

理論の不完全性，決定不能性，分離不能性

2. 第 1 不完全性定理

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2023 年 12 月 27 日
第 2 回ロジック・ウィンタースクール

本日の講義の目的

第 1 不完全性定理

- Gödel (1931)：十分な算術を含む ω -無矛盾かつ再帰的な理論は不完全。
- Rosser (1936)： ω -無矛盾性の仮定は単に無矛盾性に弱められる。
- Craig (1953)：再帰的という仮定は RE に弱められる。
- したがって，こんにちでは Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理として「PA の無矛盾 RE 拡大理論は不完全である」と述べられることが多い。

決定不能性との関わり

- 第 1 不完全性定理は理論の決定不能性と密接な関わりを持つ。
- Rosser (1936)：第 1 不完全性定理から，PA の無矛盾な拡大理論が決定不能であることの導出。

本日の講義の目的

- ① 不完全性や決定不能性に関する諸性質を導入し，それらの間の関係を明らかにする。
- ② R_0 が実際にそれらの性質を持つことを示す。

本日のアウトライン

- ① 本質的不完全性と本質的決定不能性
- ② 一樣本質的不完全性と再帰的分離不能性
- ③ 実効の本質的不完全性，実効の本質的創造性，実効的分離不能性

① 本質的不完全性と本質の決定不能性

② 一樣本質的不完全性と再帰的分離不能性

③ 実効の本質的不完全性，実効の本質の創造性，実効的分離不能性

T_p と T_r

- 以降では $\mathcal{L}_A$ -論理式の Gödel 数化を固定したうえで議論を行う。
- 文の集合 T が RE (再帰的) であるとは, T の要素の Gödel 数全体の集合が RE (再帰的) であることをいう。
- 以降, 単純化のために論理式とその Gödel 数を同一視して扱う場合がある。

定義 (T_p と T_r)

理論 T について,

- $T_p := \{\varphi \mid T \vdash \varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文}\}.$
- $T_r := \{\varphi \mid T \vdash \neg\varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文}\}.$

ここで p と r はそれぞれ provable (証明可能) と refutable (反証可能) を表す。

T_p は $\text{Th}(T)$ と書かれることも多いが, 本講義では記述の簡潔さから T_p を採用する。

- T が無矛盾 $\iff T_p \cap T_r = \emptyset$
- T が完全 $\iff T_p \cup T_r$ は文全体の集合

理論の決定不能性

- T が RE であれば， T_p と T_r はともに RE となる．
- 他方， T が再帰的であったとしても T_p が再帰的とは限らない．

定義（決定可能性，決定不能性）

T を理論とする．

- ① T が**決定可能**であるとは， T_p が再帰的集合であることをいう．
- ② T が決定可能でないとき， T は**決定不能**であるという．

T が決定可能であるとは，与えられた文が T の定理かどうかを実効的に判定できるということ．

理論の不完全性と決定不能性

本日は理論の不完全性と決定不能性の関係进行分析を行うが、まずこれらの概念は基本的には同値ではない。

- 不完全だが決定可能な理論 (Boole 代数の理論, Abel 群の理論など)
- 完全だが決定不能な理論 (True Arithmetic $TA = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文} \}$ など)

が存在する。

RE 理論については決定不能性が不完全性を導く。

命題 2.4

無矛盾な RE 理論 T が決定不能ならば T は不完全。

証明.

RE 理論 T が無矛盾かつ完全であると仮定し, T の決定可能性を示す。

T は RE なので T_p と T_r も RE.

φ を任意の文とすると T の無矛盾性と完全性より, $\varphi \notin T_p \iff \varphi \in T_r$.

よって RE 集合 T_p は補集合も RE なので, 再帰的集合であり, T は決定可能。 □

本質的不完全性と本質的決定不能性 1

- 第 1 不完全性定理は理論の不完全性に関係する定理だが, ある理論の不完全性を主張するだけではなく, その拡大理論たちの不完全性をも主張する定理.

定義 (本質的不完全性, 本質的決定不能性)

T を理論とする.

- ① T の任意の無矛盾な RE 拡大理論が不完全のとき, T は**本質的不完全**という.
- ② T の任意の無矛盾な拡大理論が決定不能のとき, T は**本質的決定不能**という.

これらの概念は実際にそれぞれ不完全性と決定不能性よりも真に強い.

例

有限 $\mathcal{L}_A$ -構造 M について

$$\text{Th}(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文} \}$$

とすると, $\text{Th}(M)$ は無矛盾かつ完全かつ決定可能.

よって言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は不完全で決定不能 (明日確認する) だが, 本質的不完全でも本質的決定不能でもない.

本質的不完全性と本質的決定不能性 2

定理 2.7

T を理論とすると，以下は同値：

- ① T は本質的決定不能．
- ② T は本質的不完全．

証明.

(1 $\Rightarrow$ 2): T が本質的決定不能とする．

T の任意の無矛盾な RE 拡大理論 U をとる．

仮定より U は決定不能．命題 2.4 より U は不完全．

(2 $\Rightarrow$ 1):

- T が本質的決定不能でないとする， T の無矛盾で決定可能な拡大理論 U がある．
- 文全体を Gödel 数の小さい順に並べた列を $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ とし，
- U の拡大理論の列 $U_0, U_1, \dots$ を次のように再帰的に定義する：
 - ① $U_0 := U$
 - ② $U_{n+1} := \begin{cases} U_n + \{\varphi_n\} & U_n + \{\varphi_n\} \text{ が無矛盾のとき,} \\ U_n + \{\neg\varphi_n\} & \text{そうでないとき.} \end{cases}$
- U は無矛盾なので，定義より各 U_n は無矛盾．

本質的不完全性と本質的決定不能性 3

(2: 本質的不完全 $\Rightarrow$ 1: 本質的決定不能) の証明の続き.

- n と文 ψ について $\psi \in (U_n)_p$ かどうかを実効的に判定する手続きを与える:
 - ① U_0 つまり U は決定可能なので, $\psi \in (U_0)_p$ の判定手続きを既に有している.
 - ② $\psi \in (U_n)_p$ の判定手続きがあると仮定する.
 - ξ を, φ_n と $\neg\varphi_n$ のうち U_{n+1} に加えられた方とする.
 - 仮定より $U_n \vdash \neg\varphi_n$ かどうか, つまり $U_n + \{\varphi_n\}$ が無矛盾かどうかを判定できるので, ξ が φ_n と $\neg\varphi_n$ のどちらであるかも判定できる.
 - $U_{n+1} \vdash \psi \iff U_n \vdash \xi \rightarrow \psi$ なので, $(\xi \rightarrow \psi) \in (U_n)_p$ かどうかを判定することで $\psi \in (U_{n+1})_p$ かどうかを判定できる.
- $U^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ とすると U^* は無矛盾かつ完全な U の拡大理論で $U^* = U_p^*$.
- 文 ψ について, ψ が φ_n である $n \in \mathbb{N}$ をとれば, $\varphi_n \in U_p^* \iff \varphi_n \in (U_{n+1})_p$.
- $\psi \in U_p^*$ かどうかを判定するには, $\varphi_n \in (T_{n+1})_p$ かどうかを判定してやればよい.
- したがって U_p^* は再帰的集合.
- U^* は無矛盾かつ完全な U の, つまり T の再帰的拡大理論なので, T は本質的不完全ではない.



R_0 の本質的決定不能性

- T が本質的決定不能であれば, その拡大理論ももちろん本質的決定不能.
- したがって, できるだけ弱い理論に対する本質的決定不能性を示したい.

定理 2.8 (Rosser (1936); Tarski, Mostowski and Robinson (1953); Cobham)

R_0 は本質的決定不能.

証明.

仮定 R_0 の無矛盾な拡大理論 T が決定可能であると仮定して矛盾を導く.

- 自由変数を x だけ含む論理式を Gödel 数の小さい順に $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ と並べ, $D_T := \{n \in \mathbb{N} \mid T \vdash \varphi_n(\bar{n})\}$ と定める.
- $n \in \mathbb{N}$ に対して文 $\varphi_n(\bar{n})$ を計算し, $T \vdash \varphi_n(\bar{n})$ かどうかを T の決定可能性を用いて判定すれば $n \in D_T$ かどうか判定できるので, D_T は再帰的集合.
- 表現可能性定理より, D_T を R_0 において表現する論理式 $\xi(x)$ がとれる.
- $\neg \xi(x)$ はある $k \in \mathbb{N}$ について $\varphi_k(x)$ に等しい.

$$k \in D_T \xRightarrow{\text{表現}} R_0 \vdash \xi(\bar{k}) \xRightarrow{\text{拡大}} T \vdash \xi(\bar{k}) \xRightarrow{\text{無矛盾性}} T \not\vdash \neg \xi(\bar{k}) \xRightarrow{k} T \not\vdash \varphi_k(\bar{k}) \xRightarrow{D_T} k \notin D_T$$

$$\xRightarrow{\text{表現}} R_0 \vdash \neg \xi(\bar{k}) \xRightarrow{\text{拡大}} T \vdash \neg \xi(\bar{k}) \xRightarrow{k} T \vdash \varphi_k(\bar{k}) \xRightarrow{D_T} k \in D_T$$

となり矛盾するので, T は決定可能でない.



R_0 の本質的不完全性

定理 2.7 と 2.8 より次が分かる．

定理 2.10 (第 1 不完全性定理 (Gödel (1931); Rosser (1936); Tarski, Mostowski and Robinson (1953); Cobham))

R_0 は本質的不完全．

- 1 本質的不完全性と本質の決定不能性
- 2 一樣本質的不完全性と再歸的分離不能性
- 3 実効の本質的不完全性，実効の本質の創造性，実効的分離不能性

一樣本質的不完全性と再帰的分離不能性 1

- 理論の本質的不完全性と本質的決定不能性について, それそれぞれに対するより強い概念を導入する.
- 理論の列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が RE であるとは, 集合 $\{(i, \varphi) \mid \varphi \in T_i\}$ が RE であることをいう.

定義 (一樣本質的不完全性と再帰的分離不能性)

T を理論とする.

- ① T が**一樣本質的不完全**とは, T の無矛盾な拡大理論の RE 列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, 文 φ が存在して, 全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して $T_i \not\vdash \varphi$ かつ $T_i \not\vdash \neg\varphi$ となることをいう.
- ② T が**再帰的分離不能**とは, $T_p \subseteq X$ かつ $T_r \cap X = \emptyset$ となるような再帰的集合 X が存在しないことをいう.

一樣本質の不完全性と再帰的分離不能性 2

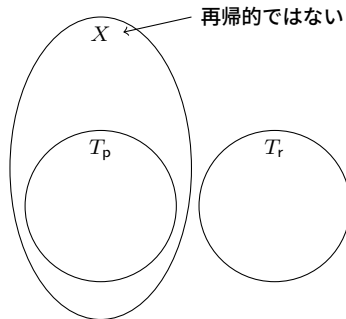


Figure: 再帰的分離不能性

一樣本質の不完全性と再帰的分離不能性 3

- 一樣本質の不完全 $\Rightarrow$ 本質の不完全 (明らか)
- 再帰的分離不能 $\Rightarrow$ 本質の決定不能

命題 2.13

理論 T が再帰的分離不能ならば本質的決定不能.

証明.

T を再帰的分離不能な理論とし, U を T の任意の無矛盾な拡大理論とする.
 $T_p \subseteq U_p$ かつ $T_r \cap U_p = \emptyset$ なので, 再帰的分離不能性より U_p は再帰的ではない.
 したがって U は決定不能. □

逆は一般には成立しない.

事実 (Ehrenfeucht (1961))

本質的決定不能だが再帰的分離不能でないような RE 理論が存在する.

一様本質的不完全性と再帰的分離不能性 4

本質的決定不能 $\iff$ 本質的不完全
 と同様に, 次が成立する.

定理 2.15 (Ehrenfeucht (1961))

無矛盾な RE 理論 T について, 以下は同値:

- ① T は再帰的分離不能.
- ② T は一様本質的不完全.

証明には次の事実を用いる.

事実 (Reduction Theorem)

A と B を RE 集合とすると, RE 集合 $A' \subseteq A$ と $B' \subseteq B$ が存在して,
 $A' \cup B' = A \cup B$ かつ $A' \cap B' = \emptyset$ が成り立つ.

一樣本質の不完全性と再帰的分離不能性 4

(1: 再帰的分離不能 $\Rightarrow$ 2: 一樣本質の不完全) の証明.(1) T を再帰的分離不能とする.仮定 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を T の無矛盾な拡大理論の RE 列とする.

- $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (T_i)_p$ および $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (T_i)_r$ と定めるとこれらは RE 集合.
- Reduction Theorem より, RE 集合 $A' \subseteq A$ と $B' \subseteq B$ で $A' \cup B' = A \cup B$ かつ $A' \cap B' = \emptyset$ となるものがとれる.
- $T_p \subseteq A'$ かつ $T_r \cap A' = \emptyset$ が分かる.
- T の再帰的分離不能性より A' は再帰的集合ではない.
- もし $A' \cup B'$ が全ての文を含むなら, 任意の文 ψ について $\psi \notin A' \iff \psi \in B'$ となり, A' が再帰的となるためおかしい.
- 以上より, ある文 $\varphi \notin A' \cup B' = A \cup B$ が存在.
- これは全ての $i \in \mathbb{N}$ について $T_i \not\vdash \varphi$ かつ $T_i \not\vdash \neg\varphi$ ということ.

一樣本質の不完全性と再帰的分離不能性 5

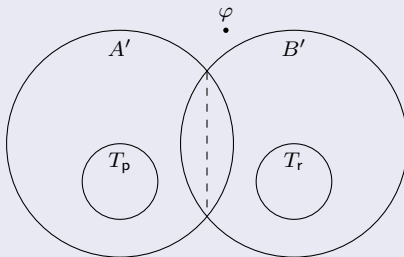


Figure: $(1 \Rightarrow 2)$ の状況

一様本質の不完全性と再帰的分離不能性 6

(2: 一様本質の不完全 $\Rightarrow$ 1: 再帰的分離不能) の証明.(2) T を一様本質の不完全とする.仮定 $T_p \subseteq X$ かつ $T_r \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く.

- $\{\varphi \mid \varphi \in X \text{ \& } \varphi \text{ は文}\} \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \notin X \text{ \& } \varphi \text{ は文}\}$
は RE 集合なので, その要素の実効的な列挙 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ がとれる.
- 各 $i \in \mathbb{N}$ について $T_i := T + \{\psi_i\}$ とすると, $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は T の拡大理論の RE 列.
- 各 T_i の無矛盾性を示す.
 - ① $\psi_i \in X \xrightarrow{\text{仮定}} \psi_i \notin T_r \Rightarrow T \not\models \neg\psi_i \Rightarrow T_i$ は無矛盾.
 - ② (ある $\varphi \notin X$ について ψ_i が $\neg\varphi$) $\xrightarrow{\text{仮定}} \varphi \notin T_p \Rightarrow T \not\models \varphi \Rightarrow T_i$ は無矛盾.
- 一様本質の不完全性より, 文 ξ が存在して,
全ての $i \in \mathbb{N}$ について $T_i \not\models \xi$ かつ $T_i \not\models \neg\xi$.
 - $\xi \in X$ なら, ある $i \in \mathbb{N}$ について $\xi \equiv \psi_i$ で $T_i = T + \xi \vdash \xi$ となりおかしい.
 - $\xi \notin X$ なら, ある $i \in \mathbb{N}$ について $\neg\xi \equiv \psi_i$ で $T_i = T + \neg\xi \vdash \neg\xi$ となりおかしい.
- いずれの場合も矛盾するので, 条件を満たす集合 X は存在しない. □

R_0 の再帰的分離不能性

次の定理は R_0 の本質的決定不能性の改良.

定理 2.16 (Grzegorzczuk, Mostowski and Ryll-Nardzewski (1958); Smullyan (1958))

R_0 は再帰的分離不能.

証明.

仮定 $(R_0)_p \subseteq X$ かつ $(R_0)_r \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く.

- 自由変数を x だけ含む論理式を Gödel 数の小さい順に $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ と並べ,
 $D_X := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(\bar{n}) \in X\}$ と定める.
- X が再帰的であることから D_X も再帰的集合.
- 表現可能性定理より, D_X を R_0 において表現する論理式 $\xi(x)$ がとれる.
- $\neg\xi(x)$ はある $k \in \mathbb{N}$ について $\varphi_k(x)$ に等しい.

$$k \in D_X \stackrel{\text{表現}}{\Rightarrow} R_0 \vdash \xi(\bar{k}) \Rightarrow R_0 \vdash \neg\neg\xi(\bar{k}) \Rightarrow \neg\xi(\bar{k}) \in (R_0)_r$$

$$\stackrel{\text{仮定}}{\Rightarrow} \neg\xi(\bar{k}) \notin X \stackrel{k}{\Rightarrow} \varphi_k(\bar{k}) \notin X \stackrel{D_X}{\Rightarrow} k \notin D_X$$

$$\stackrel{\text{表現}}{\Rightarrow} R_0 \vdash \neg\xi(\bar{k}) \Rightarrow \neg\xi(\bar{k}) \in (R_0)_p \stackrel{\text{仮定}}{\Rightarrow} \neg\xi(\bar{k}) \in X \stackrel{k}{\Rightarrow} \varphi_k(\bar{k}) \in X \stackrel{D_X}{\Rightarrow} k \in D_X$$

となり矛盾するので, このような X は存在しない. □

R_0 の一様本質的不完全性

定理 2.16 と 2.17 より次が分かる．

定理 2.19 (Mostowski (1961))

R_0 は一様本質的不完全．

- ① 本質的不完全性と本質の決定不能性
- ② 一樣本質的不完全性と再帰的分離不能性
- ③ 実効の本質的不完全性，実効の本質の創造性，実効的分離不能性

各性質の実効版

- 定理 2.10 から， R_0 の無矛盾な RE 拡大理論 T に対して，文 φ が存在して $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる．
- しかしこれまでの議論ではそのような文 φ の存在が分かるだけで，具体的に φ を見つける手続きが与えられているわけではない．
- このような観点から，これまでに扱ってきた各性質の実効化について議論する．
- 各性質の実効化とは何かについては丁寧に議論する必要がある．

インデックス i をもつ RE 集合を W_i で表す．

実効の本質的不完全性

本質的不完全性の実効化を定めるのは簡単で， T の無矛盾な RE 拡大理論 U のインデックスから $U \not\models \varphi$ かつ $U \not\models \neg\varphi$ となる文 φ が実効的に得られることを要求すればよい．

定義（実効的本質的不完全性）

理論 T が**実効的本質的不完全**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x)$ が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について， W_i が T の無矛盾な拡大理論ならば，

- $\Phi(i)$ が定義され，
- $\Phi(i)$ は文で，
- $W_i \not\models \Phi(i)$ かつ $W_i \not\models \neg\Phi(i)$

となることをいう．

本質的決定不能性の実効化

- 続いて本質的決定不能性の実効化について考える。
- RE 集合 X が再帰的でないとは，その補集合が RE ではないということ。
 - 任意の $i \in \mathbb{N}$ について， $X \cap W_i = \emptyset$ ならば W_i は X の補集合ではない。
 - 任意の $i \in \mathbb{N}$ について， $X \cap W_i = \emptyset$ ならば $n \notin X \cup W_i$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる。
- RE 集合 X が実効的に再帰的でないとは，ある計算可能部分関数 Φ が存在して，

$$\forall i \in \mathbb{N} (X \cap W_i = \emptyset \Rightarrow \Phi(i) \downarrow \ \& \ \Phi(i) \notin X \cup W_i)$$

となる，ということ。

- これは X が創造的であるということ。

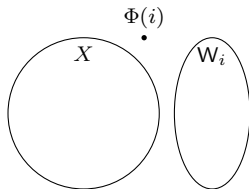


Figure: 創造性

実効の本質的創造性

本質的決定不能性の実効化は次の実効的本質的創造性である。

定義（実効的本質的創造性）

理論 T が**実効的本質的創造的**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について， W_i が T の無矛盾な拡大理論で， $(W_i)_p \cap W_j = \emptyset$ ならば，

- $\Phi(i, j)$ が定義され， $\Phi(i, j)$ は文で，
- $\Phi(i, j) \notin (W_i)_p \cup W_j$

となることをいう。

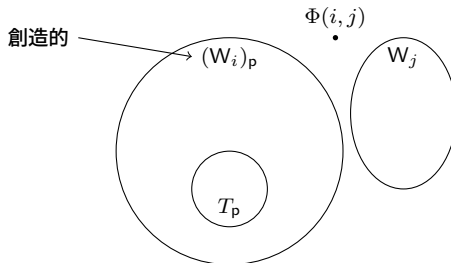


Figure: 実効の本質的創造性

実効的分離不能性

再帰的分離不能性の実効化も同様の考え方で定式化できる。

定義 (実効的分離不能性)

理論 T が**実効的分離不能**であるとは, ある計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して, 任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について, $T_p \subseteq W_i$ かつ $T_r \subseteq W_j$ かつ $W_i \cap W_j = \emptyset$ ならば,

- $\Phi(i, j)$ が定義され, $\Phi(i, j)$ は文で,
- $\Phi(i, j) \notin W_i \cup W_j$

となることをいう。

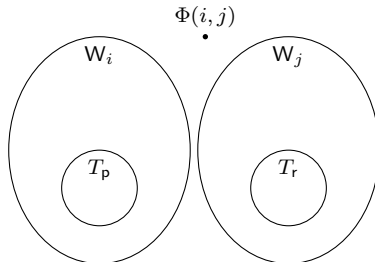


Figure: 実効的分離不能性

実効的本質的不完全性，実効的本質的創造性，実効的分離不能性 1

実効化する前の性質の状況（分析完了）

- 再帰的分離不能 $\Rightarrow$ 本質的決定不能 $\iff$ 本質的不完全
- 再帰的分離不能 $\nRightarrow$ 本質的決定不能

実行化された性質も同様の状況が成立するだろうか？

実効化された性質の状況（予想）

- 実効的分離不能 $\Rightarrow$ 実効的本質的創造的 $\iff$ 実効的本質的不完全 (?)
- 実効的分離不能 $\nRightarrow$ 実効的本質的創造的 (?)

答え（Pour-El の定理）

実効化された 3 つの概念は同値．

実効の本質の不完全性, 実効の本質の創造性, 実効的分離不能性 2

定理 2.24 (Pour-El (1968))

理論 T が無矛盾かつ RE なら, 以下は同値:

- ① T は実効的分離不能.
- ② T は実効の本質的創造的.
- ③ T は実効の本質的不完全.

(1: 実行的分離不能 $\Rightarrow$ 2: 実行の本質的創造的) の証明.

(1) T が実効的分離不能として, それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x, y)$ とする.

- $W_{\Psi(x)} = (W_x)_p$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$ と
 $W_{\Theta(x)} = W_x \cup T_r$ となる計算可能関数 $\Theta(x)$ をとる.

仮定 W_i を T の無矛盾な拡大理論とし, $(W_i)_p \cap W_j = \emptyset$ とする.

- $(W_i)_p \cap T_r = \emptyset$ なので, $W_{\Psi(i)} \cap W_{\Theta(j)} = (W_i)_p \cap (W_j \cup T_r) = \emptyset$.
- $T_p \subseteq W_{\Psi(i)}$ かつ $T_r \subseteq W_{\Theta(j)}$ なので,
 実効的分離不能性より $\Phi(\Psi(i), \Theta(j))$ は定義され, $\Phi(\Psi(i), \Theta(j))$ は文で,
 $\Phi(\Psi(i), \Theta(j)) \notin W_{\Psi(i)} \cup W_{\Theta(j)} = (W_i)_p \cup W_j$.
- 計算可能関数 $\Phi(\Psi(x), \Theta(y))$ によって T は実効の本質的創造的.

実効の本質的不完全性，実効の本質の創造性，実効的分離不能性 3

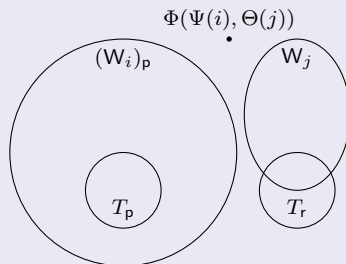


Figure: $(1 \Rightarrow 2)$ の状況

実効の本質の不完全性, 実効の本質の創造性, 実効的分離不能性 4

(2: 実行の本質の創造的 $\Rightarrow$ 3: 実行の本質の不完全) の証明.

(2) T が実効的本質的創造的として, それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x, y)$ とする.

- $W_{\Psi(x)} = (W_x)_r$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$ を用意しておく.

仮定 W_i を T の無矛盾な拡大理論とする.

- $(W_i)_p \cap W_{\Psi(i)} = (W_i)_p \cap (W_i)_r = \emptyset$ なので, 実効的本質的創造性より $\Phi(i, \Psi(i)) \downarrow$ は文で, $\Phi(i, \Psi(i)) \notin (W_i)_p \cup W_{\Psi(i)} = (W_i)_p \cup (W_i)_r$.
- $W_i \not\models \Phi(i, \Psi(i))$ かつ $W_i \not\models \neg\Phi(i, \Psi(i))$ となるため, 計算可能関数 $\Phi(x, \Psi(x))$ によって T は実効の本質的不完全.

実効の本質の不完全性，実効の本質の創造性，実効的分離不能性 5

(3: 実行の本質の不完全 $\Rightarrow$ 1: 実行的分離不能) の証明.(3) T が実効の本質の不完全として，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x)$ とする.

- パラメータありの再帰定理を用いて

$$W_{\Psi(x,y)} = \begin{cases} T + \{\Phi(\Psi(x,y))\} & (a): \Phi(\Psi(x,y)) \downarrow \text{は文} \ \& \ \Phi(\Psi(x,y)) \in W_x \\ T + \{\neg\Phi(\Psi(x,y))\} & (b): \Phi(\Psi(x,y)) \downarrow \text{は文} \ \& \ \Phi(\Psi(x,y)) \in W_y \\ T & \text{それ以外.} \end{cases}$$

を満たす計算可能関数 $\Psi(x,y)$ を用意（詳しくは資料を参照）.仮定 $T_p \subseteq W_i$ かつ $T_r \subseteq W_j$ かつ $W_i \cap W_j = \emptyset$ となる $i, j \in \omega$ をとる.

- $\Phi(\Psi(i,j)) \notin W_i \cup W_j$ を示す.
- まずは $x = i$ と $y = j$ について (a) と (b) が成立しないことを示す.

実効の本質の不完全性, 実効の本質の創造性, 実効的分離不能性 6

(3: 実行の本質の不完全 $\Rightarrow$ 1: 実行的分離不能) の証明の続き.(a) $\Phi(\Psi(i, j)) \downarrow$ が文で $\Phi(\Psi(i, j)) \in W_i$ のとき:

- このとき $W_{\Psi(i, j)} = T + \{\Phi(\Psi(i, j))\}$.
- $W_i \cap T_r = \emptyset$ なので $\Phi(\Psi(i, j)) \notin T_r$, つまり $T \not\models \neg\Phi(\Psi(i, j))$.
- よって $W_{\Psi(i, j)}$ は T の無矛盾な拡大理論.
- 実効の本質の不完全性より $W_{\Psi(i, j)} \not\models \Phi(\Psi(i, j))$ だが, $W_{\Psi(i, j)} = T + \{\Phi(\Psi(i, j))\}$ に反する.

(b) $\Phi(\Psi(i, j)) \downarrow$ が文で $\Phi(\Psi(i, j)) \in W_j$ のとき:

(a) と同様に

 $W_{\Psi(i, j)} = T + \{\neg\Phi(\Psi(i, j))\}$ かつ $W_{\Psi(i, j)} \not\models \neg\Phi(\Psi(i, j))$ となりおかしい.

- 以上より, $W_{\Psi(x, y)} = T$.
- $W_{\Psi(x, y)}$ は T の無矛盾な拡大理論で, $\Phi(\Psi(i, j))$ が定義され, $\Phi(\Psi(i, j))$ は文.
- (a), (b) の議論で $\Phi(\Psi(i, j)) \notin W_i \cup W_j$ が示せており,
以上から計算可能関数 $\Phi(\Psi(x, y))$ によって T は実効的分離不能.



R_0 の実効的本質的不完全性 1

- 続いて R_0 が実際に実効的本質的不完全であることの証明の概略を述べる.
- これは通常の Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理の証明を行えばよい.

定理 2.27 (不動点定理 (Gödel (1931); Carnap (1934)))

自由変数を x のみ含むような任意の $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x)$ に対して, 次の同値性を満たす $\mathcal{L}_A$ -文 ψ が実効的にとれる:

$$R_0 \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

ここで $\ulcorner \psi \urcorner$ は ψ の Gödel 数の数項.

定理 2.28 (Craig のトリック (Craig (1953)))

任意の RE 理論 T に対して, $T_p = T'_p$ である再帰的理論 T' が実効的にとれる

これらの証明は資料やいろいろな教科書を参照.

R_0 の実効的本質的不完全性 2

定理 2.29 (Gödel (1931); Rosser (1936); Tarski, Mostowski and Robinson (1953); Cobham)

R_0 は実効的本質的不完全.

証明.

仮定 W_i を R_0 の無矛盾な拡大理論とする.

- Craig のトリックによって得られる, $(W_i)_p = U_p$ を満たす再帰的理論を U とする.
- 関係 “ y は x の U における証明の Gödel 数” は再帰的なので, R_0 に対する表現可能性定理より, この関係を R_0 において表現する論理式 $\text{Prf}_U(x, y)$ が実効的にとれる.
- 不動点定理より文 ψ で次の同値性を満たすものが実効的にとれる:

$$R_0 \vdash \psi \leftrightarrow \forall y \left(\text{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \rightarrow \exists z \leq^{\dagger} y \text{Prf}_U(\ulcorner \neg \psi \urcorner, z) \right).$$

- 通常通り $U \not\vdash \psi$ かつ $U \not\vdash \neg \psi$ となることを示す (資料を参照).
- $W_i \not\vdash \psi$ かつ $W_i \not\vdash \neg \psi$ なので, $i \mapsto \psi$ を計算する計算可能関数により R_0 は実行的本質的不完全.



R_0 の実効的本質的不完全性 3

定理 2.24 と 2.29 より，次の定理が従う．

定理 2.30 (Smullyan (1960))

R_0 は実効的本質的創造的かつ実効的分離不能．