理論の不完全性，決定不能性，分離不能性
4. 関連する話題の紹介

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2023 年 12 月 29 日
第 2 回ロジック・ウィンタースクール

本日のアウトライン

1. 理論の Lindenbaum 代数の同型性
2. 解釈可能性

1 理論の Lindenbaum 代数の同型性

2 解釈可能性

理論の Lindenbaum 代数 1

本日は議論を単純にするために有限の言語のみを扱うとしておく．

Lindenbaum 代数

- $\mathcal{L}$-文全体の集合を $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とかく．
- $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ 上の 2 項関係 $\sim_T$ を

$$\varphi \sim_T \psi :\Longleftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

として定めると，$\sim_T$ は $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ 上の同値関係．

- 文 φ を代表元とする同値類を $[\varphi]$ で表す．
- 商集合 $L_T := \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}/\sim_T$ 上に 2 項関係 $\leq_T$ を

$$[\varphi] \leq_T [\psi] :\Longleftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$$

と定めると，これは well-defined．

- $(L_T, \leq_T)$ は半順序集合となる：

反射性 $[\varphi] \leq_T [\varphi]$
推移性 $[\varphi] \leq_T [\psi]$ & $[\psi] \leq_T [\rho] \Rightarrow [\varphi] \leq_T [\rho]$
反対称性 $[\varphi] \leq_T [\psi]$ & $[\psi] \leq_T [\varphi] \Rightarrow [\varphi] = [\psi]$

理論の Lindenbaum 代数 2

Lindenbaum 代数

- 更に半順序集合 $(L_T, \leq_T)$ は，T_{p} と T_{r} をそれぞれ最小元と最大元とする Boole 代数（全ての元が補元をもつ分配束）．
- このとき次が成立：
  - $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ （$[\varphi]$ と $[\psi]$ の下限）
  - $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$ （$[\varphi]$ と $[\psi]$ の上限）
  - $\overline{[\varphi]} = [\neg\varphi]$ （$[\varphi]$ の補元）
- この Boole 代数 $(L_T, \leq_T)$ を理論 T の **Lindenbaum 代数**という．

定義 (アトム)

Boole 代数 $(B, \leq)$ について，その元 $a \in B$ が $(B, \leq)$ の**アトム**であるとは，a が最小元 $\mathbb{O}$ ではなく，$B \setminus \{\mathbb{O}\}$ において極小であることをいう．

Lindenbaum 代数のアトム 1

Lindenbaum 代数のアトムに関して次のことが成立する.

命題 4.1

$\mathcal{L}$-理論 T と $\mathcal{L}$-文 φ について，以下は同値：

1. $[\varphi]$ は $(L_T, \leq_T)$ のアトム.
2. $T + \neg\varphi$ は無矛盾かつ完全.

$(1 \Rightarrow 2)$ の証明.

- $[\varphi]$ が $(L_T, \leq_T)$ のアトムとする.
- $[\varphi]$ は最小元 T_{p} とは異なるので，$T \nvdash \varphi$，すなわち $T + \neg\varphi$ は無矛盾.
- いま $T + \neg\varphi \nvdash \neg\psi$ を満たす $\mathcal{L}$-文 ψ を任意にとり，$T + \neg\varphi \vdash \psi$ を示したい.
- $T \nvdash \psi \to \varphi$ であり，更に $T \nvdash \varphi \vee \psi \to \varphi$.
- 他方 $T \vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ なので，$[\varphi \vee \psi] <_T [\varphi]$.
- $[\varphi]$ の極小性より $[\varphi \vee \psi]$ は最小元 T_{p} と等しい.
- すなわち $T \vdash \varphi \vee \psi$ で，$T + \neg\varphi \vdash \psi$. よって $T + \neg\varphi$ は完全.

Lindenbaum 代数のアトム 2

$(2 \Rightarrow 1)$ の証明.

- $T + \neg\varphi$ が無矛盾かつ完全とする.
- $T \nvdash \varphi$ なので $[\varphi]$ は最小元 T_{p} とは異なる.
- $[\psi] <_T [\varphi]$ となる $\mathcal{L}$-文 ψ を任意にとり，$[\psi] = T_{\mathsf{p}}$，すなわち $T \vdash \psi$ を示したい.
- $T \vdash \varphi \to \psi$ かつ $T \nvdash \psi \to \varphi$ であり，特に $T + \neg\varphi \nvdash \neg\psi$.
- $T + \neg\varphi$ の完全性より $T + \neg\varphi \vdash \psi$.
- したがって $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi \to \psi$ で排中律より $T \vdash \psi$. □

アトムをもたない Boole 代数

系 4.2

T が本質的不完全ならば，$(L_T, \leq_T)$ はアトムをもたない可算無限濃度の Boole 代数．

そのような Boole 代数について，次の事実がある．

事実

アトムを持たない可算無限濃度の Boole 代数は全て同型である．

系 4.2 と事実を組み合わせると，次のことが分かる．

系 4.5

RE 理論 T と U が本質的不完全ならば，Lindenbaum 代数 $(L_T, \leq_T)$ と $(L_U, \leq_U)$ は同型．

実効的分離不能な RE 理論

本質的不完全性の実効化は本質的実効的不完全性で，次が成り立った．

Pour-El の定理

実効的本質的不完全 $\iff$ 実効的分離不能．

ここで，実効的分離不能な **RE** 集合について次が知られている．

事実 (Smullyan (1961))

(A, B) と (C, D) が共に実効的分離不能な **RE** 集合の組とすると，$\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 f が存在して，$f(A) = C$ かつ $f(B) = D$ となる．

したがって，これまでの議論をまとめると

理論 T と U が実効的分離不能な **RE** 理論とすると

- **Lindenbaum** 代数 $(L_T, \leq_T)$ と $(L_U, \leq_U)$ は同型．
- $\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 f が存在して，$f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ かつ $f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$．

Pour-El and Kripke の定理

Pour-El and Kripke はこうした状況を組み合わせた，次の定理を証明した．

定理 4.7 (Pour-El and Kripke (1967))

$\mathcal{L}_0$-理論 T と $\mathcal{L}_1$-理論 U がともに RE かつ実効的分離不能ならば，
計算可能な全単射 $f : \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_0} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}$ が存在して，次が成り立つ：

1. $f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ かつ $f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$.
2. f は命題結合子を保存する，つまり
   - $f(\varphi \circ \psi) = f(\varphi) \circ f(\psi)$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \to\})$
   - $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

このとき，任意の $\mathcal{L}_0$-文 φ について，

$$
\begin{aligned}
[\varphi] \leq_T [\psi] &\iff T \vdash \psi \to \varphi \\
&\iff U \vdash f(\varphi \to \psi) && (f \text{ は全単射}) \\
&\iff U \vdash f(\varphi) \to f(\psi) && (f \text{ は } \to \text{ を保存}) \\
&\iff [f(\psi)] \leq_U [f(\varphi)]
\end{aligned}
$$

なので，この f は Lindenbaum 代数の同型性と Smullyan の事実の両方を同時に満たしてくれる．

証明のアウトライン 1

- 文 φ が命題原子であるとは，φ が原子文か φ の一番外側が量化記号であることをいう．
- どんな文も命題原子たちの Boole 結合で一意に表せる．
- 命題原子である $\mathcal{L}$-文全体の集合を $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}^{A}$ とかくとする．

定理の項目 2 の満たし方

- もし計算可能な全単射 $f : \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_0}^{A} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}^{A}$ で “良い条件” を満たすものの存在がいえたとする．
- この f を
  - $f(\varphi \circ \psi) := f(\varphi) \circ f(\psi)$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \to\})$
  - $f(\neg\varphi) := \neg f(\varphi)$

  として計算可能な全単射 $f : \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_0} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}$ に拡張してやれば，定理の項目 2 が自動的に満たされる．

証明のアウトライン 2

- 文 ρ に対して ρ^1 は ρ を，ρ^0 は $\neg\rho$ を表すとする．
- $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_0}$ の要素を実効的に重複なしで $\xi_0, \xi_1, \ldots$ と並べておく．
- $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_1}$ の要素を実効的に重複なしで $\eta_0, \eta_1, \ldots$ と並べておく．

“良い条件” とは

- $\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 p と q で，各 n と $s \in 2^n$ に対して

$$T + \bigwedge_{i<n} \xi^{s(i)}_{p(i)} \text{ が無矛盾} \iff U + \bigwedge_{i<n} \eta^{s(i)}_{q(i)} \text{ が無矛盾} \tag{1}$$

  が成り立つものがとれたとする．
- このとき，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $f(\xi_{p(i)}) = \eta_{q(i)}$ と定める．
- f は $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_0}$ と $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_1}$ の間の計算可能な全単射となる．
- この (1) が先述の “良い性質”．
- 実際，このとき $f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ および $f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$ が示せる（資料を参照）．

証明のアウトライン 3

(1) を満たす計算可能な全単射 p, q を定める方針

- **(1) を満たす $p(0), \ldots, p(n-1)$ と $q(0), \ldots, q(n-1)$ が既に定められているとして，n の偶奇に分けて往復論法で $p(n)$ と $q(n)$ の値を定める．**
  - **n が偶数の場合は $p(n)$ を $p(0), \ldots, p(n-1)$ に現れない最小の自然数とし，$q(0), \ldots, q(n-1)$ に現れない $q(n)$ をうまく定める．**
  - **n が奇数の場合は $q(n)$ を $q(0), \ldots, q(n-1)$ に現れない最小の自然数とし，$p(0), \ldots, p(n-1)$ に現れない $p(n)$ をうまく定める．**
- **これらによって p, q の全単射性が保証される．**

証明のアウトライン 4

$p(n)$ と $q(n)$ を定める.

- n を偶数として，$p(n)$ を $p(0), \ldots, p(n-1)$ に現れない最小の自然数とする.
- U は実効的分離不能なので，それで得られる計算可能な関数を $\Phi_U(x, y)$ とする.
- パラメータありの二重再帰定理をうまく用いれば，計算可能な全域関数 $\Psi_0(x)$ と $\Psi_1(x)$ がとれて，各 $s \in 2^n$ と $d \in \{0, 1\}$ について次が成り立つ：

$$T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \vdash \xi_{p(n)}^{d} \iff U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \vdash \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))^d \tag{2}$$

- 目的の $\eta_{q(n)}$ は s に依存しないものでとりたい.
  これまでの議論に現れない最初の変数を v とすると，

$$\forall v \Big[\bigvee_{s \in 2^n} \Big(\bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \wedge \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \Big) \Big]$$

  は命題原子 $\mathcal{L}_1$-文なので，ある j について η_j に等しく，$q(n) := j$ と定める.
- このとき各 $s \in 2^n$ について次が成り立つのでよい：

$$U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \vdash \eta_{q(n)} \leftrightarrow \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$$

□

理論の Lindenbaum 代数の同型性

思いつく問題

問題

強実効的分離不能な理論たちに対して，**Pour-El and Kripke** の定理のものよりも強い同型性が示せるか？

ただし面白い問題かは不明.

1 理論の Lindenbaum 代数の同型性

2 解釈可能性

翻訳と解釈可能性

翻訳と解釈可能性

- 第 1 回で示したように，関係記号 $\leq$ を論理式 $x \leq^{\dagger} y$ で置き換えることで，$\mathbf{R}_0$ において $\mathbf{R}$ を実現できた．
- すなわち，$\mathbf{R}_0$ は $\mathbf{R}$ の真の部分理論であるが，他方で実質的に $\mathbf{R}$ を含んでいると考えられる．
- このような，定理全体の集合だけにとらわれない，理論が別の理論を実質的に含んでいることを分析するための概念である翻訳及び解釈可能性について扱う．
- 解釈可能性は数理論理学の色々なところに現れる概念でもある．

標準形

まずは翻訳を定めるために論理式を扱いやすい形に変形する．

定義 (標準形)

$\mathcal{L}$ を任意の言語とする．
$\mathcal{L}$-論理式が標準形であるとは，
含まれる原子論理式がすべて次のいずれかであることをいう：

- 変数 x, y について $x = y$ という形，
- $\mathcal{L}$ の各定数記号 c に対して，$c = x$ という形，
- $\mathcal{L}$ の各関数記号 f と変数 $\vec{x}, y$ に対して，$f(\vec{x}) = y$ という形，
- $\mathcal{L}$ の各関係記号 r と変数 $\vec{x}$ に対して，$r(\vec{x})$ という形．

明らかに次が成り立つ．

命題 4.10

$\mathcal{L}$ を任意の言語とする．
任意の $\mathcal{L}$-論理式 φ は，ある標準形の $\mathcal{L}$-論理式 φ^* と述語論理上で同値．

翻訳

定義 (翻訳)

言語 $\mathcal{L}_0$ の標準形の論理式から，言語 $\mathcal{L}_1$ の論理式への写像 τ が $\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳であるとは，

- 1 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $d_\tau(x)$
- $\mathcal{L}_0$ の各定数記号 c に対する 1 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $\eta_c(x)$
- $\mathcal{L}_0$ の各 n 変数関数記号 f に対する $n+1$ 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $\eta_f(\vec{x}, y)$
- $\mathcal{L}_0$ の各 n 変数関係記号 r に対する n 変数論理式 $\eta_r(\vec{x})$

が存在して，次の条件を満たすことをいう：

1. $\tau(x = y)$ は $x = y$
2. $\mathcal{L}_0$ の各定数記号 c に対して，$\tau(c = x)$ は $\eta_c(x)$
3. $\mathcal{L}_0$ の各関数記号 f に対して，$\tau(f(\vec{x}) = y)$ は $\eta_f(\vec{x}, y)$
4. $\mathcal{L}_0$ の各関係記号 $r(\vec{x})$ に対して，$\tau(r(\vec{x}))$ は $\eta_r(\vec{x})$
5. $\tau(\neg\varphi)$ は $\neg\tau(\varphi)$
6. $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ について $\tau(\varphi \circ \psi)$ は $\tau(\varphi) \circ \tau(\psi)$
7. $\tau(\exists x \varphi(x))$ は $\exists x \left(d_\tau(x) \wedge \tau(\varphi(x))\right)$
8. $\tau(\forall x \varphi(x))$ は $\forall x \left(d_\tau(x) \to \tau(\varphi(x))\right)$.

解釈可能性

標準形以外の論理式の翻訳

- $\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳の定義域は標準形の $\mathcal{L}_0$-論理式全体の集合であった．
- 各 $\mathcal{L}_0$-論理式 φ に対して，述語論理上で同値な標準形の $\mathcal{L}_0$-論理式 φ^* がとれた．
- $\tau(\varphi) := \tau(\varphi^*)$ と定めることで，τ の定義域を $\mathcal{L}_0$-論理式全体の集合に拡張できる．
- 以降ではこのように定義域を拡張した写像を翻訳ということにする．

定義 (解釈可能性)

T を $\mathcal{L}_0$-理論，S を $\mathcal{L}_1$-理論とする．

1. $\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳 τ が S における T の解釈であるとは，
   任意の $\mathcal{L}_0$-文 φ に対して，

   $$T \vdash \varphi \Rightarrow S \vdash \tau(\varphi)$$

   が成り立つことをいう．
   このとき $\tau : T \lhd S$ もしくは $\tau : S \rhd T$ とかく．
2. T が S において解釈可能であるとは，S における T の解釈が存在することをいう．
   このとき $T \lhd S$ もしくは $S \rhd T$ とかく．

解釈可能性による分類

命題

同じ言語の理論 T と S について，$T \vdash S$ ならば $T \rhd S$.

証明.

何も変えない翻訳 τ，すなわち $d_\tau(x)$ を $x = x$ でとり，
$\tau(c = x)$ と $\tau(f(\vec{x} = y))$ と $\tau(r(\vec{x}))$ をそれぞれ $c = x$ と $f(\vec{x}) = y$ と $r(\vec{x})$ とする翻訳 τ によって $S \rhd T$. □

- $\mathbf{PA} \rhd \mathbf{Q} \rhd \mathbf{R} \rhd \mathbf{R}_0$.
- 定理 1.26 により $\mathbf{R}_0 \rhd \mathbf{R}$.

命題 4.13

1. $\mathbf{R} \not\rhd \mathbf{Q}$.
2. $\mathbf{Q} \not\rhd \mathbf{PA}$.

- 解釈可能性の意味で $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$ は同等の強さを持つ.
- 解釈可能性の意味でも $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ よりも，$\mathbf{PA}$ は $\mathbf{Q}$ よりも真に強い.

理論 $\mathbf{R}_1$

$\mathbf{R}_0$ の真部分理論で $\mathbf{R}_0$ を解釈できる理論も存在する．

定義 (理論 $\mathbf{R}_1$)

$\mathcal{L}_\times := \{0, \mathsf{s}, \times, \leq\}$ とする．
次の公理図式からなる $\mathcal{L}_\times$-理論を $\mathbf{R}_1$ という：

R2	$\overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n}$	$(m, n \in \mathbb{N})$
R3	$\overline{m} \neq \overline{n}$	$(m \neq n$ となる $m, n \in \mathbb{N})$
R4	$\forall x \left(x \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
R6	$\overline{m} \leq \overline{n}$	$(m \leq n$ となる $m, n \in \mathbb{N})$

つまり，$\mathbf{R}_1$ は $\mathbf{R}_0$ から $+$ に関する公理図式 **R1** を除くことで得られる．

定理 4.15 (Jones and Shepherdson (1983))

$\mathbf{R}_1 \rhd \mathbf{R}_0$.

証明.

$+$ が 0 と s と $\times$ を用いて定義できるという Julia Robinson (1949) の結果を用いる（詳しくは資料を参照）．□

解釈可能性と本質的決定不能性 1

解釈可能性は本質的決定不能性の分析に非常に役立つ．

命題 4.17 (Tarski, Mostowski and Robinson (1953))

T と S を理論とする．T が本質的決定不能かつ $S \rhd T$ ならば，S も本質的決定不能．

証明.

- $\tau : S \rhd T$ で，T の言語を $\mathcal{L}_T$ とする．
- U を S の任意の無矛盾な拡大理論として，U の決定不能性を示したい．
- $\mathcal{L}_T$-理論 U' を次で定める：

$$U' := \{\varphi \mid U \vdash \tau(\varphi) \ \&\ \varphi \text{ は } \mathcal{L}_T\text{-文 }\}$$

- $\varphi \in T$ ならば $S \vdash \tau(\varphi)$ なので，$U \vdash \tau(\varphi)$ であり，$\varphi \in U'$．
  したがって U' は T の拡大理論．

解釈可能性と本質的決定不能性 2

証明の続き.

- 任意の $\mathcal{L}_T$-文 φ について

$$U' \vdash \varphi \iff U \vdash \tau(\varphi) \tag{3}$$

が成り立つことを確かめる.

  - $(\Rightarrow)$: $U' \vdash \varphi$ とする.
    ある $\mathcal{L}_T$-文 $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1} \in U'$ について $T \vdash \psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_{k-1} \to \varphi$.
    U' の定め方より $U \vdash \tau(\psi_0) \wedge \cdots \wedge \tau(\psi_{k-1})$.
    $S \rhd T$ より $S \vdash \tau(\psi_0) \wedge \cdots \wedge \tau(\psi_{k-1}) \to \tau(\varphi)$.
    $U \vdash \tau(\varphi)$.
  - $(\Leftarrow)$: $U \vdash \tau(\varphi)$ ならば $\varphi \in U'$ なので $U' \vdash \varphi$.

- U の無矛盾性より U' は無矛盾.
- T の本質的決定不能性より U' は決定不能.
- (3) より U もまた決定不能である.

以上より S は本質的決定不能. □

解釈可能性と本質的決定不能性 3

系 4.18 (Jones and Shepherdson (1983))

$\mathbf{R}_1$ は本質的決定不能.

問い

$\mathbf{R}_0$ を解釈可能ではないような理論で本質的決定不能なものが存在するだろうか.

答え (Vaught (1962); Jeřábek (2020); Cheng (2020, 2021) など)

$\mathbf{R}_0 \rhd T$ だが $T \not\rhd \mathbf{R}_0$ であるような RE 理論 T で，本質的決定不能なものが存在する.

解釈可能性と本質的決定不能性 4

更に，本質的決定不能な無矛盾 **RE** 理論の中には解釈可能性の意味で極小なものが存在しないことが最近証明された．

定理 (Murwanashyaka, Pakhomov and Visser (202?))

T を任意の本質的決定不能な **RE** 理論とすると，本質的決定不能な **RE** 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

実効的分離不能性と本質的遺伝的決定不能性に対しても同様の結果が得られている．

定理 (Cheng (202?))

T を任意の実効的分離不能な **RE** 理論とすると，実効的分離不能な **RE** 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

定理 (Visser (202?))

T を任意の本質的遺伝的決定不能な **RE** 理論とすると，本質的遺伝的決定不能な **RE** 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

思いつく問題

問題

強実効的分離不能な理論たちの中に，解釈可能性に関して極小な理論は存在するか？

ただし Visser の証明をちゃんと読めば既にないことを示している可能性もある．

解釈可能性と本質的決定不能性 5

Murwanashyaka, Pakhomov and Visser の定理のバリエーションである次の定理の証明を紹介して本講義を締めくくる.

定理 4.24

$\mathcal{L}_A$-理論 T が本質的決定不能かつ有限ならば，本質決定不能かつ有限である $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$T \vdash S$ かつ $S \not\rhd T$ となる.

また，証明から次も分かる.

系 4.25 (Visser (2017))

$\mathcal{L}_A$-理論 T が本質的決定不能かつ有限かつ $T \vdash \mathbf{R}_0$ とすると，本質決定不能かつ有限である $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$T \vdash S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S \not\rhd T$ かつ $\mathbf{R}_0 \not\rhd S$.

例えば $\mathbf{R}_0$ と $\mathbf{Q}$ の間には解釈可能性の意味で真に異なる部分理論が稠密に存在することも知られている.

解釈可能性と本質的決定不能性 5

定理 4.24 の証明.

- $\mathcal{L}_A$-理論 T は本質的決定不能かつ有限とする.
- T の有限性により $x \triangleright T$ という $\mathcal{L}_A$-論理式が Σ_1 でとれる.
- 不動点定理より, $\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow (\ulcorner \sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner \triangleright T)$ を満たす Σ_1 文 σ がとれる.
- $\mathbb{N} \models \sigma$ と仮定して矛盾を導く.
  - 定理 **3.20.(1)** より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
  - 命題 **1.7.(2)** より σ^{cert} は有限モデル M をもつ.
  - $\mathrm{Th}(M)$ は σ^{cert} の無矛盾かつ完全な再帰的拡大理論なので, σ^{cert} は本質的決定不能ではない.
  - 命題 **4.17** より $\sigma^{\mathrm{cert}} \not\triangleright T$.
  - $\mathbb{N} \models \neg(\ulcorner \sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner \triangleright T)$ なので, σ の取り方より $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ となり矛盾.
- したがって $\mathbb{N} \models \neg\sigma$.
- 定理 **3.20.(2)** より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.
- $\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性より σ^{cert} も本質的決定不能.
- σ^{cert} は有限なので, 命題 **3.3** より本質的遺伝的決定不能.

解釈可能性と本質的決定不能性 6

証明の続き.

$\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow (\ulcorner \sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner \rhd T)$ となる Σ_1 文 σ について，$\mathbb{N} \models \neg\sigma$ と，σ^{cert} が本質的遺伝的決定不能であることを示した.

- 求める $\mathcal{L}_A$-理論 S を

$$S := \{\varphi \vee \sigma^{\mathrm{cert}} \mid \varphi \in T\}$$

と定めると，S は有限理論であり，$T \vdash S$ かつ $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash S$.

- あとは S の本質的決定不能性と $S \not\rhd T$ を示せばよい.
- (本質的決定不能性): U を S の任意の無矛盾な拡大理論とする.
  - $U \vdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ ならば $U \vdash T$ なので，T の本質的決定不能性より U は決定不能.
  - $U \nvdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} + U$ は無矛盾なので，σ^{cert} の本質的遺伝的決定不能性より U は決定不能.

  いずれにせよ U は決定不能なので，S は本質的決定不能.
- ($S \not\rhd T$): $S \rhd T$ と仮定すると，$\sigma^{\mathrm{cert}} \rhd T$ となるが，σ の取り方から $\mathbb{N} \models \sigma$ となるためにおかしい. □