理論の不完全性，決定不能性，分離不能性
3．本質的遺伝的決定不能性

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2023 年 12 月 28 日
第 2 回ロジック・ウィンタースクール

本日のアウトライン

1. 本質的遺伝的決定不能性と強再帰的分離不能性
2. 実効的本質的遺伝的創造性と強実効的分離不能性
3. Cobham の定理と Vaught の定理

本質的遺伝的決定不能性 1

- 有限理論の本質的決定不能性は部分理論の決定不能性までも導く．
- この観点から，本質的決定不能性より強い次の性質を導入する．

定義（本質的遺伝的決定不能性）

理論 T が**本質的遺伝的決定不能**であるとは，$T+U$ が無矛盾である任意の理論 U が決定不能であることをいう（漢字が連続して視認性が悪いので下線を引くことにする）．

命題 3.2

理論 T について，以下は同値：

1. T は本質的遺伝的決定不能．
2. T の無矛盾な拡大理論 S と，S の部分理論 U を任意にとると，U は決定不能．

証明.

$(1 \Rightarrow 2)$: T が本質的遺伝的決定不能とする．
T の無矛盾な拡大理論 S と，S の部分理論 U について，$T+U$ は S は部分理論なので無矛盾だから，U は決定不能．

$(2 \Rightarrow 1)$: T が条件 2 を満たすとする．$T+U$ が無矛盾である理論 U をとれば，U は T の無矛盾な拡大理論 $T+U$ の部分理論なので決定不能． □

本質的遺伝的決定不能性 2

命題 3.3 (Tarski, Mostwoski and Robinson (1953))

有限かつ本質的決定不能な理論 T は本質的遺伝的決定不能.

証明.

- T を有限かつ本質的決定不能な理論とし，$T+U$ が無矛盾である理論 U をとる.
- T の無矛盾な拡大理論 $T+U$ は決定不能.
- 演繹定理により，任意の論理式 φ について，$T+U \vdash \varphi \iff U \vdash \bigwedge T \to \varphi$.
- $T+U$ の決定不能性から U の決定不能性が従う. $\square$

- 本質的決定不能な有限理論の存在は Mostowski and Tarski (1949) が初出.
- 本質的決定不能な有限理論 $\mathbf{Q}$ は Robinson (1952) によって導入された.

系 3.4 (Tarski, Mostowski and Robinson (1953))

$\mathbf{Q}$ は本質的遺伝的決定不能.

特に言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は $\mathbf{Q}$ と無矛盾なので，次が成り立つ.

定理 3.5 (Church (1936))

言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は決定不能.

R について

定理 1.8 より R および R_0 は有限公理化可能ではないため，次の問いは非自明．

問い

R や R_0 は本質的遺伝的決定不能か？

実際，本質的遺伝的決定不能性は本質的決定不能性よりも真に強い．

事実 (Ehrenfeucht (1957); Putnam (1957))

本質的決定不能だが本質的遺伝的決定不能ではない理論が存在する．

この問いを扱うことは先延ばしにして，まずは本質的遺伝的決定不能性に関連する諸概念について分析を行う．

強再帰的分離不能性

本質的遺伝的決定不能性を導くような分離性を導入する．

定義 (強再帰的分離不能性)

理論 T が**強再帰的分離不能**であるとは，$0_\mathsf{p} \subseteq X$ かつ $T_\mathsf{r} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在しないことをいう．
ここで 0_p は言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理で証明可能な文全体の集合．

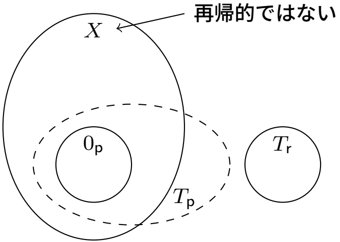


Figure: 強再帰的分離不能性

有限理論について

先ほどと同様，有限理論は性質を強化できる．

命題 3.7.(1)

有限かつ再帰的分離不能な理論 T は強再帰的分離不能．

証明.

- T が有限かつ再帰的分離不能とする．

仮定 $0_{\mathrm{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathrm{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く．

- 文 φ について，
  (a) $\varphi \in T_{\mathrm{p}} \Rightarrow T \vdash \varphi \overset{\text{演繹定理}}{\Rightarrow} \vdash \bigwedge T \to \varphi \Rightarrow (\bigwedge T \to \varphi) \in 0_{\mathrm{p}}$,
  (b) $\varphi \in T_{\mathrm{r}} \Rightarrow T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \vdash \bigwedge T \wedge \neg\varphi \Rightarrow (\bigwedge T \to \varphi) \in T_{\mathrm{r}}$.
- X は再帰的なので次で定める Y も再帰的．

$$Y := \{\varphi \mid (\bigwedge T \to \varphi) \in X \ \& \ \varphi \text{ は文 }\}.$$

- 次から $T_{\mathrm{p}} \subseteq Y$ と $T_{\mathrm{r}} \cap Y = \emptyset$ が分かる．
  - $\varphi \in T_{\mathrm{p}} \overset{(a)}{\Rightarrow} (\bigwedge T \to \varphi) \in 0_{\mathrm{p}} \overset{\text{仮定}}{\Rightarrow} (\bigwedge T \to \varphi) \in X \overset{Y}{\Rightarrow} \varphi \in Y$
  - $\varphi \in T_{\mathrm{r}} \cap Y \overset{(b) \text{ と } Y}{\Rightarrow} (\bigwedge T \to \varphi) \in T_{\mathrm{r}} \cap X \overset{\text{仮定}}{=} \emptyset$
- これは T の再帰的分離不能性に反する． □

性質間の関係

再帰的分離不能 $\Rightarrow$ 本質的決定不能
であったが，次が成立する．

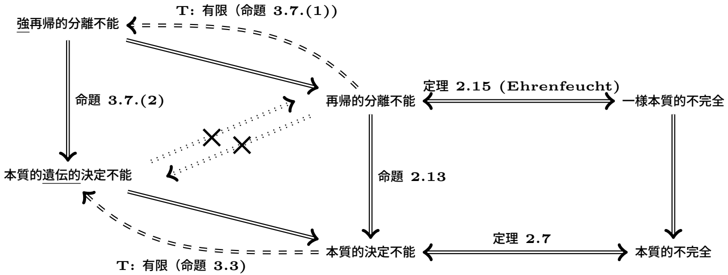
命題 3.7.(2)

強再帰的分離不能な理論 T は本質的遺伝的決定不能．

証明.

- T を強再帰的分離不能とする．
- 理論 U を $T+U$ が無矛盾であるものとすると，
  $0_{\mathsf{p}} \subseteq U_{\mathsf{p}}$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap U_{\mathsf{p}} = \emptyset$ なので U_{p} は再帰的でない．
- つまり U は決定不能． $\square$

実効化されていない諸性質の関係



実効的本質的遺伝的創造性

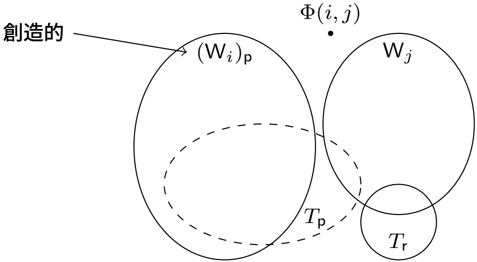
- 本質的決定不能性の実効版は実効的本質的創造性であった．
- 本質的遺伝的決定不能性の実効化を行う．

定義 (実効的本質的遺伝的創造性)

理論 T が**実効的本質的遺伝的創造的**とは，計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について，W_i は $T + \mathrm{W}_i$ が無矛盾な理論で，$(\mathrm{W}_i)_{\mathrm{p}} \cap \mathrm{W}_j = \emptyset$ ならば，

- $\Phi(i, j)$ は定義され，$\Phi(i, j)$ は文で，
- $\Phi(i, j) \notin (\mathrm{W}_i)_{\mathrm{p}} \cup \mathrm{W}_j$

となることをいう．



有限理論について

今回もやはり有限理論は性質を強化する．

命題 3.10

実効的本質的創造的な有限理論 T は実効的本質的遺伝的創造的．

証明は資料を参照（後で少し強い主張を証明する）．

強実効的分離不能性

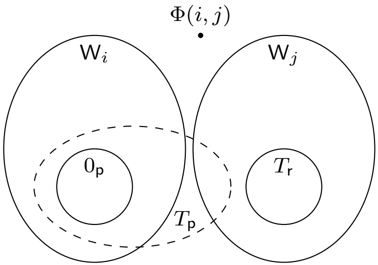
強再帰的分離不能性の実効化は次の通り．

定義 (強実効的分離不能性)

理論 T が**強実効的分離不能**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について，$0_{\mathsf{P}} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_{\mathsf{r}} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，

- $\Phi(i, j)$ は定義され，$\Phi(i, j)$ は文で，
- $\Phi(i, j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$

となることをいう．



Pour-El の定理のアナロジー

- **Pourl-El の定理より，次が成り立った：**

$$\text{実効的分離不能} \iff \text{実効的本質的創造的}$$

- 次のアナロジーが成立する．

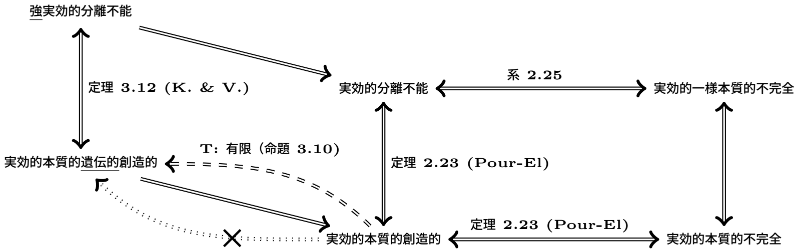
定理 3.12 (Kurahashi and Visser (202?))

理論 T が無矛盾かつ **RE** なら，以下は同値：

1. T は強実効的分離不能．
2. T は実効的本質的遺伝的創造的．

証明は資料を参照（パラメータありの二重再帰定理を用いる）．

実効化された諸性質の関係



Cobham の定理

$\mathbf{R}_0$ は有限公理化可能ではないにも関わらず，本質的遺伝的決定不能である．

定理 3.13 (Cobham (unpublished, 1957?))

$\mathbf{R}_0$ は本質的遺伝的決定不能．

- この結果は Vaught (1962) において（証明なしで）紹介されているが，しかしそのオリジナルの証明は残念ながら残されていない．
- Cobham の定理の証明は Visser (2017) において与えられている．

Vaught の 2 つの定理 1

- **Vaught は Cobham の定理の証明を改良して，より強い次の定理が得られることを指摘しているが，これも証明が書かれていない．**

定理 3.14 (Vaught (1962))

理論 U が RE でありかつ $\mathbf{R}_0 + U$ が無矛盾ならば，有限 $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S + U$ は無矛盾．

定理 3.14 ⇒ 定理 3.13 の証明.

仮定 $\mathbf{R}_0 + U$ が無矛盾である理論 U をとる．

- U が RE でなければ決定不能なので，U は RE としてよい．
- 定理 3.14 より，有限理論 S で，$S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S + U$ が無矛盾となるものがとれる．
- S は本質的決定不能かつ有限なので，命題 3.3 より本質的遺伝的決定不能．
- したがって U は決定不能． □

- **Vaught は定理 3.14 とは別に，Cobham の定理より更に強い次の結果を得た．**

定理 3.16 (Vaught (1962))

$\mathbf{R}_0$ は強実効的分離不能．

Vaught の 2 つの定理 2

- **Vaught の 2 つの定理はいずれも Cobham の定理より強いが，定理 3.14 の証明は書かれておらず，定理 3.16 は有限モデル理論における Trakhtenbrot の定理 (1953) を利用しており，直接的ではない．**
- **Visser (2017) による Cobham の定理の証明は，これら Vaught の 2 つの定理の証明に適用できない．**
- **ここで定理 3.14 の実効版に注目する．**

定義 (実効的有限拡大性)

理論 T が**実効的有限拡大性をもつ**とは，計算可能関数 $\Phi(x)$ が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，もし W_i が理論で $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾であれば，

- $\Phi(i)$ が定義され，$\Phi(i)$ が文で，
- $\Phi(i) \vdash T$ かつ $\Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は無矛盾

となることをいう．

例えば有限理論 T は定数関数 $\Phi(x) = \bigwedge T$ によって実効的有限拡大性をもつ．

Vaught の 2 つの定理 3

命題 3.18 (命題 3.10 の改良)

実効的有限拡大性をもち，実効的本質的創造的な理論 T は実効的本質的遺伝的創造的．

証明.

- 理論 T が実効的有限拡大性をもち，かつ実効的本質的創造的であるとし，それぞれによって得られる計算可能関数を $\Phi(x)$ および $\Psi(x, y)$ とする．
- $\mathsf{W}_{\Sigma(x)} = \{\Phi(x)\} \cup \mathsf{W}_x$ となる計算可能関数 $\Sigma(x)$ と $\mathsf{W}_{\Theta(x)} = \{\varphi \mid (\Phi(x) \to \varphi) \in \mathsf{W}_x \ \& \ \varphi$ は文 $\}$ となる計算可能関数 $\Theta(x)$ をとる．

仮定 W_i が理論で $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾であり，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ となる $i, j \in \omega$ をとる．

- このとき $\Phi(i)$ は定義され，$\Phi(i)$ は文で，$\Phi(i) \vdash T$ かつ $\Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は無矛盾．
- (a) $\varphi \in (\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_\mathsf{p} \iff \varphi \in (\Phi(i) + \mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \iff (\Phi(i) \to \varphi) \in (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p}$
  (b) $\varphi \in \mathsf{W}_{\Theta(j)} \iff (\Phi(i) \to \varphi) \in \mathsf{W}_j$．
- これらの同値性と $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ から，$(\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{\Theta(j)} = \emptyset$．
- $\Phi(i) \vdash T$ より $\mathsf{W}_{\Sigma(i)} = \Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は T の無矛盾な拡大理論だから，$\Psi(\Sigma(i), \Theta(j)) \downarrow$ は文で，$\Psi(\Sigma(i), \Theta(j)) \notin (\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_{\Theta(j)}$．
- 再び同値性より $(\Phi(i) \to \Psi(\Sigma(i), \Theta(j))) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$．
- 関数 $(i, j) \mapsto (\Phi(i) \to \Psi(\Sigma(i), \Theta(j)))$ によって T は実効的本質的遺伝的創造的． □

$\mathbf{R}_0$ の実行的有限拡大性 1

$\mathbf{R}_0$ について

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{実効的有限拡大性} \\ \text{\& 実効的本質的創造的 (定理 2.29)}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "\text{命題 3.18}"] & \begin{array}{c}\text{有限拡大性 (Vaught の定理 3.14)} \\ \text{\& 本質的決定不能}\end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{実効的本質的}\underline{\text{遺伝的}}\text{創造的} \arrow[r, Rightarrow] & \text{本質的}\underline{\text{遺伝的}}\text{決定不能 (Cobham)} \\
\underline{\text{強}}\text{実効的分離不能 (Vaught の定理 3.16)} \arrow[u, Leftrightarrow, "\text{定理 3.12 (K. \& V.)}"] \arrow[r, Rightarrow] & \underline{\text{強}}\text{再帰的分離不能} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

つまり次の定理から，Vaught の 2 つの定理と Cobham の定理が従う．

定理 3.19 (Kurahashi and Visser (202?))

$\mathbf{R}_0$ は実効的有限拡大性をもつ．

$\mathbf{R}_0$ の実行的有限拡大性 2

$\mathbf{R}_0$ が実効的有限拡大性をもつことは次の定理から従う．

定理 3.20 (Kurahashi and Visser (202?))

任意の Σ_1 文 σ に対して，次の条件を満たす Σ_1 文 σ^{cert} が実効的にとれる：

1. $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.

定理 3.20 $\Rightarrow$ 定理 3.19 の証明.

仮定 W_i が理論で $\mathbf{R}_0 + \mathsf{W}_i$ が無矛盾とする．

- $\forall n \left(n \in (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \iff \mathbb{N} \models \alpha(\overline{n})\right)$ となる Σ_1 論理式 $\alpha(x)$ をとる．
- 不動点定理と定理 3.20 より，$\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow \alpha(\ulcorner \neg\sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner)$ となる Σ_1 文 σ と σ^{cert} がとれる．
- いま $\mathbb{N} \models \sigma$ と仮定すれば，定理 3.20.(1) より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
  他方，不動点の性質から $\mathbb{N} \models \alpha(\ulcorner \neg\sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner)$ であり，α の取り方から $\neg\sigma^{\mathrm{cert}} \in (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$，
  すなわち $\mathsf{W}_i \vdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ なので $\mathbf{R}_0 + \mathsf{W}_i$ の無矛盾性に反する．
- したがって $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ で，定理 3.20.(2) より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.
- 他方，不動点の性質から $\mathbb{N} \models \neg\alpha(\ulcorner \neg\sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner)$ で，α の取り方から $\neg\sigma^{\mathrm{cert}} \notin (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$ であり，
  $\sigma^{\mathrm{cert}} + \mathsf{W}_i$ は無矛盾．
- 以上より，$i \mapsto \sigma^{\mathrm{cert}}$ を計算する計算可能関数によって $\mathbf{R}_0$ は実効的有限拡大性をもつ． □

定理 3.20 の証明のアウトライン 1

定理 3.20 (再掲)

任意の Σ_1 文 σ に対して，次の条件を満たす Σ_1 文 σ^{cert} が実効的にとれる：

1. $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.

- あとは定理 3.20 を証明すればよいことが分かった．
- 定理 3.20 の証明の方針は次のとおり．

Σ_1 文 σ に対して σ^{cert} を「σ の witness が自然数と同様に振る舞う数であること」を保証する文とする．

- 項目 1 について，$\mathbb{N} \models \sigma$ の場合に，σ の witness が自然数でとれるので，
  $\mathbb{N} \models \sigma^{\mathrm{cert}}$ となる．
  $\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$ が得られる．
- 項目 2 について，$\mathbb{N} \models \neg\sigma$ のとき，σ の witness は自然数にはない．
  σ^{cert} は σ witness がどんな自然数よりも大きくなることを保証し，
  このことから σ^{cert} のモデルは $\mathbf{R}_0$-構造となる．
  つまり $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ となる．

定理 3.20 の証明のアウトライン 2

Σ_1 文 σ に対して，$\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow \exists x\, \sigma_0(x)$ となるいい感じの Δ_0 論理式 $\sigma_0(x)$ をとり，

$$\sigma^{\mathrm{cert}} :\equiv \exists x \left(\mathrm{cert}(x) \land \sigma_0(x)\right)$$

とする．ここで $\mathrm{cert}(v)$ は次の論理式を $\land$ でつなげた論理式：

C1 $0 \leq v$

C2 $\forall x < v\, (\mathsf{s}(x) \leq v)$

C3 $\forall x\, (x \leq 0 \leftrightarrow x = 0)$

C4 $\forall x < v\, \forall y\, \left(y \leq \mathsf{s}(x) \leftrightarrow (y \leq x \lor y = \mathsf{s}(x))\right)$

C5 $\forall x, y, z \leq v\, \left(\mathsf{s}((x \times y) + z) \neq 0\right)$

C6 $\forall x, y, z, w \leq v\, \left(\mathsf{s}((x \times y) + z) = \mathsf{s}w \to (x \times y) + z = w\right)$

C7 $\forall x, y \leq v\, \left((x \times y) + 0 = x \times y\right)$

C8 $\forall x, y, z \leq v\, \left((x \times y) + \mathsf{s}(z) = \mathsf{s}((x \times y) + z)\right)$

C9 $\forall x \leq v\, (x \times 0 = 0)$

C10 $\forall x, y \leq v\, \left(x \times \mathsf{s}(y) = (x \times y) + x\right)$

いい感じの Δ_0 論理式とは純 Δ_0 論理式というもので，詳しくは資料を参照．

定理 3.20 の証明のアウトライン 3

定理 3.20 (再掲)

任意の Σ_1 文 σ に対して，次の条件を満たす Σ_1 文 σ^{cert} が実効的にとれる：

1. $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.

定理 3.20.(1) の証明.

- $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbb{N} \models \sigma_0(\overline{n})$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる.
- $\mathbb{N} \models \mathrm{cert}(\overline{n})$ も成り立つので，$\mathbb{N} \models \exists x\,(\mathrm{cert}(x) \land \sigma_0(x))$，すなわち $\mathbb{N} \models \sigma^{\mathrm{cert}}$.
- σ^{cert} は **C3** と **C4** をうまく書き換えれば Σ_1 文なので（資料を参照），
- $\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$. □

定理 3.20 の証明のアウトライン 4

定理 3.20.(2) の証明における，論理式 $\mathrm{cert}(v)$ **が持つ重要な性質は次の補題：**

補題 3.31

$\mathcal{L}_A$**-構造** M **は** $b \in M$ **と** $k \in \mathbb{N}$ **に対して次の 2 条件を満たすとする：**

1. $M \models \mathrm{cert}(b)$
2. **全ての** $m < k$ **について** $M \models \overline{m} \neq b$**.**

このとき，任意のいい感じの Δ_0 **論理式** $\varphi(x_0, \ldots, x_i)$ **と** $n_0, \ldots, n_i \leq k$ **について**

$$\mathbb{N} \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}) \Rightarrow M \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}).$$

定理 3.20 の証明のアウトライン 5

定理 3.20.(2) の証明.

- $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ とする．このとき，有限理論 $\{\sigma^{\mathrm{cert}}\}$ が Σ_1-完全となることを示す．
- M を σ^{cert} の任意のモデルとすると，ある $b \in M$ に対して $M \models \mathrm{cert}(b) \wedge \sigma_0(b)$.
- いま $M \models \overline{k} = b$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定して矛盾を導く．
  $k^\star$ をそのような k のうちの最小数とすると，全ての $m < k^\star$ について $M \models \overline{m} \neq b$.
  $\mathbb{N} \models \neg\sigma_0(\overline{k}^\star)$ なので，補題 **3.31** より $M \models \neg\sigma_0(\overline{k}^\star)$.
  $k^\star$ の取り方より $M \models \neg\sigma_0(b)$ となるためおかしい．
- 以上より，全ての $k \in \mathbb{N}$ について $M \models \overline{k} \neq b$.
- ψ を $\mathbb{N} \models \psi$ となる任意の Σ_1 文とする．
- いい感じの Δ_0 論理式 $\delta(x)$ が存在して，次が成立：
  (a) $\mathbb{N} \models \psi \leftrightarrow \exists x\, \delta(x)$.
  (b) $\vdash \exists x\, \delta(x) \to \psi$.
- **(a)** から $\mathbb{N} \models \exists x\, \delta(x)$ なので，ある $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{N} \models \delta(\overline{n})$.
- 補題 **3.31** より $M \models \delta(\overline{n})$ で $M \models \exists x\, \delta(x)$ なので **(b)** より $M \models \psi$.
- 完全性定理より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \psi$.
- 以上より σ^{cert} が Σ_1-完全だから $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$. □