定理が成立する．

定理 1.46 (演繹定理)**.** $\mathcal{L}$ を言語，T を $\mathcal{L}$-理論，φ と ψ を $\mathcal{L}$-文とすると，以下は同値：

1. $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

2. $T \vdash \varphi \to \psi$.

定理 1.47 (一階述語論理の完全性定理)**.** $\mathcal{L}$ を言語，T を $\mathcal{L}$-理論，φ を $\mathcal{L}$-文とすると，$T \models \varphi \iff T \vdash \varphi$.

演繹定理の証明は命題論理の場合とほとんど変わらないが，完全性定理の証明は困難さが増加する．完全性定理の系として，次の重要なコンパクト性定理が得られる．

系 1.48 (一階述語論理のコンパクト性定理)**.** $\mathcal{L}$ を言語，T を $\mathcal{L}$-理論とする．T の任意の有限部分理論がモデルをもつなら，T 自身もモデルをもつ．

証明. 対偶を示す．T がモデルをもたないとすると，任意の文 φ について $T \models \varphi \wedge \neg\varphi$ が成り立つ．完全性定理より $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ であり，T における $\varphi \wedge \neg\varphi$ の形式的証明がとれる．形式的証明は論理式の有限列なので，その中に含まれる T の要素全体の集合を T_0 とすればこれは T の有限部分理論であり，また $T_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ である．このとき T_0 はモデルをもたない． □

本節の最後に，言語に含まれない関数記号を加えることについて述べておく．以降，$\exists! y\, \varphi(y)$ を $\exists y\, (\varphi(y) \wedge \forall z(\varphi(z) \to y = z))$ の略記とする．

定理 1.49. $\mathcal{L}$ を言語，T を $\mathcal{L}$-理論，$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ を $\mathcal{L}$-論理式とする．

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

のとき，新たな n 変数関数記号 f を用意し，

- 言語 $\mathcal{L}(f) := \mathcal{L} \cup \{f\}$
- $\mathcal{L}(f)$-理論 $T(f) := T + \{\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))\}$

のように定めると，$T(f)$ は T の保存的拡大となる．すなわち，$T(f)$ と T は $\mathcal{L}$-論理式に関する証明能力が等しい．

どんな $\mathcal{L}(f)$-論理式も，$T(f)$ 上で同値な $\mathcal{L}$-論理式に取り換えられる．これらの観点から，$T(f)$ と T を同一視することがある．

2　不完全性定理（算術 3）

本節ではゲーデルが 1931 年に証明した第 1 不完全性定理と第 2 不完全性定理を紹介する．今回は特に断ることなく論理式や項といえば $\mathcal{L}_A$-論理式や $\mathcal{L}_A$-項を指すこととする．不完全性定理を丁寧に学習される場合は菊池 [38] または 新井 [35] を薦める．鹿島による [37] の第 I 部もコンパクトにまとまっていてよい．不完全性定理に関連する話題のサーベイは拙稿 [30] を挙げておく．洋書であれば，証明可能性論理の本ではあるが Boolos [6] における不完全性定理の証明も分かりやすい．一階算術と不完全性定理に関するより発展的な話題に関しては Hájek and Pudlák [10] および Lindström [18] を薦める．

本節はまずは原始再帰的関数を導入し，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において原始再帰的関数が Σ_1 論理式で強い意味で表現できることを示す．続いて算術化によって証明可能性述語を導入し，第 1 不完全性定理と Löb の定理の証明を行う．

2.1　原始再帰的関数

まず，$n > 0$ として

1. $s(x) = x + 1$ を後者関数という．
2. $z_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ を（n 変数）ゼロ関数という．
3. 各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対する $p_{n,i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ を射影関数という．

定義 2.1 (原始再帰的関数)**.** 自然数上の関数である**原始再帰的関数**を以下で定める．

1. 後者関数，ゼロ関数，射影関数はすべて原始再帰的関数である．
2. 原始再帰的関数の合成関数も原始再帰的関数である．すなわち，m 変数の原始再帰的関数 g と，n 変数の原始再帰的関数 $h_1, \ldots, h_m$ について，
$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$$
で定義される n 変数関数 f も原始再帰的関数である．
3. 原始再帰的関数を用いた再帰的定義で定められる関数も原始再帰的関数である．すなわち，n 変数の原始再帰的関数 g と $n+2$ 変数の原始再帰的関数 h について，
$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$
で定義される $n+1$ 変数関数 f も原始再帰的関数である．

原始再帰的関数の構成に関する帰納法で次が容易に示せる．

命題 2.2. 原始再帰的関数はすべて全域関数である．すなわち，n 変数の原始再帰的関数の定義域は ω^n である．

基本的ないくつかの関数が原始再帰的関数であることを確認できる．

例 2.3 (原始再帰的関数の例)**.**

1. $s(z_n(\vec{x})) = 1$ であり，$s(s(z_n(\vec{x}))) = 2$ なので，（n 変数）定数関数はすべて原始再帰的関数である．
2. 加法 $x + y$ は原始再帰的関数．実際，次の原始再帰で定められる 2 変数関数 f は加法と一致する：
$$\begin{cases} f(x, 0) = p_{1,1}(x) \\ f(x, y+1) = s(p_{3,3}(x, y, f(x, y))) \end{cases}$$
ここで述べた関数 f の再帰的定義は，定義 2.1 に則した形をしているが，記述を単純にするために射影関数をいくつか省略して，これを
$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + (y+1) = s(x + y) \end{cases}$$
のように書いたほうが分かりやすい．
3. 乗法 $x \times y$ は原始再帰的関数．
$$\begin{cases} x \times 0 = 0 \\ x \times (y+1) = x \times y + x \end{cases}$$
4. 前者関数 $pred(x) = x - 1$ は原始再帰的関数．
$$\begin{cases} pred(0) = 0 \\ pred(x+1) = x \end{cases}$$
ただし $pred$ は自然数上の関数なので $pred(0) = 0$ としている．
5. 減法 $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & x \geq y \text{ のとき} \\ 0 & x < y \text{ のとき} \end{cases}$ は原始再帰的関数．
$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} (y+1) = pred(x \dot{-} y) \end{cases}$$
6. 指数関数 x^y は原始再帰的関数．
$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{y+1} = x \times x^y \end{cases}$$
7. 階乗関数 $x!$ は原始再帰的関数．
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (y+1)! = (y+1) \times y! \end{cases}$$

定義 2.4 (特徴関数)**.** 自然数上の n 項関係 R に対して，次を満たす n 変数関数 χ_R を，R の**特徴関数**という：

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in R \text{ のとき} \\ 0 & \vec{x} \notin R \text{ のとき} \end{cases}$$

定義 2.5 (原始再帰的関係)**.** 自然数上の n 項関係 R が**原始再帰的**であるとは，その特徴関数 χ_R が原始再帰的であることをいう．

2.2 原始再帰的関数と原始再帰的関係の表現

続いて，原始再帰的関数や原始再帰的関係を算術において取り扱うために，表現可能性の概念を導入し，実際に原始再帰的関数や原始再帰的関係が $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現できることを確認する．

論理式 $\varphi(\vec{x})$ が $\Delta_1(T)$ であるとは，Σ_1 論理式 $\sigma(\vec{x})$ と Π_1 論理式 $\pi(\vec{x})$ が存在して，$T \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \sigma(\vec{x})$ かつ $T \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \pi(\vec{x})$ となることをいう．

各自然数 n を値に持つ項のうち，標準的な項である**数項** $\overline{n}$ を以下で定める：

- $\overline{0}$ は 0 のこととする．
- $\overline{n+1}$ は $\overline{n}+1$ のこととする．

定義 2.6 (表現可能性)**.**

- 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ が T 上で自然数上の k 変数関数 f を**表現する**とは，任意の $n_1, \ldots, n_{k-1}, m \in \omega$ について

  $$f(n_1, \ldots, n_k) = m \iff T \vdash \forall y \bigl(\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m}\bigr)$$

  が成り立つことをいう．
- 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ が T 上で自然数上の k 項関係 R を**表現する**とは, 任意の $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ について

  $$\begin{aligned} (n_1, \ldots, n_k) \in R &\Rightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \\ (n_1, \ldots, n_k) \notin R &\Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \end{aligned}$$

  が成り立つことをいう．

表現可能性を証明するには $\mathbf{I\Sigma}_1$ における，数の有限列のコード化が有用である．数の有限列のコード化にはいろいろな方法があるが，例えば素因数分解に基づくものを紹介する．

定義 2.7. $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ を自然数の有限列とするとき，

$$\langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \rangle := 2^{k_0+1} \times 3^{k_1+1} \times \cdots \times pr(n-1)^{k_{n-1}+1}$$

をその**コード**という．ただし $pr(x)$ は x 番目の素数を表すとする．n をこの有限列の**長さ**という．

ここでべきが k_i ではなく k_i+1 となっているのは，要素に 0 を含む有限列を処理するためである．全ての自然数が何らかの有限列のコードであるわけではないが，もし $m = 2^{k_0+1} \times 3^{k_1+1} \times \cdots \times pr(n-1)^{k_{n-1}+1}$ と書ける場合には，素因数分解の一意性から m は有限列 $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ のコードである．

例 2.8.

1. $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 = \langle 2, 1, 0, 1 \rangle$.
2. $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^2$ はどの有限列のコードでもない．

ここで述べたものは有限列のコード化の一例であるが，$\mathbf{I\Sigma}_1$ においてこうした有限列のコード化をうまく定式化し，実行することができる．例えば上述のコード化を $\mathbf{I\Sigma}_1$ において実行するには，あらかじめ $\mathbf{I\Sigma}_1$ において指数関数がうまく扱えることを示しておく必要がある．他にも中国剰余定理に基づく β 関数を用いる Gödel による方法もある．いずれにせよ，うまくやることで次の有限列のコード化定理が得られる．詳細は Boolos [6], Kaye [12], Hájek and Pudlák [10] などを参照されたい．

定理 2.9 ($\mathbf{I\Sigma}_1$ における有限列のコード化)**.** それぞれ「x は有限列のコード」「y は有限列 x の長さ」「z は有限列 x の y 番目の要素」「z は有限列 x の後に有限列 y をつなげて得られる有限列」を意図する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式 $\mathrm{Seq}(x)$, $\mathrm{Length}(x, y)$, $\mathrm{Memb}(x, y, z)$, $\mathrm{Concate}(x, y, z)$ が存在して，次が成立する：

- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \exists! y \, \mathrm{Length}(x, y)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! z \, \mathrm{Memb}(x, y, z)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! z \, \mathrm{Concate}(x, y, z)$.

よって $\mathbf{I\Sigma}_1$ においては $\mathrm{Length}(x, y)$, $\mathrm{Memb}(x, y, z)$, $\mathrm{Concate}(x, y, z)$ それぞれによって定義される関数に対応する関数記号 $l(x)$, $(x)_y$, $x \frown y$ を使用でき，更に次が成立する：

- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x(\mathrm{Seq}(x) \to l(x) \leq x)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \forall y(\mathrm{Seq}(x) \land y < l(x) \to (x)_y < x)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \exists x(\mathrm{Seq}(x) \land l(x) = 0)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \exists y(\mathrm{Seq}(x) \land l(x) = 1 \land (x)_0 = y)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \forall y \Big(\mathrm{Seq}(x) \land \mathrm{Seq}(y) \to \mathrm{Seq}(x \frown y) \land l(x \frown y) = l(x) + l(y)$
  $\land \forall z < l(x)((x \frown y)_z = (x)_z) \land \forall w < l(y)((x \frown y)_{w+l(x)} = (y)_w) \Big)$.
- $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall x \forall y(\mathrm{Seq}(x) \land \mathrm{Seq}(y) \land l(x) = l(y) \land \forall w < l(x)((x)_w = (y)_w) \to x = y)$.

定理 2.10.

1. 任意の k 変数原始再帰的関数 f に対して，$\mathbb{N}$ において f を定義し，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において f を表現する Σ_1 論理式 $\sigma_f(x_1, \ldots, x_k, y)$ があって，$\mathbf{I\Sigma} \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k \exists! y \, \sigma_f(x_1, \ldots, x_k, y)$ を満たす．

2. 任意の原始再帰的関係は，$\mathbb{N}$ において関係を定義する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式で $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現可能.

証明. 1. 原始再帰的関数 f の構成に関する帰納法で証明する.

- f が後者関数 $s(x)$ のとき，論理式 $y = x + 1$ が条件を満たす.
- f がゼロ関数 $z_n(x_1, \ldots, x_n)$ のとき，論理式 $y = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} x_j = x_j$ が条件を満たす.
- f が射影関数 $p_{i,n}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ のとき，論理式 $y = x_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} x_j = x_j$ が条件を満たす.
- $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$ のとき，帰納法の仮定よりそれぞれの関数に対応する Σ_1 論理式 $\sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_m}, \sigma_g$ がとれ，$\sigma_f(\vec{x}, y)$ を
$$\exists y_1 \cdots \exists y_m \left(\sigma_{h_1}(\vec{x}, y_1) \wedge \cdots \wedge \sigma_{h_m}(\vec{x}, y_m) \wedge \sigma_g(y_1, \ldots, y_m, y)\right)$$
と定めれば条件を満たす.
- $$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$
のとき，帰納法の仮定よりそれぞれの関数に対応する Σ_1 論理式 σ_g と σ_h がとれ，$\sigma_f(\vec{x}, y, z)$ を
$$\exists w \left(\mathrm{Seq}(w) \wedge l(w) - 1 = y \wedge \sigma_g(\vec{x}, (w)_0) \wedge (w)_y = z \wedge \forall u < y \, \sigma_h(\vec{x}, u, (w)_u, (w)_{u+1})\right)$$
と同値な Σ_1 論理式とする（ここで $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathbf{B}\Sigma_1$ を用いる）と，条件を満たす.

2. R を任意の k 項原始再帰的関係とすると，その特徴関数 $\chi_R(\vec{x})$ は原始再帰的関数なので，1 の条件を満たす Σ_1 論理式 $\sigma_\chi(\vec{x}, y)$ がとれる．このとき R は Σ_1 論理式 $\sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 1)$ で $\mathbb{N}$ において定義され，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現される．更に $\sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 1)$ は Π_1 論理式 $\neg\sigma_{\chi_R}(\vec{x}, 0)$ と $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で同値なので，$\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式である. □

注意 2.11. 定理 2.10 より，$\mathbf{I\Sigma}_1$ は全ての原始再帰的関数に対応する関数記号を有しているとしてもよい.

2.3 算術化と証明可能性述語

論理式は記号の有限列であり，形式的証明は論理式の有限列である．したがって，述語論理に関する基本的な記号に自然数を割り当てれば，自然数の有限列のコード化を用いて，形式的証明などの概念を自然数でコードできる．これらの自然数（**ゲーデル数**）を介して論理式や証明などの対象を形式的算術において取り扱う手法を**算術化**という.

まずは次のように各記号 s に自然数 $\ulcorner s \urcorner$ を次の表に従って割り当てる.

項や論理式はこれらの記号を用いて再帰的に定義されていたので，その定義に基づいて表を参照しながら項と論理式に対して再帰的に固有の自然数を割り当てていく．ペアリング関数 $\langle x, y \rangle = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ を用意しておく.

0	1	$+$	$\times$	$<$	$=$	$\neg$	$\land$	$\lor$	$\to$	$\exists$	$\forall$	v_n
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$25+2n$

表 1　各記号への自然数の割り当て

- $\ulcorner t+u \urcorner = 2\times\langle 5, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner t\times u \urcorner = 2\times\langle 7, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner t< u \urcorner = 2\times\langle 9, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner t= u \urcorner = 2\times\langle 11, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner \neg\varphi \urcorner = 2\times\langle 13, \ulcorner \varphi \urcorner\rangle$
- $\ulcorner \varphi\land\psi \urcorner = 2\times\langle 15, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner \varphi\lor\psi \urcorner = 2\times\langle 17, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner \varphi\to\psi \urcorner = 2\times\langle 19, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner \exists x\varphi \urcorner = 2\times\langle 21, \langle \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle\rangle$
- $\ulcorner \forall x\varphi \urcorner = 2\times\langle 23, \langle \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle\rangle$

ゲーデル数を通じて，記号や記号列について自然数論の言葉で言及することができる．

例 2.12.

1. $\mathsf{Var}(x)$ を Δ_0 論理式 $\exists y\le x(x=\overline{25}+\overline{2}\times y)$ とすれば，これは「x は変数のゲーデル数」という関係を $\mathbb{N}$ において定義し，更に $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する論理式である．
2. 数項 $\overline{n}$ は
   - $\overline{0}=0$,
   - $\overline{n+1}=\overline{n}+1$

   として再帰的に定義されていた．数項のゲーデル数もまた
   - $\ulcorner\overline{0}\urcorner=\ulcorner 0\urcorner=1$,
   - $\ulcorner\overline{n+1}\urcorner=\ulcorner\overline{n}+1\urcorner=2\times\langle 5,\langle\ulcorner\overline{n}\urcorner,\ulcorner 1\urcorner\rangle\rangle=2\times\langle 5,\langle\ulcorner\overline{n}\urcorner,3\rangle\rangle$

   として再帰的に計算でき，実際に n の数項のゲーデル数「$\overline{n}$」を計算する原始再帰的関数 $N(x)$ がとれる．したがって $\mathbf{I\Sigma}_1$ は対応する関数記号 $N(x)$ を持っているとしてよい．更に $\exists x\le y(N(x)=y)$ は関係「y は数項のゲーデル数」を $\mathbb{N}$ において定義し，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式.
3. 同様に「x は項のゲーデル数」「x は論理式のゲーデル数」「x は文のゲーデル数」「x は論理公理のゲーデル数」「x は等号公理のゲーデル数」といった関係を $\mathbb{N}$ において定義し，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式を適切に定めることができる（それぞれ $\mathsf{Term}(x)$, $\mathsf{Fml}(x)$, $\mathsf{Sent}(x)$, $\mathsf{LogAx}(x)$, $\mathsf{EqAx}(x)$ とかく）.
4. 「z は論理式 x と y から MP で導出される」という $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式 $\mathsf{MP}(x,y,z)$ は，$x=\ulcorner\varphi\urcorner, z=\ulcorner\psi\urcorner$ のときに $y=\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner$ となることであるから，

$$y=\overline{2}\times\langle\overline{19},\langle x,z\rangle\rangle$$

と定めればよい．

5.「y は論理式 x から $\textsc{Gen}$ で導出される」という $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式 $\mathsf{Gen}(x,y)$ も同様に定めることができる．

続いて，理論 T における形式的証明をコード化するが，その際に T とそのゲーデル数全体の集合

$$\{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N} \mid \varphi \in T\}$$

を同一視する．理論 T が原始再帰的であるとは，つまり，上記の集合が原始再帰的である，として定める．このとき定理 2.10 より $\mathbb{N}$ の部分集合としての T を $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式 $\tau(x)$ がとれる．

$$y \text{ は論理式 } x \text{ の } T \text{ における形式的証明のコード}$$

という 2 項関係を $\mathbb{N}$ において定義し，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式 $\mathrm{Prf}_T(x,y)$ を次で定める：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Seq}(y) \land x = (y)_{l(y)-1} \\
&\quad \land \forall z < l(y)\Big(\mathsf{LogAx}((y)_z) \lor \mathsf{EqAx}((y)_z) \lor \tau((y)_z) \\
&\qquad \lor \big(z \neq 0 \land \exists w_0, w_1 < z\big(\mathsf{MP}((y)_{w_0}, (y)_{w_1}, (y)_z) \lor \mathsf{Gen}((y)_{w_0}, (y)_z)\big)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Σ_1 論理式 $\exists y\,\mathrm{Prf}_T(x,y)$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ とかき，これを T の**証明可能性述語**という．証明可能性述語に対して次が成立する．

定理 2.13.

1. $\mathrm{Pr}_T(x)$ は $\mathbb{N}$ において T の定理全体の集合を定義する．

2. 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi$ ならば $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

証明． 1. $\mathrm{Prf}_T(x,y)$ は関係「y は論理式 x の T における形式的証明のコード」を $\mathbb{N}$ において定義するので，任意の論理式 φ について

$$\begin{aligned}
T \vdash \varphi &\iff T \text{ における } \varphi \text{ の形式的証明のコード } p \text{ が存在} \\
&\iff \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \mathrm{Prf}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p}) \\
&\iff \mathbb{N} \models \exists y\,\mathrm{Prf}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, y) \\
&\iff \mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}).
\end{aligned}$$

2. $T \vdash \varphi$ とすると，T における φ の形式的証明が存在する．そのコードを p とすれば，$\mathrm{Prf}_T(x,y)$ は関係「y は論理式 x の T における形式的証明のコード」を $\mathbf{I\Sigma}$ において表現するので，$\mathbf{I\Sigma} \vdash \mathrm{Prf}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$ となる．したがって $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ である． □

$\ulcorner\varphi\urcorner$ は自然数で $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ はその数項であるが，記述を簡潔にするために以降は $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ を $\ulcorner\varphi\urcorner$ で表すことにする．

2.4　第 1 不完全性定理

第 1 不完全性定理を証明する．

定理 2.14 (不動点定理)**.** $\varphi(v_0)$ を v_0 のみを自由変数にもつ任意の論理式とすると，ある文 ψ が存在して，

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

が成り立つ．更に，φ が Σ_{n+1} なら ψ も Σ_{n+1} でとれ，φ が Π_{n+1} なら ψ も Π_{n+1} でとれる．

証明*.* 原始再帰的関数 $d(x)$ を，n がある 1 変数 $\mathcal{L}_A$-論理式 $\delta(x)$ のゲーデル数のときに $d(n)$ は文 $\delta(\overline{n})$ のゲーデル数とし，それ以外のときに $d(n) = 0$ として定める．定理 2.10 より $\mathbf{I\Sigma}_1$ は d を関数記号として持っているとしてよい．1 変数論理式 $\varphi(d(x))$ のゲーデル数を k をすると，$d(k) = \ulcorner \varphi(d(\overline{k})) \urcorner$ となる．このとき

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \varphi(d(\overline{k})) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \varphi(d(\overline{k})) \urcorner)$$

であり，$\varphi(d(\overline{k}))$ が求める文である．

ψ の適切な複雑さを評価する際には $d(x)$ を $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現する Σ_1 論理式を用いてうまく書き換えればよい． □

用語を 2 つ用意する．

定義 2.15 (理論の完全性，不完全性)**.** 理論 T が**完全**であるとは，任意の文 φ について，$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ となることをいう．そうではないとき，T は**不完全**であるという．

定義 2.16 (理論の Σ_n-健全性)**.** 理論 T が Σ_n**-健全**であるとは，任意の Σ_n 文 φ について，$T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$ となることをいう．

注意 2.17. これらは理論の完全性と（$\mathbb{N}$ に対する）健全性であり，論理の完全性定理の近辺で解説した論理の完全性や健全性とは異なる概念なので注意が必要である．

もし T が Σ_n-健全とすると，Σ_n 文 $0 = 1$ について $\mathbb{N} \not\models 0 = 1$ なので $T \nvdash 0 = 1$ であり，T は無矛盾となる．したがって，Σ_n-健全性は無矛盾性より強い条件である．

それでは，第 1 不完全性定理を証明しよう．

定理 2.18 (第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931 [9]))**.** 理論 T が

1. $\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$
2. 原始再帰的
3. Σ_1-健全

の *3* 条件を満たすとすると，T は不完全である．すなわち $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるような文 φ が存在する．

証明. 2 より T は原始再帰的だから，その証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を Σ_1 論理式でとれる．不動点定理より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるような Π_1 文 φ が存在する．このような文 φ を T の**ゲーデル文**という．$T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となることを示そう．

- $T \vdash \varphi$ と仮定すると，定理 2.13 より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．φ の取り方より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \neg\varphi$ である．$\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$ なので $T \vdash \neg\varphi$ であり，T の無矛盾性に反する．したがって $T \nvdash \varphi$ である．
- $T \vdash \neg\varphi$ と仮定すると，不動点の取り方より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．T は Σ_1-健全なので $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である．定理 2.13 より $T \vdash \varphi$ であり，T の無矛盾性に反する．したがって $T \nvdash \neg\varphi$ である． □

第一不完全性定理が成立する理論の条件はどの程度弱められるだろうか．まず，$\mathbf{PA}^-$ の Σ_1-完全性を上手く用いることで $\mathbf{PA}^-$ に対する表現可能性定理が証明でき，第一不完全性定理の証明を $\mathbf{PA}^-$ の拡大理論に対しても実行できる（定理 2.10 の $\mathbf{I\Sigma}_1$ を $\mathbf{PA}^-$ に弱めることはできない）．弱い算術の理論に対する第 1 不完全性定理については第 2 回ロジックウィンタースクールにおいて取り扱っており，その講義資料 [32] に詳しく述べてある．

定理 2.19 ($\mathbf{PA}^-$ の Σ_1-完全性)**.** *φ が Σ_1 文で $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $\mathbf{PA}^- \vdash \varphi$.*

定理 2.20 (表現可能性定理)**.**

1. 任意の再帰的関数 f は $\mathbf{PA}^-$ において $\mathbb{N}$ において f を定義する Σ_1 論理式で表現可能.
2. 任意の再帰的関係 R は $\mathbf{PA}^-$ において $\mathbb{N}$ において R を定義する Σ_1 論理式で表現可能.

T が Σ_1-健全であるという条件は Rosser [23] による手法を用いて無矛盾性に弱められる．更に，原始再帰的という条件も Craig [7] による手法を用いて c.e. (Σ_1-定義可能）に弱められる．以上から，次が成り立つ．

定理 2.21 (第 1 不完全性定理の洗練化)**.** 理論 T が $\mathbf{PA}^- \subseteq T$, Σ_1-定義可能, 無矛盾の *3* 条件を満たすとすると，T は不完全である．

一方，Σ_1-定義可能という条件は Δ_2-定義可能に弱めることはできない．これは例えば $\mathbf{PA}^-$ に対する完全性定理の証明で作られる無矛盾かつ完全な理論が Δ_2-定義可能なものでとれることによる．

定理 2.22. $\mathbf{PA}^- \subseteq T$, Δ_2-定義可能, 無矛盾の *3* 条件を満たす理論 T で，完全なものが存在する．

一方，無矛盾性の仮定を強くすると，理論の複雑さを上げても不完全になる．

定理 2.23 (Kikuchi and Kurahashi, 2017 [13]; Salehi and Seraji, 2017 [25])**.** 理論 T が $\mathbf{PA}^- \subseteq T$, Σ_{n+1}-定義可能, Σ_n-健全の *3* 条件を満たすとすると，T は不完全である．

原始再帰的関係，再帰的関係，c.e. 関係の算術的階層における立ち位置は次の通り（再帰的，c.e. などの用語については計算論の教科書等を確認してみてください）.

PR, REC, CE はそれぞれ原始再帰的 (primitive recursive), 再帰的 (recursive), c.e. (computably

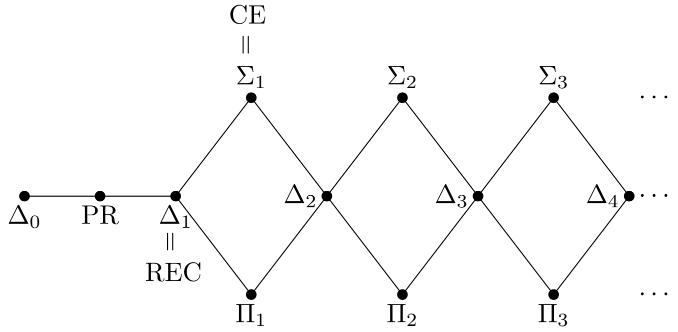

図 1　$\mathbb{N}$ 上の関係の算術的階層

enumerable）を表す[*1]

2.5　第 2 不完全性定理

第 2 不完全性定理は無矛盾性を表す文の証明不可能性に関する定理であるが，より一般に健全性を表す証明不可能性に関する Löb の定理の証明を目標とする．第 2 不完全性定理および Löb の定理は理論の証明可能性に関する定理でもあり，更には証明可能性述語に関する定理でもある．したがって，その証明のためには証明可能性述語に関するより細かな分析が必要となる．

n から n の数項のゲーデル数 $\ulcorner \overline{n} \urcorner$ を計算する原始再帰的関数およびそれに対応する関数記号を $N(x)$ とかいた．例えば項 $v_0 + 1$ は v_0 を自由変数として持つが，そのゲーデル数 $\ulcorner v_0 + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle 25, 3 \rangle \rangle$ は自然数であり，自由変数 v_0 をもたない．ここで $v_0 + 1$ の v_0 に $\overline{n}$ を代入した $\overline{n} + 1$ のゲーデル数は $\ulcorner \overline{n} + 1 \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner \overline{n} \urcorner, 3 \rangle \rangle = 2 \times \langle 5, \langle N(n), 3 \rangle \rangle$ と書ける．したがって $\ulcorner \dot{v}_0 + 1 \urcorner := 2 \times \langle 5, \langle N(v_0), 3 \rangle \rangle$ と定めれば v_0 を自由変数に持ち，更にこの v_0 に値 n を持つ閉項 t を代入すれば，$N(t) = \ulcorner \overline{n} \urcorner$ なので $\ulcorner \dot{v}_0 + 1 \urcorner(t) = \ulcorner \overline{n} + 1 \urcorner$ が成り立つ．このような自由変数を持つゲーデル数を以下で再帰的に定める：

- $\ulcorner 0 \urcorner = 1$
- $\ulcorner 1 \urcorner = 3$
- $\ulcorner \dot{v}_n \urcorner = N(v_n)$
- $\ulcorner t(\dot{\vec{x}}) + u(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner t(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner u(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\dot{\vec{x}}) \times u(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 7, \langle \ulcorner t(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner u(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\dot{\vec{x}}) < u(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 9, \langle \ulcorner t(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner u(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t(\dot{\vec{x}}) = u(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 11, \langle \ulcorner t(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner u(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \neg \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 13, \ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \wedge \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner = 2 \times \langle 15, \langle \ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$

[*1] 図における Δ_1 は $\mathbb{N}$ において Σ_1-定義可能かつ Π_1-定義可能，ということであり，実は $\mathbf{I\Sigma}_1$ において表現されることと同等である．しかし，$\mathbf{I\Sigma}_1$ において $\Delta_1(\mathbf{I\Sigma}_1)$ 論理式で表現されることとは異なるので，注意が必要である．

- $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \lor \psi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 17, \langle \ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 19, \langle \ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner, \ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \exists y\, \varphi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 21, \langle \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi'(\dot{\vec{x}}, y) \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \forall y\, \varphi(\vec{x}) \urcorner = 2 \times \langle 23, \langle \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi'(\dot{\vec{x}}, y) \urcorner \rangle \rangle$

ここで最後の二項目の $\ulcorner \varphi'(\dot{\vec{x}}, y) \urcorner$ は $\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}, \dot{y}) \urcorner$ の中の $N(y)$ を全て $\overline{\ulcorner y \urcorner}$ で置き換えたもの．このとき，次が成立する．

定理 2.24 (導出可能性条件 (Löb, 1955 [19]; Feferman, 1960 [8]))**.** T を $\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$ かつ原始再帰的とする．

1. 任意の論理式 $\varphi(\vec{x})$ について，$T \vdash \varphi(\vec{x})$ ならば $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.
2. 任意の論理式 $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$ について

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \to \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner).$$

3.（形式化された Σ_1-完全性）任意の Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \varphi(\vec{x}) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.

証明. 以降，単純化のために $\vec{x}$ が x の場合のみを示す．

1. $T \vdash \varphi(x)$ とすると，Gen より $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$ である．各 k に対して $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(\overline{k})$ は論理公理なので MP より $T \vdash \varphi(\overline{k})$ であるが，更に T における $\varphi(\overline{k})$ の証明のコードを計算する原始再帰的関数 e がとれる．すなわち $\mathbf{I\Sigma} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, e(x))$ なので $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ である．

2. $\varphi(\overline{k}) \to \psi(\overline{k})$ の証明 p と $\varphi(\overline{k})$ の証明 q が与えられたら，$p \frown q \frown \langle \ulcorner \psi(\overline{k}) \urcorner \rangle$ が $\psi(\overline{k})$ の証明となることが $p \frown q \frown \langle \ulcorner \psi(\overline{k}) \urcorner \rangle$ の長さに関する帰納法で確かめられる．これを算術化した主張は $\mathbf{I\Sigma}_1$ においても Σ_1 帰納法公理を用いて確かめられる．すなわち

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner, y) \land \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, z) \to \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner, y \frown z \frown \langle \ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner \rangle)$$

が得られる．

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner, y) \land \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner, z) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$$

とすれば y, z は $\to$ の右辺に現れないので

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$$

が成立する．

3. Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ の構成に関する帰納法で，項目 1 と 2 をフル活用しながら示す． □

二番目の項目は，$\mathrm{Pr}_T(x)$ に関してモーダス・ポネンスが成立することが $\mathbf{I\Sigma}_1$ で証明できる，という条件である．一番目と二番目の項目を合わせると次が直ちに得られる．

系 2.25. 任意の論理式 $\varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})$ について，$T \vdash \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})$ ならば $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.

それでは Löb の定理を証明する．

定理 2.26 (Löb の定理 (Löb, 1955 [19]))**.** *T を $\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$, 原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たす理論とし，φ を文とすると，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.*

証明. 条件を満たす T について，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ を仮定する．いま論理式 $\mathrm{Pr}_T(x) \to \varphi$ に対して不動点定理を適用することで

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \psi \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi)$$

を満たす文 ψ がとれる．系 2.25 より

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi \urcorner)$$

であり，定理 2.24 より

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)\big)$$

となる．ここで $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ は Σ_1 文なので形式化された Σ_1-完全性より $\mathbf{I\Sigma} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$ だから，$\mathbf{I\Sigma} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が成り立つ．仮定と合わせると $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi$ となるが，これは不動点定理の取り方より $T \vdash \psi$ を導く．よって定理 2.13 より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ であり，$T \vdash \varphi$ が得られる． □

Löb の定理において扱った $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ という文は，「T において証明できるなら正しい」という（$\mathbb{N}$ に関する）健全性の形式化だと思える．理論 T の無矛盾性は $T \nvdash 0 = 1$ という条件と同値なので，T の無矛盾性を形式化は Π_1 文 $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ としてとれる．この文を $\mathrm{Con}(T)$ と書くことにする（consistency of T)．第 2 不完全性定理は理論 T の無矛盾性を証明することに関する，ある種の限界を示す定理である．

定理 2.27 (第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931 [9]))**.** *T を $\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$, 原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たす理論とすると，$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である．*

証明. 条件を満たす T について，$T \vdash \mathrm{Con}(T)$ と仮定すれば，$T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ すなわち $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to 0 = 1$ である．Löb の定理より $T \vdash 0 = 1$ なので T の無矛盾性に反する．したがって $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である． □

第 2 不完全性定理は文や理論の証明不可能性の分析に使える．

例 2.28.

1. $n \geq 1$ について $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \mathrm{Con}(\mathbf{I\Sigma}_n)$ なので，$n \leq 1$ については第 2 不完全性定理より $\mathbf{I\Sigma}_n \nvdash \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$.
2. $\mathbf{ZFC}$+“強到達不能基数が存在” $\vdash \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$ なので，$\mathbf{ZFC}$ が無矛盾ならば $\mathbf{ZFC}$ は強到達不能基数の存在を証明できない．

モデルについても次のことが分かる．

系 2.29. T を $\mathbf{I\Sigma}_1 \subseteq T$, 原始再帰的，無矛盾の *3* 条件を満たす理論とすると，$T + \neg\mathrm{Con}(T)$ のモデルが存在する．

証明. 第 2 不完全性定理より $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ なので，一階述語論理の完全性定理より，T のモデルが全て $\mathrm{Con}(T)$ を満たすわけではない．つまり $T + \neg\mathrm{Con}(T)$ のモデルが存在する． □

第 2 不完全性定理に関しては多くの議論が行われており，興味のある方はサーベイ論文 [30] や導出可能性条件に関する論文 [16] なども見てほしい．また，導出可能性条件を様相論理を用いて分析する「証明可能性論理」も盛んに研究されている．教科書 [6, 27, 29] やサーベイ [1, 11, 31] を参照されたい．

3　反映原理（算術 4）

以降，S, T は原始再帰的かつ無矛盾な理論とし，特に T は $\mathbf{I\Sigma}_1$ を含むとする．Löb の定理より $T \nvdash \varphi$ となる文 φ については $T \nvdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ である．この $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ は「φ が証明できるなら正しい」という，T の $\mathbb{N}$ に関する健全性の形式化である．本節では，$\mathbb{N}$ に関する健全性の形式化である一様反映原理について，Kreisel and Lévy の定理を紹介することを目標とする．

まず初めに一様反映原理のいくつかの基本的な性質について紹介する．続いて Kreisel and Lévy の定理の証明のために，一階述語論理のシークエント計算の体系である **LK** を導入し，そのカット除去定理を示す．そして Kreisel and Lévy の定理をその階層化である Leivant–Ono の定理を示す．最後にこうした分析の系として **PA** の本質的な反映性と有限公理化不可能性を示す．

定義 3.1 (一様反映原理)**.** $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 0\}$ とする．

1. $\mathrm{RFN}_\Gamma(S) := \{\forall x(\mathrm{Pr}_S(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)) \mid \varphi(x)$ は Γ 論理式 $\}$ を S の Γ **一様反映原理**という．
2. $\mathrm{RFN}(S) := \bigcup_{n \in \omega} \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(S)$ を S の一様反映原理という．

注意 3.2. パラメータを用いない Γ 局所反映原理 $\mathrm{Rfn}_\Gamma(S) := \{\mathrm{Pr}_S(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \mid \varphi$ は Γ 文 $\}$ も面白い性質を持っており，分析されている．局所反映原理および一様反映原理について詳しくは Smoryński [26] や Beklemishev [5]，もしくは Lindtström による教科書 [18] を参照されたい．また，超準的な証明可能性述語に基づいて定められる局所反映原理に関するサーベイである小暮との共著 [34] も挙げておく（現時点では投稿中だが）．

3.1　一様反映原理の性質

ここでは一様反映原理に関するいくつかの基本的な性質を紹介する．

まずは次の命題を確認してみる．

命題 3.3. 命題 T は無矛盾 $\iff$ T は Π_1-健全.

証明. ($\Leftarrow$): $0 = 1$ は $\mathbb{N}$ で正しくない Π_1 文なので Π_1-健全性より $T \nvdash 0 = 1$ だから T は無矛盾.

($\Rightarrow$): φ を Π_1 文で $T \vdash \varphi$ とする．もし $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ なら Σ_1-完全性より $T \vdash \neg\varphi$ となり T に無矛盾性に反する．よって $\mathbb{N} \models \varphi$. □

この命題の証明を導出可能性条件を用いて $\mathbf{I\Sigma}_1$ において実行することで次が得られる．

命題 3.4. $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で $\mathrm{Con}(T)$ と $\mathrm{RFN}_{\Pi_1}(T)$ は同値.

証明. ($\leftarrow$): $0 = 1$ は Π_1 文なので $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Pi_1}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to 0 = 1$ だから $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Pi_1}(T) \vdash \mathrm{Con}(T)$ である．

$(\rightarrow)$: $\varphi(x)$ を任意の Π_1 論理式とする．$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \neg\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow 0 = 1)$ なので，導出可能性条件より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner) \rightarrow (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1\urcorner))$ を得る．$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner) \rightarrow (\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner))$ なので $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)$ となる．ここで形式化された Σ_1-完全性より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \neg\varphi(x) \rightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner)$ だから，$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{Con}(T) \vdash \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)$．つまり $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{Con}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \rightarrow \varphi(x)$. □

続いて次の命題を確認してみる．

命題 3.5. $n \geq 0$ について，T は Σ_n-健全 $\iff$ T は Π_{n+1}-健全.

証明. $(\Leftarrow)$: 明らか.
$(\Rightarrow)$: $\forall\vec{x}\,\varphi(\vec{x})$ を Π_{n+1} 文（$\varphi(\vec{x})$ は Σ_n 論理式）で $T \vdash \forall\vec{x}\,\varphi(\vec{x})$ とする．$\vec{k} \in \omega^m$ を任意にとると $T \vdash \varphi(\vec{\bar{k}})$ であり，Σ_n-健全性より $\mathbb{N} \models \varphi(\vec{\bar{k}})$ となる．$\vec{k}$ は任意なので $\mathbb{N} \models \forall\vec{x}\,\varphi(\vec{x})$. □

再び，この同値性は $\mathbf{I\Sigma}_1$ において証明できる．

命題 3.6. $n \geq 0$ について $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で $\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ と $\mathrm{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ は互いに同値.

証明. $\Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}$ なので $T + \mathrm{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ は明らか．$\forall\vec{y}\,\varphi(x, \vec{y})$ を任意の Π_{n+1} 論理式で，$\varphi(x, \vec{y})$ は Σ_n とする．$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \forall\vec{y}\,\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x, \vec{y})$ だから系 2.25 より

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\forall\vec{y}\,\varphi(\dot{x}, \vec{y})\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi(\dot{x}, \dot{\vec{y}})\urcorner)$$

なので

$$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\forall\vec{y}\,\varphi(\dot{x}, \vec{y})\urcorner) \rightarrow \varphi(x, \vec{y}).$$

$\vec{y}$ は $\rightarrow$ の左辺に自由に現れないので $\textsc{Gen}$ と論理公理 Q3 より

$$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\forall\vec{y}\,\varphi(\dot{x}, \vec{y})\urcorner) \rightarrow \forall\vec{y}\,\varphi(x, \vec{y}).$$ □

注意 3.7. 証明において Π_{n+1} 文を Σ_n 論理式に書き換える際に量化記号をいじった．この形式化は局所反映原理ではできず，実際 $n \geq 1$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_n}(\mathbf{I\Sigma}_1) \nvdash \mathrm{Rfn}_{\Pi_n}(\mathbf{I\Sigma}_1)$ が知られている．

述語論理に関する一様反映原理を $\mathrm{RFN}_{\Gamma}(\mathbf{PC})$ と書くことにする．

命題 3.8. $n \geq 1$ について $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で $\mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{PC})$ と $\mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_1)$ は同値.

証明. $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{HK}}(x) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(x)$ なので $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_1) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{PC})$ は明らか．他方，$\mathbf{I\Sigma}_1$ は一個の Π_3 文で公理化できることが知られており（Hájek and Pudlák [10] を参照），任意の Σ_{n+2} 論理式 $\varphi(x)$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 \rightarrow \varphi(x)$ は Σ_{n+2} 論理式であることから，形式化された演繹定理より

$$\begin{aligned}\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{PC}) \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) &\rightarrow \mathrm{Pr}_{\emptyset}(\ulcorner\mathbf{I\Sigma}_1 \rightarrow \varphi(\dot{x})\urcorner) \\ &\rightarrow (\mathbf{I\Sigma}_1 \rightarrow \varphi(x)) \\ &\rightarrow \varphi(x).\end{aligned}$$ □

定理 3.9 (Kaye [12] や Hájek and Pudlák [10] を参照)**.** 各 $n \geq 1$ について，Σ_n 論理式 $\mathrm{True}_{\Sigma_n}(x)$ が存在して，任意の Σ_n 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \mathrm{True}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi(\vec{\dot{x}}) \urcorner)$ が成り立つ.

命題 3.10. 各 $n \geq 1$ について，$\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ は $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で Π_{n+1} 文

$$\forall x(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{True}_{\Sigma_n}(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{True}_{\Sigma_n}(x)).$$

と同値.

証明. $\mathrm{True}_{\Sigma_n}(x)$ は Σ_n 論理式なので，この文は $\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ の要素.

他方，任意の Σ_n 論理式 $\varphi(x)$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \mathrm{True}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ なので系 2.25 より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{True}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \urcorner)$ となるため，$\mathbf{I\Sigma}_1$ にこの文を加えれば $\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ が導ける. □

一様反映原理に関しては図 2 のような階層が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{RFN}(T) & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(T) & \Longrightarrow & \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(T) & \Longrightarrow & \mathrm{RFN}_{\Sigma_0}(T) \\
 & & & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 & & & & \mathrm{RFN}_{\Pi_3}(T) & & \mathrm{RFN}_{\Pi_2}(T) & & \mathrm{Con}(T)
\end{array}$$

図 2　一様反映原理の階層

この階層は n が大きくなるごとに強さが真に大きくなる.

命題 3.11. $n \geq 0$ について

$$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)).$$

証明. $\varphi(x)$ を任意の Σ_{n+1} 論理式とする．命題 3.10 と命題 3.4 より $\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ は一個の Π_{n+1} 文として扱えるので，形式化された演繹定理より

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_{T+\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \to \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

$\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \to \varphi(x)$ は Σ_{n+1} 論理式なので

$$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \mathrm{Pr}_{T+\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to (\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \to \varphi(x))$$

つまり

$$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \mathrm{Pr}_{T+\mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x).$$

以上より $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T))$ が示せた. □

系 3.12. 任意の $n \geq 0$ について，$T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ が無矛盾なら $T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \nvdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$.

証明. もし $T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ だとすると，命題 3.11 より $T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T))$．特に命題 3.4 より $T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T) \vdash \mathrm{Con}(T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T))$ だから，第 2 不完全性定理より $T + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ は矛盾する. □

3.2 LK のカット除去定理

話が大きく変わるが，Kreisel and Lévy の定理の証明のために，ここでは一階述語論理のシークエント計算の証明体系である **LK** を導入する．**LK** では論理式そのものではなく，シークエントと呼ばれる表現を用いて導出を行う．より詳しくは松本 [36] や Ono [22] などを参照されたい．

定義 3.13 (シークエント)**.** 論理式の有限集合 Γ, Δ について，$\Gamma \Longrightarrow \Delta$ を**シークエント**という．

シークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ は論理式 $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ を意図している．シークエント $\Gamma \cup \Pi \Longrightarrow \Delta \cup \Lambda$ や $\Gamma \cup \{\varphi\} \Longrightarrow \Delta \cup \{\psi\}$ などをそれぞれ $\Gamma, \Pi \Longrightarrow \Delta, \Lambda$ や $\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta, \psi$ のように表すとする．

言語を $\mathcal{L}_A$ に制限して，次のようにシークエント計算の体系 **LK** を導入する．

定義 3.14 (一階述語論理のシークエント計算 **LK**)**.**

始シークエント　t, u, s などを $\mathcal{L}_A$-項とし，φ を原子論理式とするとき

- $\varphi \Longrightarrow \varphi$
- $\Longrightarrow t = t$
- $t = u \Longrightarrow u = t$
- $t = u, u = s \Longrightarrow t = s$
- $t_1 = u_1, t_2 = u_2 \Longrightarrow t_1 + t_2 = u_1 + u_2$
- $t_1 = u_1, t_2 = u_2 \Longrightarrow t_1 \times t_2 = u_1 \times u_2$
- $t_1 = u_1, t_2 = u_2, t_1 < t_2 \Longrightarrow u_1 < u_2$

論理規則

$$\frac{\Gamma, \varphi_i \Longrightarrow \Delta \ (i = 1, 2)}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Longrightarrow \Delta} \ (\wedge 左) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi, \Delta \quad \Gamma \Longrightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \varphi \wedge \psi, \Delta} \ (\wedge 右)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Longrightarrow \Delta} \ (\vee 左) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi_i, \Delta \ (i = 1, 2)}{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2, \Delta} \ (\vee 右)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi, \Lambda \quad \Delta, \psi \Longrightarrow \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \to \psi \Longrightarrow \Lambda, \Pi} \ (\to 左) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \varphi \to \psi, \Delta} \ (\to 右)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \Longrightarrow \Delta} \ (\neg 左) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \neg\varphi, \Delta} \ (\neg 右)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y) \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi(x) \Longrightarrow \Delta} \ (\exists 左) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi(t), \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \exists x\varphi(x), \Delta} \ (\exists 右)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \Longrightarrow \Delta} \ (\forall 左) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi(y), \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \forall x\, \varphi(x), \Delta} \ (\forall 右)$$

ただし，($\exists$左) と ($\forall$右) において変数 y は規則の下式の論理式に自由に現れないとする．

構造に関する規則（弱化規則のみ）

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta} \ (\text{w 左}) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \varphi, \Delta} \ (\text{w 右})$$

カット規則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi} \text{ (cut)}$$

各規則において，下式で新しく得られた論理式を，その規則の**主論理式**という．例えば規則 $\dfrac{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Longrightarrow \Delta}$ ($\vee$左) における主論理式は $\varphi \vee \psi$ である．カット規則において論理式 φ を**カット論理式**と呼ぶ.

注意 3.15. 今回は論理式の有限集合を用いてシークエントを定めているが，Γ と Δ を有限多重集合や有限列として定めることも多い．有限多重集合ではなく有限集合をもとにシークエントを定めるということは，φ と $\varphi \vee \varphi$ および $\varphi \wedge \varphi$ を同一視するという態度である．有限多重集合に基づいた **LK** においては $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}$ といった contraction 規則を構造に関する規則に追加する．更に有限列ではなく有限集合をもとにシークエントを定めるということは，上記の同一視に加えて $\varphi \circ \psi$ と $\psi \circ \varphi$ ($\circ \in \{\wedge, \vee\}$) を同一視するという態度である．有限列に基づいた **LK** においては $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}$ といった exchange 規則を構造に関する規則に追加する．詳細はシークエント計算を扱う教科書等を参照されたい．有限集合をもとにすることで議論が単純になってくれる半面，きめ細かさはその分失われる．

定義 3.16 (**LK** における証明)**.** **LK** におけるシークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の**証明**とは，各ノードがシークエントでラベルづけられた有限の二分木であり，次の性質をもつもの：

- 各葉は始シークエントでラベルづけられている．
- 葉以外の各ノードは **LK** の規則のいずれかを適用することで得られている．
- 唯一の根には $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ がラベルづけられている．

シークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ が **LK** における証明を持つとき，**LK** において証明可能であるという．

$\varphi \Longrightarrow \varphi$ という形の始シークエントは φ が原子論理式の場合に制限されていたが，次の命題が成り立つ．

命題 3.17. 任意の論理式 φ について，$\varphi \Longrightarrow \varphi$ は **LK** において証明可能.

証明. φ の構成に関する帰納法で簡単に示せる．例えば $\wedge$ については

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi \Longrightarrow \varphi}}{\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \varphi}\ (\wedge\text{左}) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi \Longrightarrow \psi}}{\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \psi}\ (\wedge\text{左})}{\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{右})$$

$\to$ については

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi \Longrightarrow \varphi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi \Longrightarrow \psi}}{\varphi \to \psi, \varphi \Longrightarrow \psi}\ (\to \text{左})}{\varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi \to \psi}\ (\to \text{右})
$$

他の場合も同様. □

例 3.18 (排中律 $\Longrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ の証明)**.**

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi \Longrightarrow \varphi}}{\Longrightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\neg\text{右})}{\Longrightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\ (\vee\text{右})}{\Longrightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\ (\vee\text{右})
$$

例 3.19 (ド・モルガン律 $\neg(\varphi \wedge \psi) \Longrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ の証明)**.**

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi \Longrightarrow \varphi}}{\Longrightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\neg\text{右})}{\Longrightarrow \varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi}\ (\vee\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi \Longrightarrow \psi}}{\Longrightarrow \psi, \neg\psi}\ (\neg\text{右})}{\Longrightarrow \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi}\ (\vee\text{右})}{\Longrightarrow \varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi}\ (\wedge\text{右})}{\neg(\varphi \wedge \psi) \Longrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi}\ (\neg\text{左})
$$

LK と **HK** は等しい証明能力を持つ.

定理 3.20. 任意のシークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ について，以下は同値：

1. $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ は **LK** において証明可能.
2. $\vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$: **LK** における証明のノードの個数に関する帰納法で示す．**LK** の各規則が **HK** において模倣できることを示せばよい.

$(2 \Rightarrow 1)$: 「$\vdash \varphi$ ならば **LK** において $\Longrightarrow \varphi$ が証明可能」を **HK** における形式的証明の長さに関する帰納法で示す．例えば MP については $\Longrightarrow \varphi \to \psi$ と $\Longrightarrow \varphi$ が **LK** において証明可能であるとき，$\Longrightarrow \psi$ は **LK** における次の証明を持つ.

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Longrightarrow \varphi} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Longrightarrow \varphi \to \psi} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi \Longrightarrow \varphi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi \Longrightarrow \psi}}{\varphi \to \psi, \varphi \Longrightarrow \psi}\ (\to \text{左})}{\varphi \Longrightarrow \psi}\ (\mathrm{cut})}{\Longrightarrow \psi}\ (\mathrm{cut})
$$

□

LK のカット以外の各規則について，上式に現れる論理式は全て下式に現れる論理式の部分論理式になっている．他方，カット規則についてはカット論理式 φ が下式に現れない可能性がある．した

がってカット規則を含むような $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の証明の中には，もしかすると Γ と Δ には無関係な論理式が登場している可能性がある．上述の方針で **HK** と **LK** との同等性を示すためにはカット規則は不可欠であるように思われる．他方で，**LK** における証明は必ず複雑なカット論理式をもつカット規則の適用を含まない証明に書き換えることができる．少し厄介なのは等号公理に対応する始シークエントであり，これに関する原子論理式をカット論理式として持つカット規則は除去できない．原子論理式をカット論理式として持つカット規則の適用をここでは一時的に**原子カット規則**，それ以外のカット規則を**非原子カット規則**と呼ぶことにする．

定理 3.21 (**LK** のカット除去定理)**.** **LK** において証明可能なシークエントは，非原子カット規則を含まない証明を持つ．

証明. まず，証明における各カット規則の適用

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi} \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi} \ (\mathrm{cut})$$

に注目する．

- この適用の**グレード**とは，φ に含まれる論理結合子と量化子の合計数とする．
- この適用の**高さ**とは，下式以上のノードの個数とする．

非原子カット規則を少なくとも一つもつ証明において，非原子カット規則の一番上の適用に対して，その適用の下式の証明を，グレードや高さが小さくなるような非原子カット規則の適用のみを持つ証明に置き換える，という操作を繰り返せばよい．すなわち，グレードを外側，高さを内側にした二重帰納法で次の主張を証明すれば十分である：

(*) 最後の規則が非原子カット規則であり，それ以外に非原子カット規則が現れない **LK** における証明は，根のシークエントが同じである，非原子カット規則の適用を持たない証明に書き換えられる．

非原子カット規則の適用の上式の状況に応じて大きく 3 個の場合に分けて証明する（上式のいずれかが始シークエントなら，原子カット規則なので考えなくてよい）．

■**ケースその** 1: 上式のどちらかが構造に関する規則の下式のとき．

左側の上式が規則 (w 右) の下式の場合で，φ がその主論理式 ψ でないとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \varphi} \ (\mathrm{w}\ 右) \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi} \ (\mathrm{cut})$$

これは次のようにして高さの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi} \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\text{cut})}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi}\ (\text{w 右})
$$

したがって帰納法の仮定よりシークエント $\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi$ は非原子カット規則のない証明を持つ.

続いて左側の上式が規則 (w 右) の下式の場合で, φ がその主論理式のとき:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{w 右}) \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\text{cut})
$$

このときシークエント $\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi$ は次の非原子カット規則のない証明を持っている.

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ \vdots\ (\text{w 左右) を何度か適用}
$$

他の場合も同様.

■ケースその 2: 上式のどちらかが論理規則の下式だが, その主論理式がカット論理式 φ でないとき.

例えば左側の上式が規則 ($\vee$ 右) の下式で, φ がその主論理式 $\psi \vee \sigma$ でないとき:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \varphi}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \vee \sigma, \varphi}\ (\vee \text{右}) \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi \vee \sigma}\ (\text{cut})
$$

これは次のようにして高さの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \varphi} \quad \dfrac{\vdots}{\varphi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi}\ (\text{cut})}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi \vee \sigma}\ (\vee \text{右})
$$

帰納法の仮定よりシークエント $\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi, \psi \vee \sigma$ は非原子カット規則のない証明を持つ. 他の論理規則の場合も同様.

■ケースその 3: 上式の両方が論理規則の下式で，それらの主論理式がカット論理式 φ のとき．

- 左側の上式が規則 ($\wedge$ 右) の下式，右側の上式が規則 ($\wedge$ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \sigma}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \wedge \sigma}\,(\wedge\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\psi \wedge \sigma, \Sigma \Longrightarrow \Pi}\,(\wedge\text{左})}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\,(\mathrm{cut})$$

これは次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\,(\mathrm{cut})$$

- 左側の上式が規則 ($\vee$ 右) の下式，右側の上式が規則 ($\vee$ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \vee \sigma}\,(\vee\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \Sigma \Longrightarrow \Pi} \quad \dfrac{\vdots}{\sigma, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\psi \vee \sigma, \Sigma \Longrightarrow \Pi}\,(\vee\text{左})}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\,(\mathrm{cut})$$

これは次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\,(\mathrm{cut})$$

- 左側の上式が規則 ($\to$ 右) の下式，右側の上式が規則 ($\to$ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \sigma}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \to \sigma}\,(\to\ \text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma_0 \Longrightarrow \Pi_0, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\sigma, \Sigma_1 \Longrightarrow \Pi_1}}{\psi \to \sigma, \Sigma_0, \Sigma_1 \Longrightarrow \Pi_0, \Pi_1}\,(\to\ \text{左})}{\Gamma, \Sigma_0, \Sigma_1 \Longrightarrow \Delta, \Pi_0, \Pi_1}\,(\mathrm{cut})$$

これは次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma_0 \Longrightarrow \Pi_0, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \sigma}}{\Gamma, \Sigma_0 \Longrightarrow \Delta, \Pi_0, \sigma}\,(\mathrm{cut}) \quad \dfrac{\vdots}{\sigma, \Sigma_1 \Longrightarrow \Pi_1}}{\Gamma, \Sigma_0, \Sigma_1 \Longrightarrow \Delta, \Pi_0, \Pi_1}\,(\mathrm{cut})$$

- 左側の上式が規則 ($\neg$ 右) の下式，右側の上式が規則 ($\neg$ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg\psi}\,(\neg\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma \Longrightarrow \Pi, \psi}}{\neg\psi, \Sigma \Longrightarrow \Pi}\,(\neg\text{左})}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\,(\mathrm{cut})$$

これは次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明に書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma \Longrightarrow \Pi, \psi} \quad \dfrac{\vdots}{\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

- 左側の上式が規則 (∃ 右) の下式，右側の上式が規則 (∃ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi(t)}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x)}\ (\exists 右) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi(y), \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\exists x\, \psi(x), \Sigma \Longrightarrow \Pi}\ (\exists 左)}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

ここで，非原子カット規則を持たない証明 $\dfrac{\vdots}{\psi(y), \Sigma \Longrightarrow \Pi}$ について，その中に含まれる自由変数 y 全てに項 t を代入すれば，y は Σ と Π の論理式には自由に現れないので，非原子カット規則を持たない証明 $\dfrac{\vdots}{\psi(t), \Sigma \Longrightarrow \Pi}$ に書き換えられることが確認できる．したがって次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi(t)} \quad \dfrac{\vdots}{\psi(t), \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

- 左側の上式が規則 (∀ 右) の下式，右側の上式が規則 (∀ 左) の下式のとき:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi(y)}}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\ (\forall 右) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi(t), \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\forall x\, \psi(x), \Sigma \Longrightarrow \Pi}\ (\forall 左)}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

∃ の場合と同様にして次のようにしてグレードの小さい非原子カット規則をもつ証明が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi(t)} \quad \dfrac{\vdots}{\psi(t), \Sigma \Longrightarrow \Pi}}{\Gamma, \Sigma \Longrightarrow \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

□

カット除去定理により，更に次のことが分かる．

系 3.22 (**LK** の部分論理式性)**.** **LK** において証明可能なシークエント $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ は，現れる全ての論理式が Γ か Δ に含まれる論理式の部分論理式であるか原子論理式であるような証明を持つ．

3.3 Kreisel and Lévy の定理

$\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で，一様反映原理が $\mathbf{PA}$ を特徴づける，という Kreisel and Lévy の定理を証明する．実際には Kreisel and Lévy の定理を階層化した Leivant–Ono の定理を証明する．その証明には先ほど示した $\mathbf{LK}$ のカット除去定理および部分論理式性の形式化を用いる．

定理 3.23 (Leivant, 1983 [17]; Ono, 1987 [21])**.** $n \geq 1$ について，

$$\mathbf{I\Sigma}_n = \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{PC}).$$

証明. ($\supseteq$): $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{PC}) \vdash \mathbf{I\Sigma}_n$ を示す．$n = 1$ の場合は明らかなので $n \geq 2$ とする．命題 3.8 より $\mathbf{I\Sigma}_1$ 上で $\mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{PC})$ と $\mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_1)$ は同値なので，$\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_1) \vdash \mathbf{I\Sigma}_n$ を示せば十分．$\varphi(x, \vec{y})$ を任意の Σ_n 論理式とする．$\psi(\vec{y})$ を Π_{n+1} 論理式 $\varphi(0, \vec{y}) \land \forall x\,(\varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(x+1, \vec{y}))$ として $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_1) \vdash \psi(\vec{y}) \to \varphi(x, \vec{y})$ を示したい．

ここで Σ_1 論理式 $\xi(x, \vec{y})$ を $\mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(\ulcorner \psi(\dot{\vec{y}}) \to \varphi(\dot{x}, \dot{\vec{y}}) \urcorner)$ とすると，$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \psi(\vec{y}) \to \varphi(0, \vec{y})$ は明らかなので定理 2.24 より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \xi(0, \vec{y})$ が成立する．いま $\mathbf{I\Sigma}_1$ における $\psi(\vec{\overline{k}}) \to \varphi(\overline{n}, \vec{\overline{k}})$ の証明 p が与えられたら，$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \psi(\vec{\overline{k}}) \to (\varphi(\overline{n}, \vec{\overline{k}}) \to \varphi(\overline{n+1}, \vec{\overline{k}}))$ なので，$\psi(\vec{\overline{k}}) \to \varphi(\overline{n+1}, \vec{\overline{k}})$ の証明 q が得られる．特にこの手続きは原始再帰的に行えるので，原始再帰的関数 $e : (n, \vec{k}, p) \mapsto q$ がとれる．定理 2.10 より $\mathbf{I\Sigma}_1$ は対応する関数記号 e をもっているとしてよい．このとき

$$\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(\ulcorner \psi(\dot{\vec{y}}) \to \varphi(\dot{x}, \dot{\vec{y}}) \urcorner, z) \to \mathrm{Prf}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(\ulcorner \psi(\dot{\vec{y}}) \to \varphi(\dot{x}+1, \dot{\vec{y}}) \urcorner, e(x, \vec{y}, z))$$

が成り立つ．したがって $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \xi(x, \vec{y}) \to \xi(x+1, \vec{y})$ である．Σ_1 帰納法公理より $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \xi(x, \vec{y})$, すなわち $\mathbf{I\Sigma}_1 \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_1}(\ulcorner \psi(\dot{\vec{y}}) \to \varphi(\dot{x}, \dot{\vec{y}}) \urcorner)$ となる．ここで $\psi(\vec{y}) \to \varphi(x, \vec{y})$ は Σ_{n+1} 論理式なので $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_1) \vdash \psi(\vec{y}) \to \varphi(x, \vec{y})$ が得られた．

($\subseteq$): Σ_{n+1} 論理式 $\varphi(x)$ を任意にとり，更に $\varphi(x)$ は Π_n 論理式 $\psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ を用いて $\exists y_1 \cdots \exists y_m\, \psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ という形とする．$\mathbf{I\Sigma}_n \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{HK}}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)$ を $\mathbf{I\Sigma}_n$ の中で議論して証明する：

背理法で示す．$\varphi(\overline{k})$ が $\mathbf{HK}$ において証明できるが $\neg\varphi(\overline{k})$ と仮定して矛盾を導く．$\mathbf{HK}$ と $\mathbf{LK}$ の同等性が $\mathbf{I\Sigma}_1$ において証明できるので，$\Longrightarrow \varphi(\overline{k})$ は $\mathbf{LK}$ において証明可能である．更にカット除去定理の証明も $\mathbf{I\Sigma}_1$ において実行できるので $\Longrightarrow \varphi(\overline{k})$ は非原子カット規則を含まない証明を持つ．いま論理式が ψ-formula であるとは，$i \leq m$ と項 $t_1, \ldots, t_{i-1}$ があって $\exists y_{i+1} \cdots \exists y_m\, \psi(\overline{k}, t_1, \ldots, t_{i-1}, y_i, \ldots, y_m)$ という形であることとする．さて, 次の主張を $\mathrm{True}_{\Pi_n}(x)$ を用いて書き下した Π_n 論理式 $\theta(h, k)$ を考える：

- 任意の p について，もし p がシークエント $\Sigma \Longrightarrow \Pi, \Gamma$ の非原子カット規則を含まない高さ h 以下の証明であり，更に
  - Σ は Σ_n 論理式の集合
  - Π は Π_n 論理式の集合

– Γ は ψ-formulas の集合

ならば，$\bigwedge\Sigma \to \bigvee\Pi$ の全称閉包である Π_n 文は真.

いま $\theta(0,k)$ は自明に成立する．続いて $\theta(h,\overline{k}) \to \theta(h+1,\overline{k})$ を示す．そのために $\theta(h,\overline{k})$ を仮定し，いまから $\theta(h+1,\overline{k})$ を示したい．すなわち p がシークエント $\Sigma \Longrightarrow \Pi,\Gamma$ の高さ $h+1$ の証明で，上述の 3 条件を満たすとする．$\Sigma \Longrightarrow \Pi,\Gamma$ がどのように導出されたのかに応じて場合分けをして $\bigwedge\Sigma \to \bigvee\Pi$ の全称閉包が真であることを示す.

■ケースその 1:　$\Sigma \Longrightarrow \Pi,\Gamma$ が始シークエントのとき.

もし原子論理式 φ について $\varphi \Longrightarrow \varphi$ なら，$\varphi \to \varphi$ の全称閉包は真な Π_1 文.

もし $\Longrightarrow t=t$ なら，そもそも $\forall x(x=x)$ が成立しているのでこの Π_1 文が真であり，特に $t=t$ の全称閉包も真である.

その他の始シークエントについても同様.

■ケースその 2:　$\Sigma \Longrightarrow \Pi,\Gamma$ が Σ もしくは Π に現れる論理式を主論理式とする規則の下式のとき：

例えば $\Pi = \Pi_0 \cup \{\rho\vee\sigma\}$ で

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma \Longrightarrow \Pi_0,\rho,\Gamma}}{\Sigma \Longrightarrow \Pi_0,\rho\vee\sigma,\Gamma}\ (\vee\text{右})$$

のとき，帰納法の仮定より $\bigwedge\Sigma \to \bigvee\Pi_0 \vee \rho$ の全称閉包は真．よって $\bigwedge\Sigma \to \bigvee\Pi_0 \vee (\rho\vee\sigma)$ の全称閉包も真.

例えば $\Pi = \Pi_0 \cup \{\neg\sigma\}$ で

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma,\sigma \Longrightarrow \Pi_0,\Gamma}}{\Sigma \Longrightarrow \Pi_0,\neg\sigma,\Gamma}\ (\neg\text{右})$$

のとき，$\neg\sigma$ が Π_n なので σ は Σ_n となるから，帰納法の仮定より $\bigwedge\Sigma\wedge\sigma \to \bigvee\Pi_0$ の全称閉包は真．よって $\bigwedge\Sigma \to \bigvee\Pi_0 \vee \neg\sigma$ の全称閉包も真.

その他の規則の場合も同様.

■ケースその 3:　$\Sigma \Longrightarrow \Pi,\Gamma$ が原子カット規則の下式のとき：

このとき $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$, $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$ で，原子論理式 ρ について

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma_0 \Longrightarrow \Pi_0,\Delta_0,\rho} \quad \dfrac{\vdots}{\rho,\Sigma_1 \Longrightarrow \Pi_1,\Delta_1}}{\Sigma_0,\Sigma_1 \Longrightarrow \Pi_0,\Pi_1,\Delta_0,\Delta_1}\ (\mathrm{cut})$$

帰納法の仮定より $\bigwedge\Sigma_0 \to \bigvee\Pi_0 \vee \rho$ と $\rho\wedge\bigwedge\Sigma_1 \to \bigvee\Pi_1$ の全称閉包は真である．このとき $\bigwedge(\Sigma_0\cup\Sigma_1) \to \bigvee(\Pi_0\cup\Pi_1)$ の全称閉包が真であることが確認できる.

■ケースその 4:　$\Sigma \Longrightarrow \Pi, \Gamma$ が Γ の要素を主論理式とする規則 ($\exists$右) の下式で，主論理式が上式の ψ-formula に $\exists y_i$ をつけたもののとき：

帰納法の仮定より $\bigwedge \Sigma \to \bigvee \Pi$ の全称閉包は真なのでこのケースは終了．

■ケースその 5:　$\Sigma \Longrightarrow \Pi, \Gamma$ が Γ の要素を主論理式とする規則 ($\exists$右) の下式で，主論理式が上式の ψ-formula に $\exists y_i$ をつけたものでないとき：

$\psi(\overline{k}, t_1, \dots, t_m)$ が ψ-formula ではなく Π_n 論理式であることに注意．$\Gamma = \Gamma_0 \cup \{\exists y_m\, \psi(\overline{k}, t_1, \dots, y_m)\}$ であり，

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Sigma \Longrightarrow \Pi, \psi(\overline{k}, t_1, \dots, t_m), \Gamma_0}}{\Sigma \Longrightarrow \Pi, \Gamma_0, \exists y_m\, \psi(\overline{k}, t_1, \dots, y_m)}\ (\exists 右)$$

もし $\bigwedge \Sigma \to \bigvee \Pi$ の全称閉包が真でなければ $\bigwedge \Sigma \land \neg \bigvee \Pi$ が真となるインスタンスがある．帰納法の仮定より $\bigwedge \Sigma \to \bigvee \Pi \lor \psi(\overline{k}, t_1, \dots, t_m)$ の全称閉包は真なので，特に $\psi(\overline{k}, t_1, \dots, t_m)$ が真となるインスタンスがある．したがって $\exists y_1 \cdots \exists y_m\, \psi(\overline{k}, y_1, \dots, y_m)$，つまり $\varphi(\overline{k})$ が成立する．これは $\neg\varphi(\overline{k})$ と仮定していることに反する．以上より $\bigwedge \Sigma \to \bigvee \Pi$ の全称閉包は真である．

以上で場合分けが終了し $\theta(0, \overline{k}) \land (\theta(h, \overline{k}) \to \theta(h+1, \overline{k}))$ が示せた．$\mathbf{I\Sigma}_n = \mathbf{I}\Pi_n$ なので Π_n 帰納法公理を用いて $\forall h\, \theta(h, \overline{k})$ が成立する．特に $\Longrightarrow \varphi(\overline{k})$ の非原子カット規則を含まない証明に対して $\theta(h, \overline{k})$ を適用すれば $\bigwedge \emptyset \to \bigvee \emptyset$ が真となり，これはおかしい．したがって $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\overline{k}) \urcorner) \to \varphi(\overline{k})$ が成立する． □

Leivant–Ono の定理と命題 3.11 を合わせると次も分かる．

系 3.24. $1 \leq m \leq n$ について，

$$\mathbf{I\Sigma}_{n+1} = \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m).$$

特に $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \mathrm{Con}(\mathbf{I\Sigma}_n)$.

証明. Leivant–Ono の定理より $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m) \vdash \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{PC}) = \mathbf{I\Sigma}_{n+1}$．他方，命題 3.8 より $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} = \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{PC}) = \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_1)$．命題 3.11 より $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{I\Sigma}_1))$ で特に $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{m+1}}(\mathbf{PC}))$. Leivant–Ono の定理より $\mathbf{I\Sigma}_{n+1} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m)$.

特に，以降は命題 3.4 より． □

定理 3.25 (Kreisel and Lévy, 1968 [15])**.** $m \geq 1$ について

$$\mathbf{PA} = \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}(\mathbf{I\Sigma}_m).$$

証明. ($\supseteq$): 任意の $n \geq 1$ について $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}(\mathbf{I\Sigma}_m) \vdash \mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbf{PC}) = \mathbf{I\Sigma}_n$ なので $\mathbf{I\Sigma}_1 + \mathrm{RFN}(\mathbf{I\Sigma}_m) \vdash \mathbf{PA}$.

($\subseteq$): 系 3.24 よりすべての $n \geq m$ について $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{n+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m)$ だから $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{RFN}(\mathbf{I\Sigma}_m)$. □

定義 3.26.

- 自然数 n に対して，$T \restriction n := \{\varphi \in T \mid \ulcorner \varphi \urcorner < n\}$.
- T が**反映的**であるとは，T が T の任意の有限部分理論の無矛盾性を証明できること，すなわちすべての自然数 n について $T \vdash \mathrm{Con}(T \restriction n)$ となることをいう．
- T が**本質的に反映的**であるとは，T の任意の拡大理論が反映的であることをいう．

定理 3.27 (Mostowski, 1952 [20])**.** $\mathbf{PA}$ は本質的に反映的.

証明. U を $\mathbf{PA}$ の拡大理論とする．自然数 n について，理論 $U \restriction n$ は有限集合なので，自然数 $m \geq 1$ と $U \vdash \varphi$ となる Σ_m 文 φ があって $U \restriction n \subseteq \mathbf{I\Sigma}_m + \varphi$ となる．系 3.24 より $\mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{m+2}}(\mathbf{I\Sigma}_m)$ である．

$$\begin{aligned} \mathbf{I\Sigma}_{m+1} \vdash \mathrm{Pr}_{U \restriction n}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) &\to \mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_m + \varphi}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \\ &\to \mathrm{Pr}_{\mathbf{I\Sigma}_m}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \\ &\to \neg\varphi. \end{aligned}$$

したがって $U \vdash \mathbf{I\Sigma}_{m+1} + \varphi \vdash \mathrm{Con}(U \restriction n)$ が成り立つ． □

定理 3.28 (Ryll-Nardzewski, 1953 [24])**.** $\mathbf{PA}$ の無矛盾な原始再帰的拡大理論は有限公理化不可能.

証明. $\mathbf{PA}$ の無矛盾な原始再帰的拡大理論 T が有限公理化可能だとすると，自然数 n があって $T = T \restriction n$ となる．$\mathbf{PA}$ の本質的反映性より $T \restriction n = T \vdash \mathrm{Con}(T \restriction n)$ であり，第 2 不完全性定理より $T \restriction n$ が矛盾する．これは T の無矛盾性に反する． □

注意 3.29. 今回の講義では有限列のコード化などを $\mathbf{I\Sigma}_1$ をベースにして行ったが，より細かな分析をすれば $\mathbf{I}\Delta_0 + \exp$ において実行することができる．ここで exp は指数関数の全域性を主張する公理である．そうすれば Leivant–Ono の定理は次のよりきめの細かな主張として述べることができる；

- $\mathbf{I}\Delta_0 + \exp + \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(\mathbf{I}\Delta_0 + \exp) = \mathbf{I}\Delta_0 + \mathrm{supexp}$
- $\mathbf{I}\Delta_0 + \exp + \mathrm{RFN}_{\Sigma_2}(\mathbf{I}\Delta_0 + \exp) = \mathbf{I\Sigma}_1$
- $\mathbf{I}\Delta_0 + \exp + \mathrm{RFN}_{\Sigma_3}(\mathbf{I}\Delta_0 + \exp) = \mathbf{I\Sigma}_2$
- $\cdots$

注意 3.30. 今回は $\mathbf{PA}$ の部分理論 $\mathbf{I\Sigma}_n$ を一様反映原理を用いて特徴づける Leivant–Ono の定理を紹介した．また，$\mathbf{PA}$ のその他の部分理論たちに対しても反映原理を用いた特徴づけが与えられている．

- パラメータなし帰納法 $\mathbf{I\Sigma}_n^-$, $\mathbf{I}\Pi_n^-$：Beklemishev [3], [4]
- 帰納法規則 $\mathbf{I\Sigma}_n^{\mathbf{R}}$：Beklemishev [2]
- 制限 (採集) 原理 $\mathbf{B}\Sigma_n$：Visser [28], Kołodziejczyk [14]

同様にいろいろな命題が一様反映原理を用いて特徴づけられることも多く分析されている．詳しくは

Beklemishev によるサーベイ [5] などを参照されたい.

参考文献

[1] Sergei N. Artemov and Lev D. Beklemishev. Provability logic. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 13, pages 189–360. Springer, Dordrecht, 2nd edition, 2005.

[2] Lev D. Beklemishev. Induction rules, reflection principles, and provably recursive functions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 85(3):193–242, 1997.

[3] Lev D. Beklemishev. Parameter free induction and reflection. In *Computational logic and proof theory (Vienna, 1997)*, volume 1289 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 103–113. Springer, Berlin, 1997.

[4] Lev D. Beklemishev. Parameter free induction and provably total computable functions. volume 224, pages 13–33. 1999. Logical foundations of computer science (Yaroslavl, 1997).

[5] Lev D. Beklemishev. Reflection schemes and provability algebras in formal arithmetic. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 60(2(362)):3–78, 2005.

[6] George Boolos. *The logic of provability.* Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[7] William Craig. On axiomatizability within a system. *The Journal of Symbolic Logic*, 18:30–32, 1953.

[8] Solomon Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, 49:35–92, 1960/61.

[9] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, 1931.

[10] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[11] Giorgi Japaridze and Dick de Jongh. The logic of provability. In *Handbook of proof theory*, pages 475–546. Amsterdam: Elsevier, 1998.

[12] Richard Kaye. *Models of Peano arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.

[13] Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi. Generalizations of Gödel's incompleteness theorems for Σ_n-definable theories of arithmetic. *The Review of Symbolic Logic*, 10(4):603–616, 2017.

[14] Leszek A. Kołodziejczyk. A reflection on collection. In *A tribute to Albert Visser*, volume 30 of *Tributes*, pages 187–193. Coll. Publ., [London], 2016.

[15] Georg Kreisel and Azriel Lévy. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 14:97–142, 1968.

[16] Taishi Kurahashi. A note on derivability conditions. *The Journal of Symbolic Logic*, 85(3):1224–1253, 2020.

[17] Daniel Leivant. The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 48(1):182–184, 1983.

[18] Per Lindström. *Aspects of incompleteness.*, volume 10 of *Lecture Notes in Logic*. Natick, MA: Association for Symbolic Logic, 2nd edition, 2003.

[19] Martin Hugo Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *The Journal of Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

[20] Andrzej Mostowski. On models of axiomatic systems. *Fundamenta Mathematicae*, 39:133–158 (1953), 1952.

[21] Hiroakira Ono. Reflection principles in fragments of Peano arithmetic. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 33(4):317–333, 1987.

[22] Hiroakira Ono. *Proof Theory and Algebra in Logic*. Springer, 2019.

[23] Barkley Rosser. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[24] Czesław Ryll-Nardzewski. The role of the axiom of induction in elementary arithmetic. *Fundamenta Mathematicae*, 39:239–263 (1953), 1952.

[25] Saeed Salehi and Payam Seraji. Gödel-Rosser's incompleteness theorem, generalized and optimized for definable theories. *Journal of Logic and Computation*, 27(5):1391–1397, 2017.

[26] Craig Smoryński. The incompleteness theorems. In *Handbook of mathematical logic*, volume 90 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 821–865. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[27] Craig Smoryński. *Self-reference and modal logic*. Universitext. Springer, Cham, 1985.

[28] Albert Visser. Oracle bites theory. In *The facts matter*, volume 25 of *Tributes*, pages 133–147. Coll. Publ., London, 2015.

[29] 佐野勝彦・倉橋太志・薄葉季路・黒川英徳・菊池誠. **数学における証明と真理 - 様相論理と数学基礎論**. 共立出版, 2016.

[30] 倉橋太志. 不完全性定理の数学的発展. **数学**, 73(1):60–87, 2021.

[31] 倉橋太志. 証明可能性述語の様相論理. **京都大学数理解析研究所講究録**, 2233, 2022.

[32] 倉橋太志. 理論の不完全性，決定不能性，分離不能性. 第 2 回 ロジック・ウィンタースクール講義資料 `http://www2.kobe-u.ac.jp/~tk/jp/workshop/LWS2.html`, 2023.

[33] 坪井明人. **数理論理学の基礎・基本**. 森北出版, 2023.

[34] 小暮晏佳・倉橋太志. Rosser 証明可能性述語に基づく局所反映原理. **京都大学数理解析研究所講究録**, 2024. 投稿中.

[35] 新井敏康. **数学基礎論 増補版**. 東京大学出版会, 2021.

[36] 松本和夫. **復刊 数理論理学**. 共立出版, 1970; 2001.

[37] 田中一之編. **ゲーデルと *20* 世紀の論理学 *3* - 不完全性定理と算術の体系**. 東京大学出版会, 2007.

[38] 菊池誠. **不完全性定理**. 共立出版, 2014.