

Abstract provability structure の証明論と近傍意味論

熊坂翼

神戸大学大学院システム情報学研究科 (M2)

第 61 回 MLG 数理論理学研究集会
2026/10/25

アウトライン

APS とは

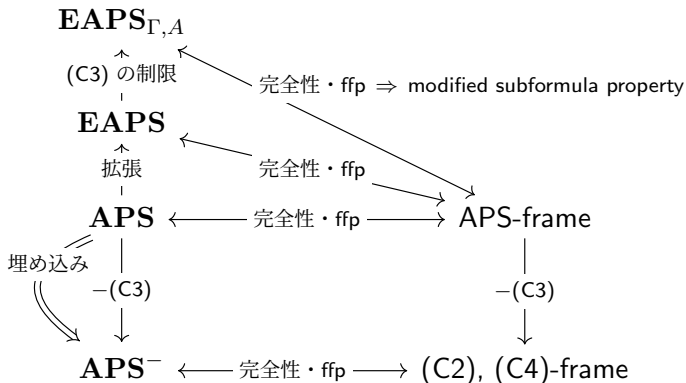
- APS は証明可能性 $\Box$ と反証可能性 $\Box$ を備えた順序集合 (Beklemishev and Shamkanov (2016) [1]).
- この APS を不等式 $A \leq B$ を導出する様相論理と考える.

本発表の内容

APS の証明論と近傍意味論を与えた.

- ① 証明体系 **APS**, **APS**⁻ の導入とその analytic cut property.
- ② 近傍意味論 APS-frame の導入と完全性・有限フレーム性.
- ③ **APS** の modified subformula property.
- ④ **APS** から **APS**⁻ への (部分的な) 埋め込み.

登場人物



本研究の (技術的な) 目的

(C3) 規則の制御！

目次

① APS とは

② APS の証明論

③ APS の意味論

④ 完全性証明

⑤ 結論と今後の展望

ゲーデルの第二不完全性定理

定理 (第二不完全性定理 (G2))

T : 適切な仮定を満たす算術理論.

T が無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner)$

- $\text{Pr}_T(x)$ は, 「 x は T で証明可能」を表す論理式.
- G2 は理論・論理が弱い算術 ($\text{I}\Sigma_1$, HA , $\text{R}^\#$ など) でも成り立つ.

問題

G2 のための算術的・論理的原理はどこまで弱められるか?

Abstract provability structure (1)

APS は、かなり弱い構造のもとで不動点や G2 を調べるための枠組み (Beklemishev & Shamkanov (2016)) .

APS の特徴

- 2つの単項演算子 $\Box$, $\Box$ と半順序 $\leq$ を備えた順序集合.
- $\top, \perp$ が含まれるが, $\perp$ は最小元とは仮定しない.
- $\neg, \wedge, \rightarrow$ などの論理結合子を持たない.
- $x \leq y$ は $T \vdash x \rightarrow y$
 $\Box x$ は x の証明可能性 $\text{Pr}_T(x)$
 $\Box x$ は x の反証可能性 $\text{Pr}_T(\neg x)$
を表すことを意図している.
 - ただし, ブール代数上でも $\Box x \neq \Box \neg x$.

Abstract provability structure (2)

定義 (Abstract provability structure)

構造 $S = \langle L, \leq, \top, \perp, \Box, \boxtimes \rangle$ が

Abstract provability structure (APS) とは,

- $\langle L, \leq \rangle$ は前順序集合
- $\top, \perp \in L$
- $\Box, \boxtimes$ は L 上の演算

で, 任意の $x, y \in L$ について次を満たすもの:

- (C1) : $x \leq y$ ならば, $\Box x \leq \Box y$ かつ $\boxtimes y \leq \boxtimes x$. (M に対応)
- (C2) : $\top \leq \boxtimes \perp$. (N に対応)
- (C3) : $x \leq \Box y$ かつ $x \leq \boxtimes y$ ならば, $x \leq \boxtimes \top$. ($\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{D}$ の対偶に対応)
- (C4) : $\boxtimes x \leq \Box \boxtimes x$. (4 に対応)
- (C5) : $x \leq \top$. ($\top$ が最大元)

Abstract provability structure (2)

定義 (Abstract provability structure)

構造 $S = \langle L, \leq, \top, \perp, \Box, \boxtimes \rangle$ が

Abstract provability structure (APS) とは,

- $\langle L, \leq \rangle$ は前順序集合
- $\top, \perp \in L$
- $\Box, \boxtimes$ は L 上の演算

で, 任意の $x, y \in L$ について次を満たすもの:

(C1) : $x \leq y$ ならば, $\Box x \leq \Box y$ かつ $\boxtimes y \leq \boxtimes x$. (M に対応)

(C2) : $\top \leq \boxtimes \perp$. (N に対応)

(C3) : $x \leq \Box y$ かつ $x \leq \boxtimes y$ ならば, $x \leq \boxtimes \top$. ($\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{D}$ の対偶に対応)

(C4) : $\boxtimes x \leq \Box \boxtimes x$. (4 に対応)

(C5) : $x \leq \top$. ($\top$ が最大元)

Abstract provability structure (3)

定義

- S が**無矛盾** : $\Longleftrightarrow \top \not\leq \perp$.
- x は S で**反証可能** : $\Longleftrightarrow x \leq \perp$.
- p は S の**ゲーデルの不動点** : $\Longleftrightarrow p = \Box p$.
- 次は APS における G2 に対応する結果 (「 $\Box \top$ が反証できない」)
 - $\Box \top$ は体系の矛盾性「 $\top$ が反証できる」を表す.

定理 (Beklemishev & Shamkanov, 2016)

APS S にゲーデルの不動点 $p = \Box p$ が存在するならば、次が成り立つ.

- ① S が無矛盾ならば, $\Box \top$ は反証可能でない. (G2)
- ② $\Box \Box \top = \Box \top$. (形式化された G2)
- ③ $p = \Box \top$. (ゲーデルの不動点の一意性)

本研究の主題

- APS は (C3) 規則が特徴的.

(C3) 規則 (再掲)

$$\frac{x \leq \Box y \quad x \leq \Box y}{x \leq \Box \top} \text{ (C3)}$$

- (C3) は APS の不動点性を特徴付ける (Kumasaka & Kurahashi [3]).
- 一方, (C3) を順序集合の上で扱うのは複雑.
 - $x, y, \Box y, \Box y, \Box \top$ の 5 点を常に見ながら構造を作る必要がある.

本研究では, APS での (C3) 規則をより精緻に調べるために,
APS の証明論と近傍意味論を与えた.

目次

① APS とは

② APS の証明論

③ APS の意味論

④ 完全性証明

⑤ 結論と今後の展望

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\frac{}{A \leq A} \text{ (refl)}$$

$$\frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)}$$

(*refl*) の A は命題変数または $\perp$ とする。

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} \qquad \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box})
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする。

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfI)} \qquad \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box}) \\
 \\
 \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)}
 \end{array}$$

(rfI) の A は命題変数または $\perp$ とする。

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} \qquad \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)}
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする。

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す.

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} \quad \frac{\Box A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C4)}
 \end{array}
 \quad \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする.

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す.

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} \qquad \frac{}{A \leq \perp} \text{ (C5)} \qquad \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box}) \quad \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \\
 \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} \qquad \frac{\Box A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C4)}
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする.

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す.

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める.

$$\begin{array}{lll}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} & \frac{}{A \leq \perp} \text{ (C5)} & \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq B}{\Box B \leq \Box A} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \frac{\top \leq B}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{\Box A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C4)}
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする.

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfI)} & \frac{}{A \leq \perp} \text{ (C5)} & \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \\
 \frac{\top \leq B}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{\Box A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C4)}
 \end{array}$$

(rfI) の A は命題変数または $\perp$ とする。

- (cut) だけでなく, (C3) も論理式を消去してしまう。

証明体系としての APS

前順序集合として APS の定義を、次のように書き直す。

定義

証明体系 **APS** を次の公理と規則で定める。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{}{A \leq A} \text{ (rfl)} & \frac{}{A \leq \perp} \text{ (C5)} & \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} \text{ (cut)} \\
 \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C1}_{\Box}) & \frac{A \leq \Box C \quad A \leq \Box C}{A \leq \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \frac{\top \leq B}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{B \leq \perp}{A \leq \Box B} \text{ (}\Box\text{-Nec)} & \frac{\Box A \leq B}{\Box A \leq \Box B} \text{ (C4)}
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とする。

- (cut) だけでなく, (C3) も論理式を消去してしまう。

APS, EAPS の証明論的事実

定義

$APS^- = APS - (C3)$.

定理

- APS^- はカット除去可能.
- APS は, 次の意味で *analytic cut property* を持つ: $APS \vdash A \leq B$ ならば, 全ての (cut) が次の形である $A \leq B$ の証明図が存在する.

$$\frac{\frac{D \leq \Box C \quad D \leq \Box C}{D \leq \Box \top} (C3) \quad \frac{\dots}{\Box \top \leq E} (C1_{\Box}) \text{ または } (C4)}{D \leq E} (cut)$$

APS^- , APS は (cut) に対しては振る舞いがよい

(C3) の制御に向けて

APS の analytic cut property (再掲)

APS は、次の意味で analytic cut property を持つ：**APS** $\vdash A \leq B$ ならば、全ての (cut) が次の形である $A \leq B$ の証明図が存在する。

$$\frac{\frac{\frac{D \leq \Box C}{D \leq \Box \top} \quad \frac{D \leq \Box C}{D \leq \Box \top} \text{ (C3)} \quad \frac{\dots}{\Box \top \leq E} \text{ (C1}_{\Box}\text{) または (C4)}}{D \leq E} \text{ (cut)}$$

- **APS** はカットに対してはよい性質を持つ。
- しかし、依然として (C3) 規則が証明探索を阻む。
- (C3) 規則を制御するため、**APS** に意味論を与え、意味論的に modified subformula property を示す (cf. Takano [5]) 。

目次

- 1 APS とは
- 2 APS の証明論
- 3 APS の意味論
- 4 完全性証明
- 5 結論と今後の展望

pre APS-frame

Kogure & Kurahashi [4] の MN-frame を二様相化し、APS の近傍意味論を与える。

定義

$F = \langle W, W^\perp, \prec^+, \prec^- \rangle$ が **pre APS-frame** とは、

- W は非空集合, $W^\perp \subseteq W$.
- $\prec^+, \prec^- \subseteq W \times (\mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\})$.
- $\prec^+, \prec^-$ は次の単調性を満たす：

$$x \prec^\pm V \ \& \ V \subseteq U \Rightarrow x \prec^\pm U.$$

$\prec^+, \prec^-$ はそれぞれ $\Box, \boxtimes$ のための関係.

pre APS-model と妥当性

定義

pre APS-frame F 上の**モデル**とは、命題変数の真偽を任意に定め、次で拡張した充足関係 $\Vdash$ のこと。

- $x \Vdash \top$.
- $x \Vdash \perp \iff x \in W^\perp$.
- $x \Vdash \Box A \iff \forall V \in \mathcal{P}(W)(x \prec^+ V \Rightarrow \exists y \in V(y \Vdash A))$.
- $x \Vdash \Box A \iff \forall V \in \mathcal{P}(W)(x \prec^- V \Rightarrow \exists y \in V(y \nVdash A))$.

定義

$A \leq B$ が *pre APS-frame* F で **妥当** とは、 F 上の任意のモデルと任意の $x \in W$ について、 $x \Vdash A$ ならば $x \Vdash B$.

APS-frame

定義

$$(C2) : \forall x \in W \forall V \in \mathcal{P}(W) (x \prec^- V \Rightarrow \exists y \in V (y \notin W^\perp))$$

$$(C3) : \forall x \in W ((\exists V \in \mathcal{P}(W) (x \prec^- V)) \\ \Rightarrow \forall U \in \mathcal{P}(W) [(x \prec^+ U) \vee (x \prec^- (W \setminus U))])$$

$$(C4) : \forall x \in W \forall V \in \mathcal{P}(W) \forall (U_y)_{y \in V} [(x \prec^+ V \wedge \forall y \in V (y \prec^- U_y)) \\ \Rightarrow x \prec^- \bigcup_{y \in V} U_y]$$

(C2), (C3), (C4) を全て満たす *pre APS-frame* を **APS-frame** とよぶ.

$\text{Log}(F)$ を *pre APS frame* F で妥当な不等式全体とする.

命題

任意の *pre APS-frame* F について, 以下は同値.

- F が *APS-frame*.
- $\text{Log}(F)$ が規則 ($\boxtimes$ -Nec), (C3), (C4) で閉じる.

APS の健全性

命題

任意の *pre APS-frame* F , 論理式 A について,

- $A \leq A$, $A \leq \top \in \text{Log}(F)$ (*rfl*, (*C5*) で閉じる).
- $\text{Log}(F)$ は (*cut*), ($C1_{\Box}$), ($C1_{\Box}$), ($\Box\text{-Nec}$) で閉じる.

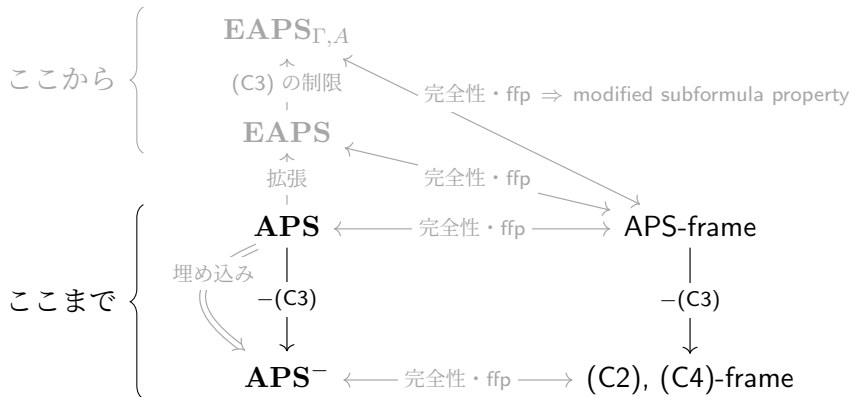
系

- **APS** は *APS-frame* に対して健全.
- **APS⁻** は (*C2*), (*C4*)-*frame* に対して健全.

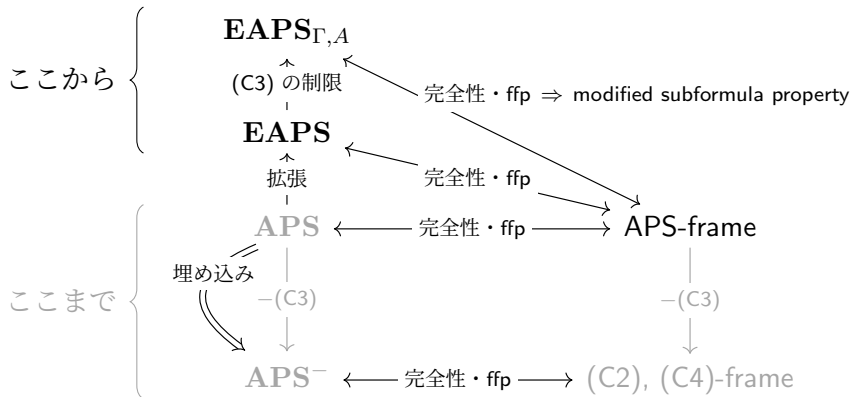
目次

- ① APS とは
- ② APS の証明論
- ③ APS の意味論
- ④ 完全性証明
- ⑤ 結論と今後の展望

ここまでのまとめ



ここまでのまとめ



証明体系 EAPS

- APS をそのまま用いると完全性の議論が通らない.
- 不等式を**複数前件**のシークエントに拡張した **EAPS** を考える.

定義

EAPS を次の公理と規則で定める.

$$\begin{array}{llll}
 \frac{}{A \Rightarrow A} (rfl) & \frac{}{\Rightarrow \perp} (C5) & \frac{\Gamma \Rightarrow A}{B, \Gamma \Rightarrow A} (W) & \frac{\Gamma \Rightarrow B \quad B, \Gamma' \Rightarrow A}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A} (cut) \\
 \frac{A \Rightarrow B}{\Box A \Rightarrow \Box B} (C1_{\Box}) & \frac{A \Rightarrow B}{\Box B \Rightarrow \Box A} (C1_{\Box}) & \frac{\Gamma \Rightarrow \Box C \quad \Gamma \Rightarrow \Box C}{\Gamma \Rightarrow \Box \top} (C3) & \\
 \frac{\Rightarrow B}{\Rightarrow \Box B} (\Box\text{-Nec}) & \frac{B \Rightarrow \perp}{\Rightarrow \Box B} (\Box\text{-Nec}) & \frac{\Box A \Rightarrow B}{\Box A \Rightarrow \Box B} (C4) &
 \end{array}$$

(rfl) の A は命題変数または $\perp$ とし, Γ, Γ' は論理式の多重集合とする.

- (C3) 規則の前件が複数になっていることに注意する.

APS と EAPS

$\mathbf{EAPS}^- = \mathbf{EAPS} - (\text{C3})$ とする.

定理

- $\mathbf{EAPS}^-$ はカット除去可能.
- $\mathbf{EAPS}$ は $\mathbf{APS}$ と同様の *analytic cut property* を持つ.

$\mathbf{EAPS}^-$, $\mathbf{EAPS}$ は $\mathbf{APS}^-$, $\mathbf{APS}$ の (単一前件に対しての) 保存拡大.

命題

任意の論理式 A, B について次が成り立つ.

- ① $\mathbf{APS}^- \vdash A \leq B \iff \mathbf{EAPS}^- \vdash A \Rightarrow B$
- ② $\mathbf{APS} \vdash A \leq B \iff \mathbf{EAPS} \vdash A \Rightarrow B$

完全性と有限フレーム性

EAPS は APS-frame に対して完全であり, 有限フレーム性を持つ.

定理

任意のシークエント $\Gamma \Rightarrow A$ について, 次は同値.

- ① **EAPS** $\vdash \Gamma \Rightarrow A$.
- ② $\Gamma \Rightarrow A$ は全ての APS-frame で妥当.
- ③ $\Gamma \Rightarrow A$ は全ての有限な APS-frame で妥当.

ここで $\Gamma \Rightarrow A$ が pre APS-frame F で妥当 : $\iff$
 $\forall M \text{ on } F \forall x \in W ((\forall B \in \Gamma (x \Vdash B)) \Rightarrow x \Vdash A)$.

系

- ① **EAPS**⁻ は有限 (C2), (C4)-frame 全体のクラスに対して完全.
- ② **EAPS**, **EAPS**⁻ は決定可能.

完全性と有限フレーム性

EAPS が APS の保存拡大であることから、次が従う.

系

- ① APS は有限 *APS-frame* のクラスに対し健全かつ完全.
- ② APS^- は有限 *(C2), (C4)-frame* のクラスに対し健全かつ完全.
- ③ APS, APS^- は決定可能.

完全性の証明

完全性証明では、シークエントであることが重要.

定義

多重集合の組 $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ が**極大無矛盾**とは, $\Gamma \cup \Delta = \mathbf{MF}$ かつ
任意の $A \in \Delta$ について $\mathbf{EAPS} \not\vdash \Gamma \Rightarrow A$. ($\mathbf{MF}$ は様相論理式全体)

定義

カノニカルモデル $\langle W, W^\perp, \prec^+, \prec^- \rangle$ を次のように定める.

- ① W を極大無矛盾集合 $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ の全体.
- ② $W^\perp = \{ \langle \Gamma, \Delta \rangle : \perp \in \Gamma \}$
- ③ $x \prec^+ V \iff \forall \Box C \in \Gamma_x \exists y \in V. C \in \Gamma_y$
- ④ $x \prec^- V \iff \forall \Box C \in \Gamma_x \exists y \in V. C \in \Delta_y$

有限フレーム性は同様の有限モデルを構成する.

カノニカルモデルの (C3)-条件の証明の方針

- ① 任意の $x = \langle \Gamma_x, \Delta_x \rangle \in W$, $U \in \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$ をとる.
- ② $\exists V (x \prec^- V) \ \& \ x \not\prec^+ U$ ならば $x \prec^- W \setminus U$ を示す.
- ③ 仮定から得られた $\Box E, \Box D \in \Gamma_x$ に対し, $\langle \{E\}, \{D\} \rangle$ の極大無矛盾集合への拡大が求めるもの.
よって, $\langle \{E\}, \{D\} \rangle$ の無矛盾性を示せばよい.
- ④ もし $\langle \{E\}, \{D\} \rangle$ が矛盾するとしたら, **EAPS** $\vdash E \Rightarrow D$ である.
- ⑤ この時, 以下より **EAPS** $\vdash \Gamma_x \Rightarrow \Box \top$ である.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{E \Rightarrow D}{\Box E \Rightarrow \Box D} \text{ (C1}_{\Box})}{\Box \mathbf{E}, \Box \mathbf{D} \Rightarrow \Box D} \text{ (W)} \quad \frac{\frac{\overline{\overline{\Box D \Rightarrow \Box D}}}{\Box \mathbf{E}, \Box \mathbf{D} \Rightarrow \Box D} \text{ (W)}}{\Box \mathbf{E}, \Box \mathbf{D} \Rightarrow \Box \top} \text{ (C3)} \\
 \frac{\Box \mathbf{E}, \Box \mathbf{D} \Rightarrow \Box \top}{\Gamma_x \Rightarrow \Box \top} \text{ (W)}
 \end{array}$$

- ⑥ しかし $\Box E, \Box D \in \Gamma_x$, $\Box \top \in \Delta_x$ (左の仮定から) より x の無矛盾性に反する.

EAPS の必要性について

- もし、APS の定義で自然に無矛盾性を定めたとする。

定義

$\langle \Gamma, \Delta \rangle$ が無矛盾 : $\iff \forall A \in \Gamma \forall B \in \Delta. \mathbf{APS} \not\vdash A \leq B$

- 先の議論では $\Box E, \Box D \in \Gamma_x$ を取り,

$$\frac{\frac{\Box E \Rightarrow \Box D}{\Box E, \Box D \Rightarrow \Box D} (W) \quad \frac{\Box D \Rightarrow \Box D}{\Box E, \Box D \Rightarrow \Box D} (W)}{\Box E, \Box D \Rightarrow \Box \top}$$

の形で (C3) を適用した。

- 上の定義で同じ議論をするには、 $\Box E \wedge \Box D$ に相当する **1つ**の論理式が必要だが、これは APS の論理式として書けない。
- ここでは $\Box E \wedge \Box D$ を多重集合 $\Box E, \Box D$ と表現し、うまく議論が通った。この意味で、複数前件のシークエントが必要。

modified subformula property

完全性証明を修正することで、**EAPS** の modified subformula property が得られ、厄介な (C3) 規則の適用を有限に制限できる (Takano [5] の方法)

定義

- $\overline{Sub(\Gamma, A)} := \text{sub}(\Gamma) \cup \text{sub}(A) \cup \{\Box \Box C, \Box C \mid \Box C \in \text{sub}(\Gamma) \cup \text{sub}(A)\} \cup \{\top, \Box \top, \Box \top, \Box \Box \top, \perp, \Box \perp, \Box \Box \perp, \Box \perp\}.$
- EAPS** _{Γ, A} : (C3) の適用を有限集合 $\overline{Sub(\Gamma, A)}$ に制限した体系.

定理

- $\overline{Sub(\Gamma', A')} \subseteq \overline{Sub(\Gamma, A)}$ なる Γ', A' について、以下は同値.
 - EAPS** _{Γ, A} $\vdash \Gamma' \Rightarrow A'$
 - 全ての APS-frame で $\Gamma' \Rightarrow A'$ が妥当.
- EAPS** $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ ならば、 $\Gamma \Rightarrow A$ の *analytic cut proof* であって、その中に $\overline{Sub(\Gamma, A)}$ の論理式のみが現れるものがある.

APS から $\mathbf{APS}^-$ への埋め込み

modified subformula property を用いて証明探索を行うことで、
 $\mathbf{APS}$ から $\mathbf{APS}^- (= \mathbf{APS} - (C3))$ へのある種の埋め込みが得られる。

定義

$\top$ または $\Box^{k_0} \Box \Box^{k_1} \dots \Box^{k_n} \Box \top$ の形の論理式に対して, nf を次で定める。

- $\text{nf}(\top) := \top$
- $\text{nf}(\Box A') := \Box \text{nf}(A')$
- $\text{nf}(\Box A') := \begin{cases} \Box \top & (\text{if } \mathbf{APS}^- \vdash \Box \text{nf}(A') \leq \text{nf}(A')) \\ \Box \text{nf}(A') & (\text{otherwise}) \end{cases}$

定理 (assisted by AI)

$\mathbf{APS} \vdash A \leq B \iff \mathbf{APS}^- \vdash \text{nf}(A) \leq \text{nf}(B)$. (A, B は上記の形)

埋め込み nf の応用: 不動点性の反例

Δv を変数 v に $\square$ と $\boxtimes$ を有限回適用して得られる演算とする.

問題 (Kumasaka. & Kurahashi (2026+) [3])

$\boxtimes$ を 4 以上の偶数個含む演算 Δv は常に不動点をもつか?

埋め込み nf を用いて問題を $\mathbf{APS}^-$ の証明探索に帰着することで、この問題に否定的に回答できた.

命題 (assisted by AI)

$\Delta v := \boxtimes \square \boxtimes \boxtimes \square \boxtimes \square^2 v$ とする.

このとき、任意の論理式 A に対し $\mathbf{APS} \not\models \Delta A = A$.

目次

- ① APS とは
- ② APS の証明論
- ③ APS の意味論
- ④ 完全性証明
- ⑤ 結論と今後の展望

結論

APS^- , APS は以下の性質を持つ論理である.

- APS^- はカット除去可能.
 - APS は analytic cut property を持つ.
 - APS は APS -frame に対し完全かつ有限フレーム性を持つ.
 - APS は modified subformula property を持つ.
 - APS から APS^- へのある種の埋め込み nf が存在する.
-
- APS は弱いですが, 証明論的・意味論的によい性質を持つ.
 - 特に (C3) 規則は厄介だが, 十分制御できる規則.

今後の展望

今後の展望として、以下の課題を考えている。

- **APS** の算術的な基礎づけ.
 - 何らかの意味での算術的完全性.
 - 自然に APS が現れる算術体系.
- 論理結合子を追加した拡張.
 - APS は元々不完全性定理と構造規則の関係を調べるための道具.
 - $\wedge, \otimes, \rightarrow$ を加えた時、どのような論理になるか？
 - 古典・非古典算術のメタ理論的な分析に応用できるか？
(特に interpretability logic の文脈で)
- $\boxtimes$ と $\Box\neg$ の差異の分析 (この差異は本質的？アドホックなもの？).

参考文献 I



L. Beklemishev and D. Shamkanov. Some abstract versions of Gödel's second incompleteness theorem based on non-classical logics. In *Liber Amicorum Alberti: A Tribute to Albert Visser*, volume 30, pages 15–29, 2016.



R. G. Jeloslow. Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 38(3): 359-367, 1973.



T. Kumasaka and T. Kurahashi. Fixed points in abstract provability structures. arXiv:2608.29914, 2026+.



H. Kogure and T. Kurahashi. Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 174(7):103271, 2023.



M. Takano. A modified subformula property for the modal logics K5 and K5D. *Bulletin of the Section of Logic*, 30(2), 2001.



菊池誠 編. 『数学における証明と真理：様相論理と数学基礎論』. 共立出版, 2016.

補足: APS の証明論的事実

$\mathbf{EAPS}$, $\mathbf{EAPS}^-$ は weakening しか入っていないが, メタの縮約が可能.

補題

- ① $\mathbf{EAPS} \vdash B, B, \Gamma \Rightarrow A$ ならば, $\mathbf{EAPS} \vdash B, \Gamma \Rightarrow A$.
- ② $\mathbf{EAPS}^- \vdash B, B, \Gamma \Rightarrow A$ ならば, $\mathbf{EAPS}^- \vdash B, \Gamma \Rightarrow A$.

補足: 証明論的分析から見える APS の性質

APS は弱く、導出できる不等式は非常に制限される.

命題

- ① $\mathbf{APS} \vdash A \leq \perp$ ならば $A \equiv \perp$.
- ② $\mathbf{APS} \vdash \perp \leq B$ ならば, $B \equiv \perp$ または $\mathbf{APS} \vdash B = \top$.
- ③ A が $\boxtimes$ で始まらないとき, $\mathbf{APS} \vdash A \leq \boxtimes \top \iff A \equiv \square \perp$.

また, APS では Löb 規則が成り立つ.

命題

$\mathbf{APS} \vdash \square A \leq A$ ならば $\mathbf{APS} \vdash \top \leq A$.

補足: EAPS の部分論理

完全性の議論を繰り返すと次が示せる（有限フレーム性も同様）。

定理

$\Lambda = (rfl) + (cut) + (C5) + (C1_{\Box}) + (C1_{\Box}) + (\Box\text{-Nec})$ とする。

- ① Λ は全ての *pre APS-frame* からなるクラスと健全かつ完全。
- ② $\Lambda + (\Box\text{-Nec})$ は全ての $(C2)$ -frame からなるクラスと健全かつ完全。
- ③ $\Lambda + (C3)$ は全ての $(C3)$ -frame からなるクラスと健全かつ完全。
- ④ $\Lambda + (C4)$ は全ての $(C4)$ -frame からなるクラスと健全かつ完全。

系

$\text{APS}^- = \Lambda + (\Box\text{-Nec}) + (C4)$ は $(C2)$, $(C4)$ frame 全体のクラスと完全。

補足: nf, leq について (1)

より強く次が示せる. $X \equiv Y$ は X, Y が記号列として等しいこと.

定理

$$\mathbf{APS} \vdash A = B \iff \text{nf}(A) \equiv \text{nf}(B).$$

これは次から従う.

命題

A, B を $\top$ または $\triangle \boxtimes \top$ の形の論理式とする. 述語 $\text{leq}(A, B)$ を次のように定める.

- $\text{leq}(A, \top) = \text{true}$
- $B \neq \top$ の時 $\text{leq}(\top, B) = \text{false}$
- $\text{leq}(\square^a \boxtimes A, \square^b \boxtimes B) = (a \leq b) \wedge \text{leq}(B, A).$

この時 $\mathbf{APS}^- \vdash A \leq B \iff \text{leq}(A, B).$

特に $\mathbf{APS}^- \vdash A = B \iff \text{leq}(A, B) \ \& \ \text{leq}(B, A) \iff A \equiv B.$

補足: nf, leq について (2)

nf の定義は次の事実に由来する.

命題

A を $\top$ または $\triangle \boxtimes \top$ の形の論理式とする. 以下は同値.

- ① ある $\triangle \boxtimes \top$ の形の論理式 C に対して, $\mathbf{APS}^- \vdash \boxtimes A \leq \square C$ かつ $\mathbf{APS}^- \vdash \boxtimes A \leq \boxtimes C$.
- ② $\mathbf{APS}^- \vdash \boxtimes A \leq A$.

補足: nf, leq について (3)

leq の定義は次の事実に由来する.

命題

A, B を上記の形の論理式で $B \not\equiv \top$ とする. $\mathbf{APS}^- \vdash A \leq B$ の *cut-free proof* の最後の規則は $\text{head}(A), \text{head}(B) := A, B$ の先頭の $\square$ の数で一意に定まる:

$$\text{head}(A) \geq 1, \text{head}(B) \geq 1 \quad (C1_{\square})$$

$$\text{head}(A) = 0, \text{head}(B) \geq 1 \quad (C4)$$

$$\text{head}(A) = \text{head}(B) = 0 \quad (C1_{\boxtimes})$$

$$\text{head}(A) \geq 1, \text{head}(B) = 0 \quad \text{導出不能}$$