

Judgemental equality を分解した型理論

瀬谷 聖 (Kiyoshi Seya)

名古屋大学情報学研究科 M1

2026 年 10 月 23 日

導入

公理 ((Martin-Löf 型理論における)identity type)

任意の型 $A : \mathcal{U}(i)$ と要素 $a, b : A$ について、

- ① 型 $a = b : \mathcal{U}(i)$ が存在する。
- ② 要素 $\text{refl}_a : a = a$ が存在する。
- ③ 任意の $x : A, q : a = x \vdash B : \mathcal{U}(i)$ と $p : a = b$ と $c : B(a)(\text{refl})$ について、 $\text{ind}_=(B, c, b, p) : B(b)(p)$ が存在する。
- ④ $\text{ind}_=(B, c, a, \text{refl})$ は c である。

導入

公理 ((Martin-Löf 型理論における) identity type)

任意の型 $A : \mathcal{U}(i)$ と要素 $a, b : A$ について、

- ① 型 $a = b : \mathcal{U}(i)$ が存在する。
- ② 要素 $\text{refl}_a : a = a$ が存在する。
- ③ 任意の $x : A, q : a = x \vdash B : \mathcal{U}(i)$ と $p : a = b$ と $c : B(a)(\text{refl})$ について、 $\text{ind}_=(B, c, b, p) : B(b)(p)$ が存在する。
- ④ $\text{ind}_=(B, c, a, \text{refl})$ は c である。

「同一性は、反射律とそこから“生成”されるものである」ということを表している。これに基づいた“同一性の説明”の哲学的研究もある (Klev(2019)[2], Ladyman and Presnell[3, 4])。

導入

しかし、普通の型理論では judgemental equality も存在する。
judgemental equality とは、メタ的な同一性に相当するものであり、
対称律や推移律、conversion などの規則をもつものである。
メタ的な同一性に基づいた型理論における“同一性の説明”では、
基礎付けとしては不足があるのではないか？

導入

しかし、普通の型理論では judgemental equality も存在する。
judgemental equality とは、メタ的な同一性に相当するものであり、
対称律や推移律、conversion などの規則をもつものである。
メタ的な同一性に基づいた型理論における“同一性の説明”では、
基礎付けとしては不足があるのではないか？

目標

judgemental equality を、代入計算や変数変換に分解した体系でも、
普通の体系と同程度の証明能力をもつ、ということを示す。

規則

記法

本講演における同一性を表す記号について

- ≡ 記号列としての等しさ (メタ的に等しい)。公理的に扱われない。
- ≐ judgemental equality, **型理論内部において**メタ的な同一性を表すもの。ゆえに公理的に扱われる。
- = identity type の constructor である。 $a = b$ は、そういう型である。公理的に扱われる。

規則

記法

本講演における同一性を表す記号について

- ≡ 記号列としての等しさ (メタ的に等しい)。公理的に扱われない。
- ≐ judgemental equality, **型理論内部においてメタ的な同一性を表すもの**。ゆえに公理的に扱われる。
- = identity type の constructor である。 $a = b$ は、そういう型である。公理的に扱われる。

型理論では、主に $\Gamma \vdash a : A$ という judgement を扱う (A は型、 a は要素、 Γ は context、 $\Gamma \equiv x_0 : A_0, \dots, x_{n-1} : A_{n-1}$)。

$MLTT_u$ を、標準的な $MLTT$ の体系、 $MLTT^-$ を、本講演独自の体系とする。(これらの記法は非標準的)

$MLTT_u$ の規則

$MLTT_u$ の型と項

型 $A, B ::= X \mid \mathcal{U}(i) \mid \mathbb{N} \mid a = b \mid \prod_{x:A} B$

項 $a, b ::= x \mid A \mid app(f, a) \mid \lambda x : A. b \mid refl_a \mid ind_{=}(B, b, p, c)$

- $\mathcal{U}(i)$ は型の階層的宇宙を表す。 $A : \mathcal{U}(i)$ なら A は型。 i は自然数。 $\mathcal{U}(i) : \mathcal{U}(i+1)$ が任意の i について成り立つ。
- $\prod_{x:A} B$ は A から B への関数を表す。
- $A\{a/x\}$ は、 A における (自由な) x を全て a にしたもの、というメタ的な代入の記法。

MLTT_uの規則(抜粋)

Πtype(形成・導入・除去・計算)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma, x : A \vdash_u B : \mathcal{U}(i)}{\Gamma \vdash_u \prod_{x:A} B : \mathcal{U}(i)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash_u b : B}{\Gamma \vdash_u \lambda x. b : \prod_{x:A} B} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash_u f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash_u a : A}{\Gamma \vdash_u \text{app}(f, a) : B\{a/x\}} \\
 \\
 \Gamma \vdash_u \text{app}(\lambda x. b, a) \doteq b\{a/x\}
 \end{array}$$

identity type(形成・導入・除去・計算)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash_u a, c : A}{\Gamma \vdash_u a =_A c : \mathcal{U}(i)} \quad \frac{\Gamma \vdash_u a : A}{\Gamma \vdash_u \text{refl}_a : a =_A a} \\
 \\
 \frac{\Gamma, x : A, p : a = x \vdash_u C : \mathcal{U}(i) \quad \Gamma \vdash_u a, c : A \quad \Gamma \vdash_u b : C\{a/x\}\{\text{refl}_a/p\} \quad \Gamma \vdash_u q : a =_A c}{\Gamma \vdash_u \text{ind}_=(C, b, c, q) : C\{c/x\}\{q/p\}} \\
 \\
 \Gamma \vdash_u \text{ind}_=(C, b, a, \text{refl}_a) \doteq b
 \end{array}$$

$MLTT_u$ の規則 (抜粋)

- $\mathcal{U}(i)$ や context の規則・・・略
- 他にも、judgemental equality に関する規則がある。

judgemental equality に関する規則の例

Judgemental conversion

$$\frac{\Gamma \vdash p : B \quad \Gamma \vdash B \doteq A : \mathcal{U}(i)}{\Gamma \vdash p : A} \quad (\text{conv})$$

Transitivity

$$\frac{\Gamma \vdash A \doteq B : \mathcal{U}(i) \quad \Gamma \vdash B \doteq C : \mathcal{U}(i)}{\Gamma \vdash A \doteq C : \mathcal{U}(i)} \quad (\text{trans})$$

MLTT⁻ の規則

MLTT⁻ の型と項

型 $A, B ::= X \mid \mathcal{U}(i) \mid \mathbb{N} \mid a = b \mid \prod_{x:A} B \mid B[a/x] \mid A \rightarrow_r B \mid A \rightarrow_r^+ B$

項 $a, b ::= x \mid A \mid app(f, a) \mid \lambda x : A. b \mid refl_a \mid ind_=(B, b, p, c, q) \mid capp(p, a) \mid \dots$

- $B[a/x]$ は raw term として導入するため、メタ的な代入ではない (明示的代入、Abadi(1991)[5])
- $A \rightarrow_r B$ は代入を表す型である。
- $A \rightarrow_r^+ B$ は、推移閉包を表す型である。

MLTT⁻ の規則 (関数型)

Π type(形成・導入・除去)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}(i)}{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B : \mathcal{U}(i)} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A. b : \prod_{x:A} B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B : \mathcal{U}(i) \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash B[a/x] : \mathcal{U}(i)}$$
$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash app(f, a) : B[a/x]}$$

β -reduction

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \beta(b; a; x) : app(\lambda x : A. b, a) \rightarrow_r b[a/x]}$$

標準 MLTT との違い

$B[a/x]$ はメタ的な代入ではなく、raw term として導入される。

MLTT- の規則 (identity type)

identity type(形成・導入)

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B \quad \Gamma \vdash r : A = B}{\Gamma \vdash a =_r b : \mathcal{U}(i)} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_a : a =_{\text{refl}_A} a}$$

identity type(除去)

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma, x : A, p : a = x \vdash B : \mathcal{U}(i) \\ \Gamma \vdash b : B' \\ \Gamma \vdash * : B[a/x][\text{refl}_a/p] \rightarrow_r^+ B' \\ \Gamma \vdash q : a = c \end{array}}{\Gamma \vdash \text{ind}_=(B, b, c, q) : B[c/x][q/p]}$$

計算規則 (identity type)

$$\Gamma \vdash \text{indred} : \text{ind}_=(B, b, a, \text{refl}_a) \rightarrow_r b$$

$a =_r b$ は、 r が本質的でない場合には $a = b$ と略記する。

MLTT- の規則 (その他)

$\rightarrow_r$ type(形成)

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash a \rightarrow_r b : \mathcal{U}(i+1)}$$

$capp$ (cast application)

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \rightarrow_r B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash capp(p, a) : B}$$

eq (同一視への変換)

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \rightarrow_r B}{\Gamma \vdash eq(p) : A = B}$$

sub_hit (変数への代入)

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma, x : A \vdash a : A}{\Gamma \vdash sh(a; x) : x[a/x] \rightarrow_r a}$$

MLTT⁻ の定理

定理 (同一性の基本的性質)

以下のような $\text{trans}(p, a), p^{-1}, q \circ p$ を構成できる (それらはいずれも略記である)。

移送 (transport)

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash p : A = B}{\Gamma \vdash \text{trans}(p, a) : B}$$

対称律

$$\frac{\Gamma \vdash p : a = b}{\Gamma \vdash p^{-1} : b = a}$$

推移律

$$\frac{\Gamma \vdash p : a = b \quad \Gamma \vdash q : b = c}{\Gamma \vdash q \circ p : a = c}$$

いずれも identity type の帰納法と代入計算の規則から導出できる。🔗🔗🔗

MLTT- の規則 (*dist* と *con* の例)

*dist*_{app}(代入の分配)

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma, x : A \vdash M : \prod_{y:B} C \quad \Gamma, x : A \vdash N : B}{\Gamma \vdash \text{dist}_{app}(M, N; a; x) : \text{app}(M, N)[a/x] \rightarrow_r \text{app}(\text{capp}(d, M[a/x]), N[a/x]) \text{ ただし } d \equiv \text{dist}_{\Pi}(\prod_{y:B} C; a; x)}$$

*con*_{app,r}(関数適用の合同性)

$$\frac{\Gamma \vdash g : N \rightarrow_r N' \quad \Gamma \vdash M : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash N : A \quad \Gamma \vdash N' : A' \quad \Gamma \vdash p : A \rightarrow_r A'}{\Gamma \vdash \text{con}_{app,r}(M, g, p) : \text{app}(M, N) \rightarrow_r \text{app}(M, \text{trans}(\text{eq}(p)^{-1}, N'))}$$

$MLTT^-$ の定理 (= の congruence)

補題 (代入される項の congruence)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash p : C = C' \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash * : C[a/x] = C'[a/x]}$$

定理 (dependent type の congruence (codomain))

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}(i) \quad \Gamma, x : A \vdash B' : \mathcal{U}(i) \quad \Gamma, x : A \vdash p : B = B'}{\Gamma \vdash * : \prod_{x:A} B = \prod_{x:A} B'}$$

ここまでのまとめ

= は、普通の等号の公理 (refl,sym,trans,func) に相当する性質をもつことがわかった

ここまでのまとめ

= は、普通の等号の公理 (refl,sym,trans,func) に相当する性質をもつことがわかった

⇒

$MLTT_u$ と $MLTT^-$ の相互翻訳を考える。

ここまでのまとめ

$=$ は、普通の等号の公理 (refl,sym,trans,func) に相当する性質をもつことがわかった

$\Rightarrow$

$MLTT_u$ と $MLTT^-$ の相互翻訳を考える。

定義

$MLTT^-$ から $MLTT_u$ への型、項、context に対する関数 $|\cdot|$ を次のように定める。

- $|x| \equiv x$
- $|app(f, a)| \equiv app(|f|, |a|)$
- $|capp(p, a)| \equiv |a|$
- $|p| \equiv refl(\text{ただし } p : A \rightarrow_r B)$
- (以下略)

予想

予想

- $MLTT^-$ で $\Gamma \vdash a : A$ なら、 $MLTT_u$ で $|\Gamma| \vdash_u |a| : |A|$ となる
- 任意の A_0 について、 $p_0 : A_0 \rightarrow_r A_1, p_1 : A_1 \rightarrow_r A_2, \dots$ という無限列は存在しない。
あるいは、ある B, p が存在して $p : A_0 \rightarrow_r^* B$ かつ $q : B \rightarrow_r C$ となる q, C が存在しない (ただし $\rightarrow_r^*$ は反射推移閉包)

規則の整備をしたら、簡単な帰納法などで示せることが予想される

予想

予想

$MLTT_u$ での任意の導出 $\Gamma \vdash_u a : A$ に対して、ある Γ', a', A' が存在して $MLTT^-$ で $\Gamma' \vdash a' : A'$ かつ $|\Gamma'| \doteq \Gamma, |a'| \doteq a, |A'| \doteq A$ となる

- 単純な帰納法ではできない (application で引っかかる)

予想

予想

$MLTT_u$ での任意の導出 $\Gamma \vdash_u a : A$ に対して、ある Γ', a', A' が存在して $MLTT^-$ で $\Gamma' \vdash a' : A'$ かつ $|\Gamma'| \doteq \Gamma, |a'| \doteq a, |A'| \doteq A$ となる

帰納法で示そうとした場合

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash app(f, a) : B[a/x]}$$

について、帰納法の仮定よりある $\Gamma', \Gamma'', P, f', a'$ が存在して

$$\Gamma' \vdash f' : P, \Gamma'' \vdash a' : A'$$

となる。しかし Γ' と Γ'' は一致しているかわからない。 P が $\prod_{y:A''} B'$ という形かどうか、ということもわからない。

予想

考えている方針

次のような体系 $MLTT'_u$ を考える。

定義 ($MLTT'_u$)

$MLTT'_u$ を、次のものとする。

- judgement の推論規則は $MLTT_u$ と同様。
- メタな代入 $A\{a/x\}$ は認めず、代わりに記号 $A[a/x]$ を導入する。
- 「 $\Gamma \vdash a : A$ かつ $\Gamma \vdash A \equiv B$ なら $\Gamma \vdash a : B$ 」という規則 (conv) を導入する。
- judgemental equality は対称律・推移律を認めず、また代入が逐次的になるようにする。すなわち β , 代入などに分解する。

関係 $\prec$ の定義

$MLTT'_u$ の judgement と $MLTT^-$ の judgement の間の relation

$$\Gamma \vdash'_u a : A \prec \Gamma' \vdash a' : A'$$

を、例えば次のように定義する

$con_{app,r}$ に対応する生成規則

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash'_u N \doteq N' \prec \Gamma' \vdash g : N_0 \rightarrow_r N'_0 \\ \Gamma \vdash'_u M : \prod_{x:A} B \prec \Gamma' \vdash M' : \prod_{x:A_0} B' \\ \Gamma \vdash'_u N : A \prec \Gamma' \vdash N_0 : A_0 \\ \Gamma \vdash'_u N' : A' \prec \Gamma' \vdash N'_0 : A'_0 \\ \Gamma \vdash'_u A \doteq A' \prec \Gamma' \vdash p : A_0 \rightarrow_r A'_0 \end{array}}{\begin{array}{l} \Gamma \vdash'_u app(M, N) \doteq app(M, N') \\ \prec \Gamma' \vdash con_{app,r}(M', g, p) : \\ app(M', N_0) \rightarrow_r app(M', trans(eq(p)^{-1}, N'_0)) \end{array}}$$

予想

予想

$MLTT'_u$ における任意の judgement $\Gamma \vdash'_u a : A$ に対し、

$$\Gamma \vdash'_u a : A \prec \Gamma' \vdash a' : A'$$

となる $MLTT^-$ の judgement $\Gamma' \vdash a' : A'$ が存在する

これが言えればよいが、これもストレートには言えない。

予想 (主張自体も未定義)

$MLTT'_u$ の任意の judgement $\Gamma \vdash'_u a : A$ に対し、簡約の順番を適当なものとした“良い導出”が存在し、その導出木と同じ形の導出木が $\prec$ の場合でも作れる

“良い導出”とは何か、どのように定式化するかまだわからない

参考文献 I



P. Martin-Löf.
Intuitionistic Type Theory.
Bibliopolis, 1984.



A. Klev.
The Justification of Identity Elimination in Martin-Löf's Type Theory.
Topoi, 38(3), 577–590, 2019.



J. Ladyman and S. Presnell.
Identity in Homotopy Type Theory, Part I: The Justification of Path Induction.
Philosophia Mathematica, 23(3), 386–406, 2015.



J. Ladyman and S. Presnell.
Identity in Homotopy Type Theory: Part II, The Conceptual and Philosophical Status of Identity in HoTT.
Philosophia Mathematica, 25(2), 210–245, 2017.



M. Abadi, L. Cardelli, P.-L. Curien, and J.-J. Lévy.
Explicit Substitutions.
Journal of Functional Programming, 1(4), 375–416, 1991.

参考文献 II



B. van den Berg and M. den Besten.

Quadratic Type Checking for Objective Type Theory.

[arXiv:2102.00905](https://arxiv.org/abs/2102.00905), 2021.