

冠頭標準形定理の変種について

中間述語論理で考えてみる

鈴木信行

静岡大学理学部数学教室

令和 8 年 10 月 25 日

第 61 回 MLG 数理論理学研究集会

(於: 神戸大学)

—— ———
謝辞: 本研究は、部分的に JSPS 科研費 JP20K03716, JP21H00694 の助成を受けたものです。

今日の問題

- 古典述語論理では冠頭標準形定理が成立する。
- 直観主義述語論理では冠頭標準形定理が一般には成立しない。
- 中間述語論理では、成立したりしなかったり。
- 中間述語論理では、冠頭標準形定理はどのように成立するのか？

今日の問題

- 古典述語論理では冠頭標準形定理が成立する。
- 直観主義述語論理では冠頭標準形定理が一般には成立しない。
- 中間述語論理では、成立したりしなかったり。
- 中間述語論理では、冠頭標準形定理はどのように成立するのか？

冠頭標準形定理 (PNFT)

Prenex Normal Form (PNF)

論理式 A が PNF 論理式 (formula in prenex normal form) である
 $\Leftrightarrow$ quantifier の列 $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n$ と quantifier-free な論理式 B が
存在して、 A は $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n B$ である。 ($Q_i \in \{\forall, \exists\}$)

Prenex Normal Form Theorem (PNFT) for L

任意の論理式 A に対して、PNF 論理式 B が存在して、
 $L \vdash A \equiv B$.

- $L = C$ (古典述語論理) で成立
- $L = H$ (直観主義述語論理) では不成立
- 中間述語論理では、PNFT はどのように成立するのか？

なにを区別したいのか？

「PNFT が成立する」だけでは充分でない。

なにを区別したいのか？

「PNFT が成立する」だけでは充分でない。

Prenex Normal Form Theorem (PNFT) for L

任意の論理式 A に対して、PNF 論理式 B が存在して、
 $L \vdash A \equiv B$.

この B は、 A に対して一意ではない。

どのような PNF 論理式が同値になるのか？を見る。

梅沢の結果: 比較する論理式

比較する論理式: $\forall x p(x) \rightarrow q$

それに同値な PNF 論理式:

$$P_1 : \exists x_1 (p(x_1) \rightarrow q), \quad P_2 : \forall y \exists x_1 (p(x_1) \wedge p(y) \rightarrow q),$$

$$P_3 : \exists x_1 \exists x_2 (p(x_1) \wedge p(x_2) \rightarrow q),$$

$$P_4 : \forall y \exists x_1 \exists x_2 (p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(y) \rightarrow q), \dots$$

- 古典述語論理では、すべて $\forall x p(x) \rightarrow q$ と同値。
- しかし、中間述語論理では同値性に「差」がある。

P_n

$$P_{2m-1} : \quad \exists x_1 \cdots \exists x_m (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_m) \rightarrow q),$$

$$P_{2m} : \quad \forall y \exists x_1 \cdots \exists x_m (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_m) \wedge p(y) \rightarrow q).$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

梅沢の定理: PNFT のタイプ区別の基礎

梅沢の定理 (Umezawa 1989)

中間述語論理 $\mathbf{L}$ が PNFT を enjoy するとせよ。ある $n \geq 1$ が一意に存在して、

$$\mathbf{L} \vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k \geq n).$$

一方、 $k < n$ については

$$\mathbf{L} \not\vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k < n).$$

系

任意の n について、 $\mathbf{H} \not\vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \rightarrow P_n$.

したがって、直観主義述語論理 $\mathbf{H}$ では、PNFT は成立しない。

公理型の列 $\{F_n\}, \{G_n\}$

定義

$$F_{2m-1} : \quad \exists x_1 \cdots \exists x_m (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_m) \rightarrow \forall z p(z)),$$

$$F_{2m} : \quad \forall y \exists x_1 \cdots \exists x_m (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_m) \wedge p(y) \rightarrow \forall z p(z)),$$

$$G_{2m-1} : \quad \exists x_1 \cdots \exists x_m (\exists z p(z) \rightarrow p(x_1) \vee \cdots \vee p(x_m)),$$

$$G_{2m} : \quad \forall y \exists x_1 \cdots \exists x_m (\exists z p(z) \rightarrow p(x_1) \vee \cdots \vee p(x_m) \vee p(y)),$$
$$(m = 1, 2, \dots)$$

N.B.

F_n, G_n はすべて、**H** で証明不可能、**C** で証明可能

定義

$$L_n := H + F_n + G_n$$

命題

L_n enjoys PNFT.

例えば、 F_3 を使うと

$\forall x p(x) \rightarrow q, \forall x p(x) \vee q, \neg \forall x p(x)$ は、それぞれ

$\exists x_1 \exists x_2 (p(x_1) \wedge p(x_2) \rightarrow q), \forall x (p(x) \vee q), \exists x_1 \exists x_2 \neg (p(x_1) \wedge p(x_2))$

と同値になる。

L_n で $\forall x p(x) \rightarrow q$ と同値な PNF 論理式

補題 (S. 2022)

$$L_n \vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k \geq n).$$

$$L_n \not\vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k < n).$$

梅沢の定理での各 $n \geq 1$ を実現する論理が、具体的に存在する。

PNFT のタイプ: the witness is $\forall x p(x) \rightarrow q$

定義

$\mathbf{L}$ satisfies PNFT of type n , if

(1) $\mathbf{L}$ enjoys PNFT, and

(2-1) $\mathbf{L}_n \vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k \geq n),$

(2-2) $\mathbf{L}_n \not\vdash (\forall x p(x) \rightarrow q) \equiv P_k \quad (k < n).$

定理 (梅沢の定理の系)

If $\mathbf{L}$ enjoys PNFT, then there exists $n \geq 1$ such that $\mathbf{L}$ satisfies PNFT of type n .

中間述語論理は PNFT を enjoy するならば、一意なタイプを持つ。

各 $n \geq 1$ に対して、PNFT タイプ n を持つ中間述語論理が存在する。

定理

各 $n \geq 1$ に対して、タイプ n の中間述語論理が連続体濃度存在する。

さらに、ここで構成されたすべての中間述語論理は、命題部分が直観主義論理と一致する。

証明の概略: I. 道具立て

補題

PNFT を enjoy する中間論理 $\mathbf{L}$ と $n \geq 1$ に対して、以下は同値

1. $\mathbf{L}$ enjoys PNFT of type k for some $k \leq n$,
2. $\mathbf{L} \vdash F_n$.

- S. 1995 での、論理の連続体を構成する方法を利用
- Kripke sheaf 意味論を用いた構成
- 各 n に対して、strongly independent sequence of axioms $\{A_i^n\}_{i < \omega}$ を構成し、各 $I \subset \omega$ に対して、次のような中間述語論理を作る。

$$\mathbf{M}_n(I) := \mathbf{H} + F_n + G_n + \{A_i^n : i \in I\}$$

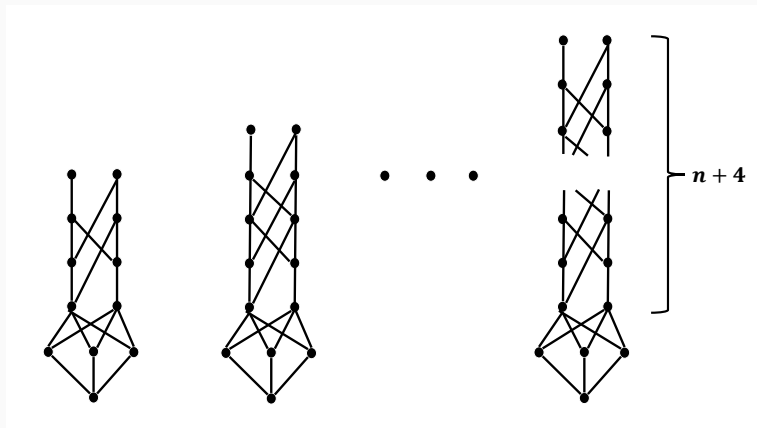
- これらが、われわれの求める都合のいいものであることを示す。

各 $I \subset \omega$ に対して、

$$\mathbf{M}_n(I) := \mathbf{H} + F_n + G_n + \{A_i^n : i \in I\}$$

- 各 $\mathbf{M}_n$ はタイプ n の PNFT を enjoy
- 各 $i < \omega$ について、 $\mathbf{M}_n(\omega \setminus \{i\}) \not\models A_i^n$
- 各 $I, J \subset \omega$ について、 $I \neq J$ ならば $\mathbf{M}_n(I) \neq \mathbf{M}_n(J)$
- F_n, G_n, A_i^n は、 $\mathbf{H}$ に付加しても命題部分を変えない。

証明の概略: III. Kripke sheaves



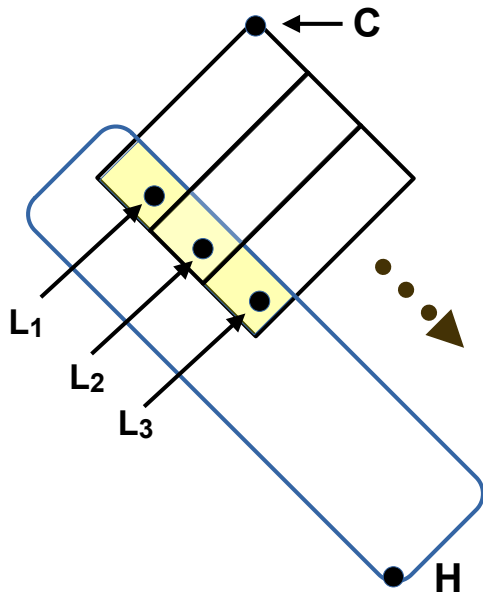
$D(\text{height} \leq 1) = \{0, 1, 2\}$, $D(\text{others}) = \{0\}$

F_4 and G_4 are valid, while F_3 is not.

まとめ: なにが解ったのか

- すべてのタイプ n が、連続体濃度の論理によって実現される。
- それらの論理の命題部分は直観主義命題論理と一致する。
- 多様性は述語部分に、量子子のふるまいに現れる。
- PNFT の成立様式は、豊かな多様性を持つ。

絵 (?)

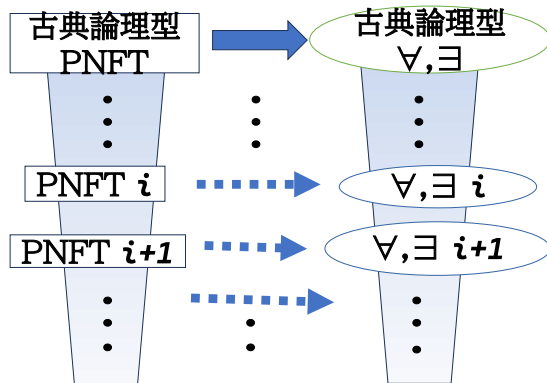


PNFT の成立様式と量子子のふるまい

連想？着想？

$M_1(I)$ の命題部分は H である。

⇒ “PNFT of type 1” は古典述語論理の量子子 ($\forall, \exists$) のふるまいを示唆



References

- [1] Kleene, S.C., **Introduction to Methamathematics**, North-Holland, Amsterdam, 1952.
- [2] Suzuki, N.-Y., *Constructing a continuum of predicate extensions of each intermediate propositional logic*, **Studia Logica** 54(1995), 173–198.
- [3] Umezawa, T., *Prenex normal form of $\forall xA(x) \supset B$* , **Reports of the Faculty of Science. Shizuoka University**, 23(1989) 1–7.
- [4] 鈴木信行, 「超直観主義述語論理における Prenex normal form theorem に関する覚書」, 京都大学数理解析研究所講究録, No.2228 (2022), 88-98.