連言に関して閉じた証明可能性述語の様相論理

小暮晏佳（神戸大学システム情報学研究科 D2）
倉橋太志（神戸大学）との共同研究

第 61 回 MLG 数理論理学研究集会 2026 年 10 月 23 日

はじめに

概要

- 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ とその導出可能性条件は，第二不完全性定理において重要な役割を果たす．
- 証明可能性述語の性質は，証明可能性論理と呼ばれる様相論理を用いて分析されている．
- 導出可能性条件 $\mathbf{C} : T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner)$ を証明可能性論理の観点から分析を行った．

本講演は以下に基づく．

Modal logics of conjunctively closed provability predicates,
Haruka Kogure and Taishi Kurahashi, arXiv:2607.08730（投稿中）.

1. 第二不完全性定理と証明可能性論理
2. 弱い導出可能性条件と証明可能性論理
3. 今回の研究

1 第二不完全性定理と証明可能性論理

2 弱い導出可能性条件と証明可能性論理

3 今回の研究

第二不完全性定理

- 以降，理論 T を PA の無矛盾な r.e. 拡大とする．
- 証明可能性述語は不完全性定理の証明において重要．

定義（証明可能性述語）

論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の**証明可能性述語** $\overset{\mathbf{def.}}{\iff} \forall\varphi(T \vdash \varphi \iff \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner))$．

第二不完全性定理が成立するための $\mathrm{Pr}_T(x)$ の条件が導出可能性条件．

定義（導出可能性条件）

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner))$．
D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$．

定理 (Gödel, 1931 ; Löb, 1955)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たすならば次が成立．

- $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$（第 2 不完全性定理）．
- $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ (**Löb の定理**) ．

算術的解釈

- 導出可能性条件を様相論理の枠組みで整理するのが証明可能性論理である.
- 証明可能性論理では，$\Box A$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ と対応させ，「A は証明可能」と解釈する.

D2	$\mathsf{K} : \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
D3	$4 : \Box A \to \Box\Box A$

- 算術的解釈により，算術の文と様相論理式を対応させる.

算術的解釈

次を満たす様相論理式から算術の文への写像 f を証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈という.

- $f(\bot) :\equiv 0 = 1$,
- $f(A \to B) :\equiv f(A) \to f(B)$,
- $f(\Box A) :\equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

定義

$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) := \{A \mid \forall f : \mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈，$T \vdash f(A)\}$
を $\mathrm{Pr}_T(x)$ の**証明可能性論理**という．

- $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ は $\mathrm{Pr}_T(x)$ に共通する原理を様相論理として抜き出したもの．
- 様相論理 $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ は，
  D2，D3 を満たす標準的な証明可能性述語 $\mathrm{Prov}_T(x)$ の論理．

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全な理論としたとき，$\mathsf{GL} = \mathsf{PL}(\mathrm{Prov}_T)$．

1 第二不完全性定理と証明可能性論理

2 弱い導出可能性条件と証明可能性論理

3 今回の研究

弱い導出可能性条件と無矛盾性

- 第 2 不完全性定理の成立に本質的な原理は何か.
- 条件 **D2** や **D3** を弱めたとき，第 2 不完全性定理はどの形で残るのか？

定義

- $\mathbf{E}: T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longrightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner)$.
- $\mathbf{C}: T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner)$.
- $\mathbf{D3}^n_m: T \vdash \mathrm{Pr}^n_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}^m_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

- $(\mathbf{D2} \Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{C})$，$(\mathbf{D3} \Rightarrow \mathbf{D3}^n_m)$ $(1 \leq n < m)$.
- **E**，**C** に対応する様相原理は，
  非正規様相論理（論理 K を含まない様相論理）の文脈で分析されてきた.
- 次のように第 2 不完全性定理が改良されている.

定理 (Kurahashi, 2026+)

$1 \leq n < m$ とする.
$\mathrm{Pr}_T(x)$ が **E**，**C**，$\mathbf{D3}^n_m$ を満たす $\Longrightarrow T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$.

これまでの研究

定義（再掲）

- $\mathbf{D3}^n_m : T \vdash \mathrm{Pr}^n_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}^m_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- $\mathbf{E} : T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longrightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner)$.
- $\mathbf{C} : T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner)$.

弱い導出可能性条件から従う様相原理を，算術的完全性定理によって決定したい．

定義

様相論理 L は Γ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理
$:\Longleftrightarrow\ L = \bigcap\{\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) \mid \mathrm{Pr}_T(x)$ は Γ を満たす $\}$

$\mathbf{D3}^n_m$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理，
$\mathbf{E}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理についてこれまで分析した．

$\mathbf{D3}_m^n$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

Fitting ら (1992) によって導入された必然化の論理 N は，$\Box$ に関する規則として $\dfrac{A}{\Box A}$ のみを持つ論理．

様相論理 N

- 公理：命題トートロジー．
- 規則：(MP) $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$，(Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$．

- Kurahashi and Sato (2026) は，各 m, n について $\mathsf{NA}_{m,n} = \mathsf{N} + (\Box^n A \to \Box^m A)$ を導入して，Fitting らの関係意味論に関する有限フレーム性を証明した．
- $\mathsf{NA}_{m,n}$ の反例有限モデルを算術に埋め込むことで算術的完全性定理が示される．

定理 (K., 2026)

$m, n \geq 1$ について $\mathsf{NA}_{m,n}$ は $\mathbf{D3}_m^n$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理．

$\mathbf{E}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

様相論理 EN, ECN

$$\mathsf{EN} := \mathsf{N} + (\mathsf{RE})\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}, \qquad \mathsf{ECN} := \mathsf{EN} + (\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)).$$

- 様相論理 EN と ECN は近傍意味論を持つ非正規様相論理として古典的に分析されてきた．
- 近傍意味論を算術に埋め込む手法を新たに開発し，算術的完全性定理を示した．

定理 (K., 2026+)

- EN： $\mathbf{E}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理
- ECN： $\mathbf{E}$ と $\mathbf{C}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

1 第二不完全性定理と証明可能性論理

2 弱い導出可能性条件と証明可能性論理

3 今回の研究

今回の研究

- 条件 $\mathbf{C}$ を証明可能性論理の枠組みで分析できないか？
- 公理 $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$ は，
  条件 $\mathbf{C}$: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner)$ に対応．

様相論理 CN

$$\mathsf{CN} := \mathsf{N} + \big(\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)\big).$$

- CN は条件 $\mathbf{C}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ を分析するための基礎となる論理．
- N に対する Fitting らの関係意味論では，公理 C を適切に扱うことが難しく，CN に関する完全性は未解決．

問題

公理 C に適した意味論を構築し，
CN とその拡張の算術的完全性を証明できるか？

閉包モデル 1

閉包作用素に基づく意味論を導入する．

定義（閉包作用素）

MF を様相論理式全体の集合とする．写像 $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(\mathsf{MF}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathsf{MF})$ が閉包作用素であるとは，任意の $X, Y \subseteq \mathsf{MF}$ について次を満たすことをいう．

- $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$．
- $X \subseteq Y$ ならば $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$．
- $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$．

定義（閉包フレーム）

次の条件を満たすとき，(W, G, cl) が 閉包フレームであるという．

- $W \neq \emptyset$，　　$G : W \to \mathcal{P}(\mathsf{MF})$，
- cl は閉包作用素．

W が有限かつ各 x について $G(x)$ が有限のとき，(W, G, cl) は有限閉包フレームという．

閉包モデル 2

定義（閉包モデル）

次の条件を満たす $\mathcal{M} = (W, G, \mathrm{cl}, \Vdash)$ を 閉包モデルという．

- (W, G, cl) は 閉包フレーム，
- $\Vdash \subseteq W \times \mathsf{MF}$，
- $\Vdash$ は命題論理の結合子について通常の条件を満たし，さらに
  $x \Vdash \Box A \iff A \in \mathrm{cl}(G(x))$．

$\forall x \in W, x \Vdash A$ のとき，A は $\mathcal{M}$ で valid であるといい，$\mathcal{M} \models A$ とかく．

- 算術的完全性定理の証明に向けて，原始再帰的に表示された反例閉包モデルを構成する．
- $G(x)$ と閉包作用素 cl を分けて扱うことが，その構成において重要となる．
- 閉包作用素に課す条件を変えることで，CN の拡張だけでなく C，N，P，D，4 の様々な組合せを扱える．

閉包モデルの条件

様相原理は，$\mathrm{cl}(G(x))$ に対する閉包条件として表現される．

定義（閉包モデルの条件）

閉包モデル $\mathcal{M} = (W, G, \mathrm{cl}, \Vdash)$ が

- (N) を満たす : $\iff$ $\mathcal{M} \models A$ ならば $A \in \mathrm{cl}(G(x))$，
- (C) を満たす : $\iff$ $A, B \in \mathrm{cl}(G(x))$ ならば $A \wedge B \in \mathrm{cl}(G(x))$，
- (4) を満たす : $\iff$ $A \in \mathrm{cl}(G(x))$ ならば $\Box A \in \mathrm{cl}(G(x))$，
- (P) を満たす : $\iff$ $\bot \notin \mathrm{cl}(G(x))$，
- (D) を満たす : $\iff$ $A \in \mathrm{cl}(G(x))$ ならば $\neg A \notin \mathrm{cl}(G(x))$．

命題

閉包モデル $\mathcal{M}$ で valid な論理式全体を $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ とする．

- $\mathcal{M}$ が (N) を満たす $\iff$ $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ は ネセシテーションで閉じる，
- 各 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{C}, \mathsf{4}, \mathsf{P}, \mathsf{D}\}$ について，$\mathcal{M}$ が (X) を満たす $\iff$ $\mathsf{X} \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$．

様相原理 N，C，P $:= \neg\Box\bot$，D $:= \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$，4 の任意の組合せから得られる論理を考える．

定義

$\Lambda \subseteq \{\mathsf{N}, \mathsf{C}, \mathsf{P}, \mathsf{D}, 4\}$ とする．L_Λ を，次を満たす論理とする．

- すべての古典命題論理のトートロジーを公理として含む．
- $\mathsf{X} \in \Lambda$ ならば，X を公理として含む．
- MP を規則として含む．
- $\mathsf{N} \in \Lambda$ ならば，ネセシテーションを規則として含む．

- $L_{\{\mathsf{N},\mathsf{C}\}} = \mathsf{CN}$, $L_{\{\mathsf{N},\mathsf{C},\mathsf{P}\}} = \mathsf{CN} + \neg\Box\bot$, $L_{\{\mathsf{N},\mathsf{C},\mathsf{D}\}} = \mathsf{CN} + \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$.
- L_Λ の閉包モデルに関する完全性と有限モデル性について分析した．
- N と D を同時に含むか含まないかで有限モデル性に関する状況が変わってくる．

N と D を同時に含まない場合

- 算術的完全性定理を CN の拡張に示すために，原始再帰的な反例モデルを構成したい．
- 有限閉包モデルでは $G(x)$ は有限だが，$\mathrm{cl}(G(x))$ は無限集合になり得る．
- $\mathcal{M} = (W, G, \mathrm{cl}, \Vdash)$ について $x \in W$ と $x \Vdash A$ かが原始再帰的に判定できるとき，$\mathcal{M}$ は原始再帰的に表示されているという．

定理 (K. and Kurahashi)

$\{\mathsf{N}, \mathsf{D}\} \nsubseteq \Lambda \subseteq \{\mathsf{N}, \mathsf{C}, \mathsf{P}, \mathsf{D}, 4\}$ とする．次は同値．

1. $L_\Lambda \vdash A$．
2. A は，対応する条件を満たすすべての有限閉包モデルで valid．
3. A は，対応する条件を満たすすべての原始再帰的に表示された有限閉包モデルで valid．

系

$\{\mathsf{N}, \mathsf{D}\} \nsubseteq \Lambda \subseteq \{\mathsf{N}, \mathsf{C}, \mathsf{P}, \mathsf{D}, 4\}$ としたとき，L_Λ は原始再帰的．

N と D を同時に含む場合

N と D を同時に含む場合にも完全性は成り立つが，有限モデル性は未解決．

定理 (K. and Kurahashi)

$\{\mathsf{N}, \mathsf{D}\} \subseteq \Lambda \subseteq \{\mathsf{N}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, 4\}$ とする．
$L_\Lambda \vdash A \iff A$ は対応する条件を満たすすべての閉包モデルで valid．

一方，CND の場合には原始再帰的に表示されたモデルが取れる．

定理 (K. and Kurahashi)

CND は原始再帰的．

定理 (K. and Kurahashi)

次は同値．

- $\mathsf{CND} \vdash A$
- A は，対応する条件を満たすすべての原始再帰的に表示された有限閉包モデルで valid．

算術的完全性定理

CN の拡張に対して得られる，原始再帰的に表示された反例閉包モデルを算術へ埋め込むことにより，次の算術的完全性定理を得た．

定理 (K. and Kurahashi)

CN： $\mathbf{C}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

CNP $=$ CN $+ \neg\Box\bot$： $\mathbf{C}$，$T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

CN4 $=$ CN $+ 4$： $\mathbf{C}$，$\mathbf{D3}$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

CNP4 $=$ CN4 $+ \neg\Box\bot$：$\mathbf{C}$，$\mathbf{D3}$，$T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

CND $=$ CN $+ \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$： $\mathbf{C}$，$T \vdash \mathrm{Con}_T^S$ を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の論理

参考文献

1. Modal logics of conjunctively closed provability predicates, Haruka Kogure and Taishi Kurahashi, arXiv:2607.08730.
2. Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements, Haruka Kogure and Taishi Kurahashi, Journal of Logic and Computation, vol.36, no. 5, exag030, 2026
3. T. Kurahashi, Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, arXiv:2507.00955.