

$K + \Box^n \perp$ の正規拡大のクレイグ補間性

倉橋 太志 (神戸大学システム情報学研究科)

第 61 回 MLG 数理論理学研究集会@神戸大学
2026 年 10 月 25 日

概要

- 様相命題論理におけるクレイグ補間性 (CIP) の話.
- S4 の無矛盾な正規拡大のうち CIP をもつものは有限個 (Maksimova).
- GL の無矛盾な正規拡大のうち CIP をもつものはちょうど連続体濃度個 (Maksimova).
- 今回は各 $n \in \mathbb{N}$ について, $K + \Box^n \perp$ の無矛盾な正規拡大の CIP について調べた.

宣伝（本を書きました）

- 様相論理入門 – 形式的証明とクリプキモデルで学ぶ論理体系 – （仮）
- 共立出版
- 2027 年 3 月（予定）

目次

- 第 1 章：古典命題論理の意味論
- 第 2 章：古典命題論理の形式的証明と完全性
- 第 3 章：古典命題論理の補間性
- 第 4 章：様相命題論理の基本性質
- 第 5 章：様相命題論理のクリプキ意味論と完全性
- 第 6 章：有限フレーム性と決定可能性
- 第 7 章：いくつかの正規様相論理
- 第 8 章：様相命題論理の補間性
- 第 9 章：正規様相論理の構造

アウトライン

- ① 正規様相論理におけるクレイグ補間性
- ② 動機と目標
- ③ $K + \Box^n \perp$ の無矛盾正規拡大のクレイグ補間性

1 正規様相論理におけるクレイグ補間性

2 動機と目標

3 $K + \Box^n \perp$ のクレイグ補間性

論理 K と正規様相論理

様相命題論理 K

公理は

- トートロジー
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

規則は

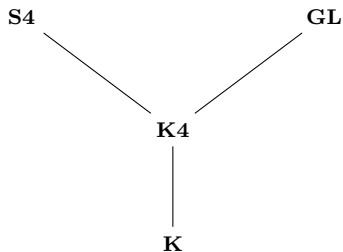
- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (MP)}$$
- $$\frac{A}{\Box A} \text{ (Nec)}$$
- 一様代入

正規様相論理

論理 L が**正規様相論理** : $\iff L$ は K を含み, MP と Nec と一様代入で閉じる

いくつかの正規様相論理

- $K4 = K + (\Box p \rightarrow \Box\Box p)$
- $S4 = K4 + (\Box p \rightarrow p)$
- $GL = K + (\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p)$



クレイグ補間性 (CIP)

論理式 A に含まれる命題変数全体の集合を $v(A)$ と書く。

定義

正規様相論理 L が**クレイグ補間性 (CIP)** をもつとは、任意の論理式 A, B について、 $L \vdash A \rightarrow B$ ならば、ある論理式 C が存在して次を満たすことをいう：

- ① $v(C) \subseteq v(A) \cap v(B)$.
- ② $L \vdash A \rightarrow C$.
- ③ $L \vdash C \rightarrow B$.

定理 (Gabbay 1972; Smoryński 1978; Boolos 1979)

$K, K4, S4, GL$ は CIP をもつ。

正規様相論理の CIP は、正規拡大に一般には保存されない。例えば…

定理 (Maksimova 1982)

$S4.3 = S4 + \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ は CIP をもたない。

論理 L の正規拡大のうち CIP をもつものを調べる。

S4 と GL の無矛盾正規拡大の CIP

定理 (Maksimova 1979–1987)

- S4 の無矛盾な正規拡大で CIP をもつものは高々 36 個.
- そのうち 30 個について CIP が成立.

定理 (Santschi and Vooijs 2026)

残る 6 個も CIP をもつ.

よって S4 の無矛盾な正規拡大で CIP をもつものはちょうど 36 個.

定理 (Maksimova 1989)

GL の無矛盾な正規拡大で CIP をもつものはちょうど連続体濃度個.

① 正規様相論理におけるクレイグ補間性

② 動機と目標

③ $K + \Box^n \perp$ のクレイグ補間性

動機

定理 (Chagroff 1990)

集合 $\{A \mid GL + A \text{ は CIP をもつ}\}$ は決定不能.

高さが有限になる場合はどうか.

予想

各 $n \geq 1$ について, 集合 $\{A \mid GL + A \vdash \Box^n \perp \text{ かつ } GL + A \text{ は CIP をもつ}\}$ は決定可能.

この予想のために...

今回の目標

各 $n \geq 1$ について, より一般の $K + \Box^n \perp$ の正規拡大の CIP を調べる.

まずは $n = 2$ のケースをみる.

$n = 2$ の場合

$m \geq 1$ について

- $\mathcal{G}_m = (\{r, x_1, \dots, x_m\}, R)$
- $R = \{(r, x_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$

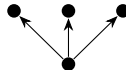
$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{G}_3$



クリプキフレーム $\mathcal{F}$ について, $\text{Log}(\mathcal{F}) := \{A \mid A \text{ は } \mathcal{F} \text{ において妥当}\}$.

事実

$K + \Box^2 \perp$ の無矛盾な正規拡大は

- $K + \Box \perp$,
- $\text{Log}(\mathcal{G}_m)$ ($m \geq 1$),
- $K + \Box^2 \perp$

で尽くされる.

この中でどの論理が CIP をもつだろうか？

$K + \Box^2 \perp$ の無矛盾な正規拡大の CIP

定理 (Rautenberg 1983)

$K + \Box^2 \perp$ の無矛盾な正規拡大で CIP をもつものは次の 4 個：

- $K + \Box \perp$
- $\text{Log}(\mathcal{G}_1)$
- $\text{Log}(\mathcal{G}_2)$
- $K + \Box^2 \perp$.

系

集合 $\{A \mid \text{GL} + A \vdash \Box^2 \perp \text{ かつ } \text{GL} + A \text{ は CIP をもつ}\}$ は決定可能.

一般の場合

- Rautenberg は反射版のフレームの論理が CIP をもたないことを用いて示している。
- しかし、一般にこの方針で非反射フレームの論理の分析ができるわけではない。
- 例えば、4 点狭義全順序フレームの論理は CIP をもつが、その反射版の論理はもたない。



方針

方針

- 以前, locally tabular な $S4$ の正規拡大がリンドン補間性をもつための十分条件をクリプキ意味論と p -モルフィズムを用いて与えた (Kurahashi 2024+).
- 今回も locally tabular な論理が CIP をもつことの, クリプキ意味論と p -モルフィズムに基づく特徴づけ (Maksimova による) を用いて分析する.

① 正規様相論理におけるクレイグ補間性

② 動機と目標

③ $K + \Box^n \perp$ のクレイグ補間性

Local tabularity

定義

正規様相論理 L が **locally tabular** であるとは、命題変数の任意の有限集合 P について、 $v(A) \subseteq P$ をみたす論理式 A 全体を L -同値性で割ることで得られる同値類が有限個であることをいう。

命題

- Locally tabular な論理の正規拡大も locally tabular.
- Locally tabular な正規様相論理は有限フレーム性をもつ.
- $K + \Box^n \perp$ は locally tabular.

p-モルフィズム

定義

$\mathcal{F} = (W, R)$ と $\mathcal{F}' = (W', R')$ をクリプキフレームとする.

- 写像 $f: W \rightarrow W'$ が $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}'$ への **p-モルフィズム** であるとは、次を満たすことをいう：
 - $\forall x, y \in W (xRy \Rightarrow f(x)R'f(y))$,
 - $\forall x \in W \forall z \in W' (f(x)R'z \Rightarrow \exists y \in W (xRy \wedge f(y) = z))$.
- $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}'$ への全射な p-モルフィズムが存在するとき、 $\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の **p-モルフィック像** という.

命題

$\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ の p-モルフィック像ならば、 $\text{Log}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Log}(\mathcal{F}')$.

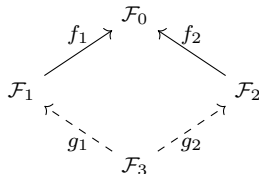
Locally tabular な論理の CIP の特徴づけ

Maksimova による CIP の代数的特徴づけのクリプキフレーム版がある。

定理 (Maksimova 1999)

L を locally tabular な正規様相論理とする。このとき、次は同値：

- ① L は CIP をもつ。
- ② $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を L を妥当とする rooted な有限フレームとし、 $f_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0$ と $f_2 : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_0$ を根を保つ全射 p-モルフィズムとする。
このとき、 L を妥当とする rooted な有限クリプキフレーム $\mathcal{F}_3$ と、根を保つ全射 p-モルフィズム $g_1 : \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathcal{F}_1$ および $g_2 : \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathcal{F}_2$ が存在して、
 $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ となる

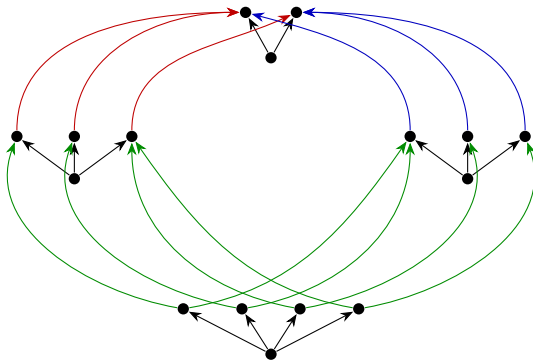


$\mathcal{G}_3$ が CIP をもたないこと

Maksimova の特徴づけを用いると、例えば次が示せる。

命題

$\text{Log}(\mathcal{G}_3)$ は CIP をもたない。



主定理

Maksimova の特徴づけを用いて、次が示せた。

主定理

各 $n \in \mathbb{N}$ について、 $K + \Box^n \perp$ の無矛盾な正規拡大で CIP をもつものは有限個。

証明のアウトライン。

- L を $K + \Box^n \perp$ の CIP をもつ無矛盾正規拡大とする。
- $\mathcal{F} \not\models L$ である有限 rooted フレーム $\mathcal{F}$ のうち、真に小さい全射 p-モルフィック像がすべて L を妥当にするようなものを考える。
- L の有限フレーム性から、そのような $\mathcal{F}$ 全体で L を特徴づけられる。
- そのような $\mathcal{F}$ が有限個しかないことを示せばよい。
- Maksimova の特徴づけを用いると、そのような $\mathcal{F}$ には同じ後続 ($R[x] = \{y \mid xRy\}$) をもつ点は 4 点以上ないことが分かる。
- $c_0 = 3$, $c_{k+1} = 3 \cdot 2^{c_k}$ とすると $|\mathcal{F}| \leq \sum_{k < n} c_k$.



今後の展望

予想

各 $n \geq 1$ について, 集合 $\{A \mid GL + A \vdash \Box^n \perp \text{ かつ } GL + A \text{ は CIP をもつ}\}$ は決定可能.

$n = 2$ のときのように, $GL + \Box^n \perp$ の無矛盾正規拡大のうち CIP をもつものを分類すればよい.