

ミンコフスキー時空における因果様相の論理の強完全性

鈴木 集

東京科学大学 数理・計算科学系 M1

2026/10/24 (MLG 2026)

Section 1

イントロ

目標

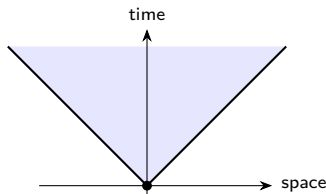
ミンコフスキー時空の因果関係 $\leq, <$ によるフレーム $(\mathbb{R}^n, R)$ の弱完全性を強完全性へ拡張する。

定義

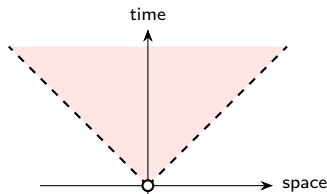
$$x \leq y \iff \sum_{k=1}^{n-1} (y_k - x_k)^2 \leq (y_n - x_n)^2 \text{ かつ } x_n \leq y_n$$

$$x < y \iff \sum_{k=1}^{n-1} (y_k - x_k)^2 < (y_n - x_n)^2 \text{ かつ } x_n < y_n$$

$n = 2$:



$\leq$: 反射的・光速以下



$<$: 非反射的・光速未満

問い：様相言語で物理理論の内容をどの程度・何を記述/区別可能か？

既存結果と強完全性

定義

$L(\mathcal{F})$: フレームクラス $\mathcal{F}$ のすべてのフレームで妥当になる論理式全体の集合

定義

$ad_2 := \Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \rightarrow \Diamond(\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2)$ かつ $.2 := \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$

既存の結果 ($n \geq 2$)

- ① $\Lambda_1 := S4.2 = L(\mathbb{R}^n, \leq)$ (by Goldblatt 1980 [1])
- ② $\Lambda_2 := D4.2 + ad_2 = L(\mathbb{R}^n, <)$ (by Shapirovsky–Shehtman 2003 [2])

定義 [3]

任意の論理式集合 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して、以下が成り立つとき正規様相論理 Λ はフレームクラス $\mathcal{F}$ に対して強完全であるという。

$$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi \implies \Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$$

同値に「 Γ が Λ 無矛盾なら $\mathcal{F}$ で充足可能である」

Section 2

強完全性への拡張の全体像

準備 1

命題変数は可算個とする．正規様相論理 $\Lambda(\Lambda_1$ または $\Lambda_2)$ を考える．

定義

$R \in \{\leq, <\}$, $F_n = (\mathbb{R}^n, R)$ ($n \geq 2$) とおく．一般のフレーム $F = (W, R)$ では $R(x) := \{y \in W \mid xRy\}$ と書く．

定義

$f : F \rightarrow F'$ が p モルフィズム $\iff f(R(x)) = R'(f(x))$ ($\iff$ Forth かつ Back)

補題

全射 p モルフィズム $f : F \rightarrow G$ が存在するとき, Γ が G 上充足可能 $\implies \Gamma$ は F 上充足可能．

命題 ([1],[2])

射影 $\pi : (\mathbb{R}^n, R) \rightarrow (\mathbb{R}^2, R)$, $\pi(x) = (x_1, x_n)$ はそれぞれ全射 p モルフィズムである．

よって, Λ 無矛盾な Γ の F_2 上での充足可能性を示せばよい．

二分木 ($\leq$ のケース)

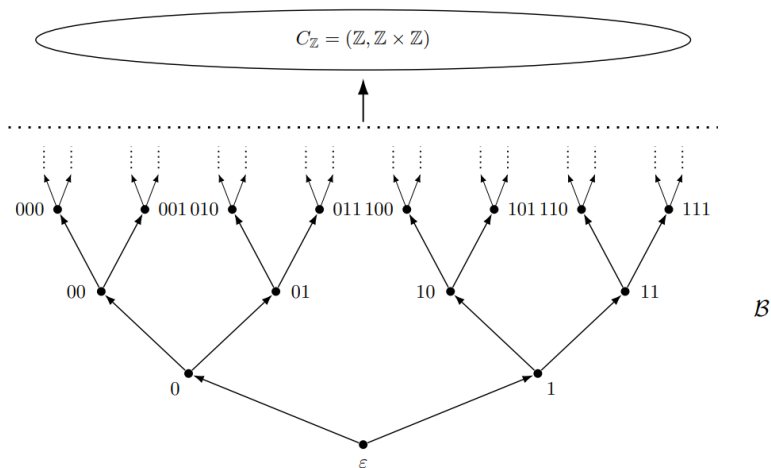


Figure: 無限二分木 B に終点クラスター $C_{\mathbb{Z}}$ を付加したフレーム $B^+ := B + C_{\mathbb{Z}}$. 反射推移閉包をとる. [1] で導入された.

白黒交互二分木 ($<$ のケース)

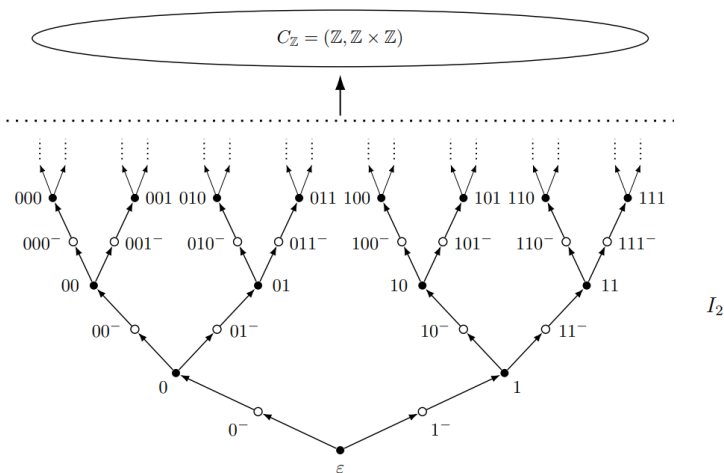


Figure: 白黒交互二分木 I_2 に終点クラスター C_Z を付加したフレーム $I_2^+ := I_2 + C_Z$. 黒が反射点, 白が非反射点. 推移閉包をとる. [2] で導入された.

共通の全体像

- ① 対応する Sahlqvist フレーム条件をみたす強完全なカノニカルモデルから部分モデルを選んで高々可算なターゲット $(F, V)(\Gamma$ を充足する) にする。
- ② ただし終点の存在と 2 の性質を先に対応付け、終点を残す。
- ③ $<$ のときは後で必要な条件 $(*)$ を確保するため、各 $\rho(x)$ も残す。
- ④ F_2 の生成部分フレーム G から B^+, I_2^+ へ全射 p モルフィズムを作る。
- ⑤ 二分木 B^+, I_2^+ からターゲットフレーム F へ全射 p モルフィズムを作る。
- ⑥ 合成して全射 p モルフィズム $G \rightarrow F$ を作る。
- ⑦ 引き戻した G 上の付値を F_2 へ拡張し、同じ点で Γ を充足する。✓

橙：既存証明のアレンジ 赤：ほぼ新規の内容

カノニカルモデル M^Δ をとり、リンデンバウム補題で Γ を極大 Δ 無矛盾集合 Γ^+ へ拡大すると、真理補題より $M^\Delta, \Gamma^+ \models \Gamma$ (Γ を充足する)。生成部分をとることで M^Δ は根 Γ^+ をもつとみなせる。

定義

$$\Omega = \bigcup_{x \in W^\Delta} \{\varphi \mid \Box\varphi \in x\}$$

M^Λ から終点を選ぶ・高々可算化する

補題

継続性・推移性と 2 の対応条件より Ω は Λ 無矛盾であり、極大拡大 Ω^+ は全点から到達可能な終点クラスターに属する。

定義

$$\begin{aligned} W_0 &:= \{\Gamma^+, \Omega^+\} \\ W_{k+1} &:= W_k \cup \{y_{x,\psi} \mid x \in W_k, M^\Lambda, x \models \Diamond\psi\} \\ W' &:= \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k \text{ (高々可算)} \\ &\quad \text{ただし } x R^\Lambda y_{x,\psi} \text{ かつ } M^\Lambda, y_{x,\psi} \models \psi \end{aligned}$$

補題

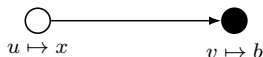
$M' := M^\Lambda|_{W'}$ とおく。任意の $x \in W'$ と φ について、 $M', x \models \varphi \iff M^\Lambda, x \models \varphi$ 。

定理

Λ_1 無矛盾な Γ は高々可算・根付き・反射的・推移的・終点クラスターをもつフレーム F の根で充足可能。

必要条件 (*)

$\Lambda_2(< \text{のとき})$ は p モルフィズム $f : I_2^+ \rightarrow F$ の存在より追加条件が必要になる。
 I_2 の特性「白点 u の直後に黒点 v のみがある」が F へどう移るか。



p モルフィズムの定義と u, v の I_2 上の後続集合が同じなので以下が必要。

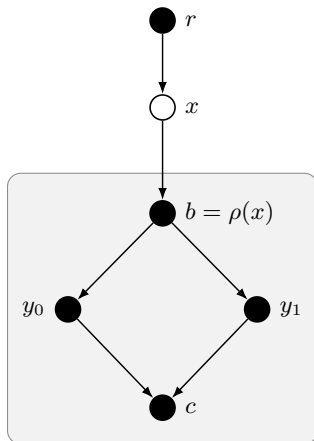
定義

性質 (*): $\forall x \in W \exists b \in R(x) R(x) = R(b)$

注意

(*) から継続性 (D) と 2-稠密性 (ad_2) が得られるので、推移性の元で本質的に強い条件 (逆は成り立たないため)。(*) は元論文 [2] では独立に課されていない。
 それは有限・継続的・推移的なフレームでは ad_2 から (*) が従うためであり、 I_2^+ は有限フレームのターゲット用に作られている。

性質 (*): 後続を失わない反射点へ移る



矢印の推移閉包をとる。

黒丸は反射点，白丸は非反射点。

$$\begin{aligned} R(x) &= \{b, y_0, y_1, c\} \\ &= R(b). \end{aligned}$$

x から b へ進んでも後続は保たれる． y_0 へ進むと y_1 を失うので， y_0 は $\rho(x)$ に選べない．

必要条件と性質 (*) の確保

全射性と Forth より I_2 の根 (黒) は F の根に飛ばす必要があるので, F の根は反射点である. つまり, (*)・推移性・反射根・終点クラスターが F に必要.

定義

性質 (*) をみたす x の後続 b を $\rho(x)$ とおく. このとき $R(\rho(x)) = R(x)$. 特に xRx なら $\rho(x) = x$ とする.

定義

$x \in W^\Lambda$ に対して, $\Sigma_x := \{\varphi \mid \Box\varphi \in x\} \cup \{\Diamond\varphi \mid \Diamond\varphi \in x\}$ とおく.

補題

M^Λ の継続性, 2-稠密性 (ad_2 条件) から Σ_x は Λ 無矛盾である.

極大 Λ 無矛盾拡大 Σ_x^+ に対し, $xR^\Lambda\Sigma_x^+$ かつ $R^\Lambda(\Sigma_x^+) = R^\Lambda(x)$. よって $\rho(x) = \Sigma_x^+$ と選べる ($xR^\Lambda x$ なら x を選ぶ).

$y_{x,\psi}$ の追加だけでは (*) は壊れうるので $\rho(x)$ を追加するよう修正する.

F に対する強完全性 ($<$ のケース)

定義

$$W_0 := \{\Gamma^+, \Omega^+\}$$

$$W_{m+1} := W_m \cup \{y_{x,\psi} \mid x \in W_m, M^\Lambda, x \models \Diamond\psi\} \cup \{\rho(x) \mid x \in W_m\}$$

$$W' := \bigcup_{m=0}^{\infty} W_m$$

補題

可算化後の M' は性質 $(*)$ をもつ。実際,
 $R'(x) = R^\Lambda(x) \cap W' = R^\Lambda(\rho(x)) \cap W' = R'(\rho(x))$.

- ① 終点クラスターの存在: $\Omega^+ \in W'$ ✓
- ② 推移性: 制限モデルなので保存 ✓
- ③ 反射根の存在: 新しい反射点 r から W' の全点へ矢印を加える. Γ は元の点 Γ^+ で充足される. ✓

両ケースで, 得られたフレームを F' と書き, その終点クラスター C のコピー $\hat{C}$ を上に付加した $F := F' + \hat{C}$ を用いる. コピーを同一視する全射 p モルフィズム $F \rightarrow F'$ により, Γ の充足可能性は保たれる.

Section 3

p モルフィズムの構成

切り取った三角形 ∇ から二分木 $B(\leq)$ のケース

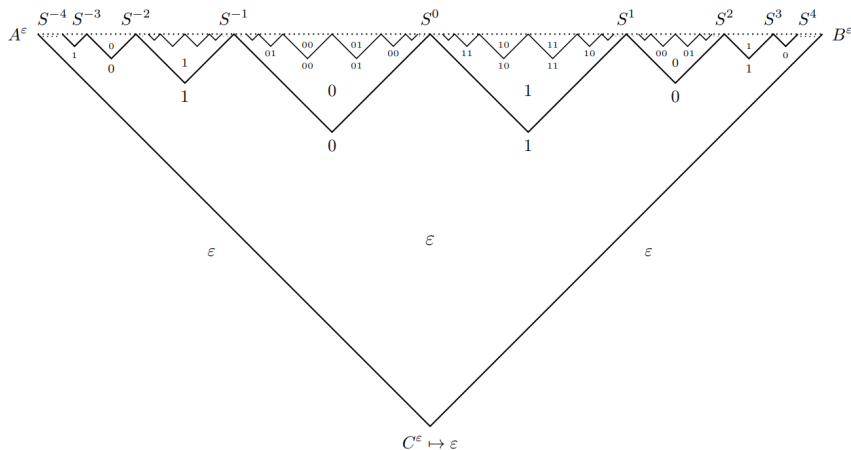


Figure: $G := F_2^{(0,-1)}$ を高さ 0 で切り，下の ∇ をフラクタル分割して B に送る．残りは空間座標の整数部分で $C_{\mathbb{Z}}$ へ送る．全射 p モルフィズム $G \rightarrow B^+$ を得る．

切り取った三角形 ∇ から白黒交互二分木 $I_2(< \text{のケース})$

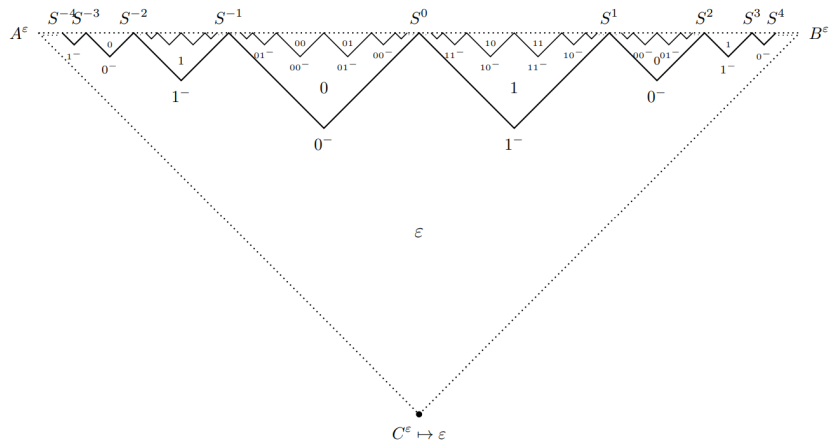
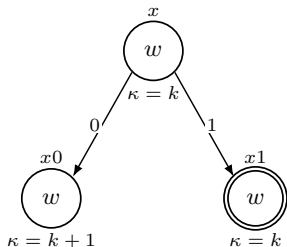


Figure: $G := F_2^{(0,-1)}$ を高さ 0 で切り, 下の ∇ をフラクタル分割して I_2 に送る. 残りは空間座標の整数部分で $C_{\mathbb{Z}}$ へ送る. 全射 p モルフィズム $G \rightarrow I_2^+$ は [2] で証明済み.

全射 p モルフィズム $f : \mathcal{B} \rightarrow F'$ の構成

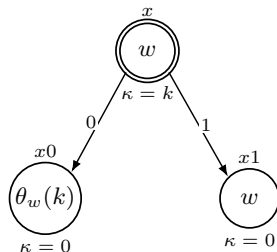
$f(x) = w$, $k = \kappa(x)$ として, 1 回の分岐を次のように定める.

(a) x が通常ノード



一重丸：通常ノード

(b) x が特殊ノード

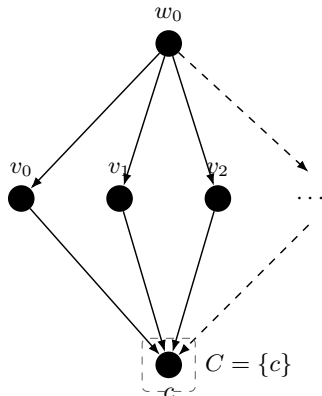


二重丸：特殊ノード

Figure: 帰納的な割り当て規則. ε は通常ノード・カウンター 0 であり根を割り当てる.

円内は割り当て先, 上はノード名, 下はカウンター $\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}$ の値. κ は各ブロックの先頭の 0 の個数を数える. $\theta_w : \mathbb{N} \rightarrow R'(w)$ は番号に対し w の後続を列挙する全射.

具体例：可算個の後続をもつフレーム



黒丸は反射点。矢印の推移閉包をとる。

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ として,

$$W = \{w_0, c\} \cup \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

この例では Q' を終点 c を除いた部分フレームとする。

$$\theta_{w_0}(0) = w_0$$

$$\theta_{w_0}(i+1) = v_i \quad (i \in \mathbb{N})$$

$$\theta_{v_i}(k) = v_i \quad (i, k \in \mathbb{N})$$

具体例

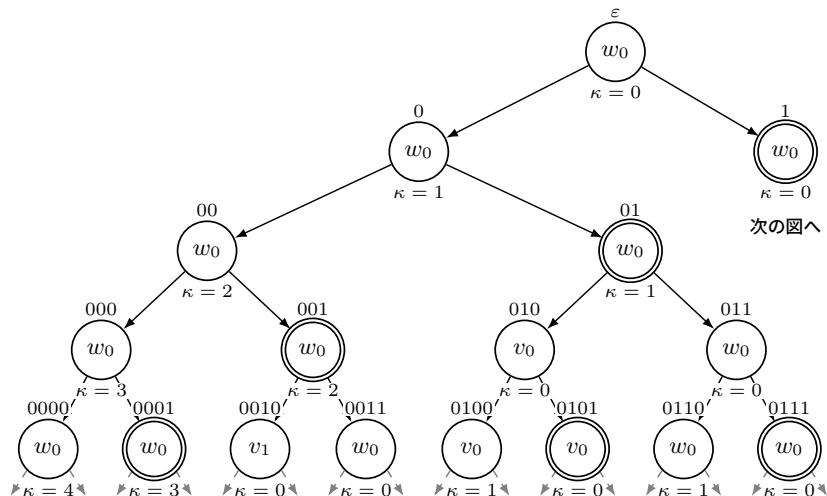


Figure: 0 側 (深さ 4 まで). 一重丸: 通常, 二重丸: 特殊. 二重丸の 1 側では像を保ち, 通常ノード・カウンター 0 に戻る.

具体例：1 側の続き

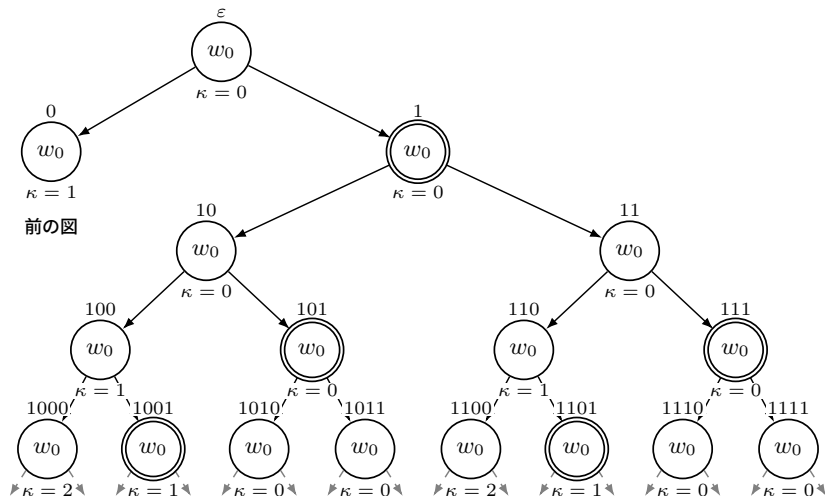


Figure: 1 側 (深さ 4 まで). 円内は $f(x)$, 上は語 x , 下は $\kappa(x)$. 一重丸: 通常, 二重丸: 特殊.

文字列による解釈

注意

直観：「0,1 からなる語を $0^n 10, 0^m 11$ のブロックに分けて読み進め、前者なら次に遷移、後者なら待機。読み終わるたびに通常ノードかつカウンターリセット」

補題

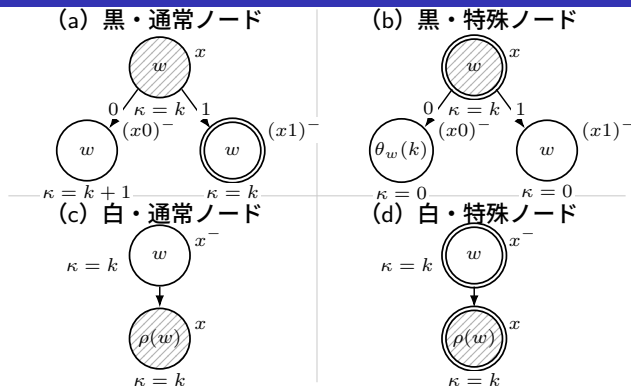
$f : \mathcal{B} \rightarrow F'$ は全射 p モルフィズムである。

証明

- ① Forth 条件は構成の定義より $f(x)R'f(xi)$ ($i = 0, 1$) なので R' の推移性から繰り返せばよい。
- ② Back 条件は通常ノードなら $\sigma(x) = x11$, 特殊ノードなら $\sigma(x) = x1$ に進んで通常ノードに行きカウンターリセットし, $0^n 10$ を読めばよい (n は行きたい v に対応する番号で $\theta_w(n) = v$ をみtas).

以上の割り当て $f : \mathcal{B} \rightarrow F'$ を終点クラスター同士の全射で拡張した $f : \mathcal{B}^+ \rightarrow F$ は所望の条件をすべて満たす。

全射 p モルフィズム $I_2 \rightarrow F'$



斜線：黒ノード 二重丸：特殊．後続列挙の全射 $\theta_w : \mathbb{N} \rightarrow R'(w)$ ，黒ノードの像は $wR'w$ ．
 $f(\varepsilon) = r, \kappa(\varepsilon) = 0, \varepsilon$ は通常かつ黒ノード．

直観と Back

$0^n 10, 0^m 11$ を読みつつ，白 $\rightarrow$ 黒で $\rho(w)$ へ移る． $R'(\rho(w)) = R'(w)$ なので後続は保たれ，目的の像は白点で実現する．終点クラスターへの全射で $I_2^+ \rightarrow F$ へ拡張する．

Section 4

アウトロ

結論と今後

有限フレーム性への依存を可算化することで似た方針で証明できた。

定理

S4.2 はフレーム $(\mathbb{R}^n, \leq)$ ($n \geq 2$) に対して強完全である。

定理

$\Lambda_2 = D4.2 + ad_2$ はフレーム $(\mathbb{R}^n, <)$ ($n \geq 2$) に対して強完全である。

謝辞 (アイデアの帰属 敬称略)

- ① Leonardo Pacheco：可算フレームへの割り当て拡張方針
- ② 鹿島 亮：強完全性の問い, $<$ でのフラクタル分割を $\leq$ でも使用

展望：

- ① $x\alpha y \iff x \leq y$ かつ $x \neq y$ による $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ の弱完全性 [1,4]
(現在未解決. しかし, $n = 2$ のとき既存公理では足りないことは判明)
- ② $L(\mathbb{R}^n, \alpha) = L(\mathbb{R}^{n+1}, \alpha)$ ($n \geq 3$) (関連: [4, §10])
- ③ 時相論理/Hybrid/ μ 計算拡張などによる次元区別.

参考文献

- [1] Robert Goldblatt, “Diodorean Modality in Minkowski Spacetime,” *Studia Logica*, Vol. 39, No. 2–3, 1980, pp. 219–236. DOI: 10.1007/BF00370321.
- [2] Ilya Shapirovsky and Valentin Shehtman, “Chronological Future Modality in Minkowski Spacetime,” *Advances in Modal Logic*, Vol. 4, King’s College Publications, 2003, pp. 437–459.
- [3] 佐野勝彦, 「様相論理入門」, 菊池誠編『数学における証明と真理：様相論理と数学基礎論』第I部, 共立出版, 2016年.
- [4] Ilya Shapirovsky and Valentin Shehtman, “Modal Logics of Regions and Minkowski Spacetime,” *Journal of Logic and Computation*, Vol. 15, No. 4, 2005, pp. 559–574. DOI: 10.1093/logcom/exi039.