

理論の不完全性，決定不能性，分離不能性

1. Σ_1 -完全性と表現可能性

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2023 年 12 月 26 日
第 2 回ロジック・ウィンタースクール

講義全体の概要

Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理

十分な算術 T を含む無矛盾な RE 理論は不完全.

- 理論の不完全性は決定不能性や分離不能性の概念と密接に関わっており, こうした話題に関する研究が 1950 年代から 1960 年代にかけて行われていた.
- 本講義では Tarski, Mostowski and Robinson による弱い算術の理論 R と Cobham による R の部分理論 R_0 の本質的不完全性を始めとする, 理論の不完全性・決定不能性・分離不能性に関する古典的な諸結果を紹介.
- これらを再検討しようとする最近の試みについても紹介.

講義の予定

各回の内容は次のとおり.

1. Σ_1 -完全性と表現可能性

理論 R と R_0 を導入し, それらの基本的な性質を分析する.
これらの理論に対する Σ_1 -完全性定理及び表現可能性定理を証明する.

2. 第 1 不完全性定理

第 1 不完全性定理に関連する諸概念を導入し, それらの関係を分析する.
Ehrenfeucht の定理と Pour-El の定理.
また, 理論 R_0 がこれらの性質を持つことを随時確認していく.

3. 本質的遺伝的決定不能性

本質的遺伝的決定不能性に関連する諸概念を分析する.
実効的本質的遺伝的創造性と強実効的分離不能性.
理論 R_0 がこれらの性質を有することを主張する Cobham の定理および Vaught の定理.

4. 関連する話題の紹介

Lindenbaum 代数の同型性に関する話題と, 解釈可能性に関する話題について紹介する.

講義資料について

- 毎回の講義は 1 時間であり，スライドに掲載できる情報も限られています．
- 講義の内容をまとめた資料には可能な限りの証明と情報を記載してあるので，講義の内容の細部の理解や復習に役立ててもらえたら嬉しいです．
- 随時更新する予定です．

本日のアウトライン

- ① 理論 R と R_0 の基本性質
- ② Σ_1 -完全性定理
- ③ 関数と集合の表現可能性
- ④ R_0 における R の解釈

① 理論 R と R_0 の基本性質

② Σ_1 -完全性定理

③ 関数と集合の表現可能性

④ R_0 における R の解釈

算術の言語 $\mathcal{L}_A$ と数項

定義 (算術の言語)

$\mathcal{L}_A = \{0, s, +, \times, \leq\}$ とし, これを**算術の言語**という.

- 0 は定数記号
- s は1変数関数記号
- $+, \times$ は2変数関数記号
- $\leq$ は2変数関係記号

- 本講義では第4回を除いて言語 $\mathcal{L}_A$ の理論や論理式のみを扱う.
- 単に理論や論理式と書けば, それは $\mathcal{L}_A$ -理論や $\mathcal{L}_A$ -論理式を表すこととしておく.

s は後者関数を意図する関数記号であり, 例えば $s(s(0))$ は2を意図する $\mathcal{L}_A$ -項.

定義 (数項)

各自然数 n に対する**数項** $\bar{n}$ を以下で再帰的に定める.

- $\bar{0}$ は 0 .
- $\overline{n+1}$ は $s(\bar{n})$.

理論 R と R₀定義 (理論 R と R₀)

次の公理図式 R1~R5 からなる $\mathcal{L}_A$ -理論を R という：

$$\mathbf{R1} \quad \overline{m} + \overline{n} = \overline{m + n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$\mathbf{R2} \quad \overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$\mathbf{R3} \quad \overline{m} \neq \overline{n} \quad (m \neq n \text{ となる } m, n \in \mathbb{N})$$

$$\mathbf{R4} \quad \forall x (x \leq \overline{n} \rightarrow \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\mathbf{R5} \quad \forall x (x \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

R の公理図式 R5 を次の公理図式 R6 に置き換えることで得られる $\mathcal{L}_A$ -理論を R₀ という：

$$\mathbf{R6} \quad \overline{m} \leq \overline{n} \quad (m \leq n \text{ となる } m, n \in \mathbb{N})$$

- R は Tarski, Mostowski and Robinson (1953) によって導入された。
- R₀ はその後 Cobham によって見いだされた。

$$R \vdash R_0$$

定義 (拡大理論)

理論 T が理論 S の**拡大理論**であるとは, T が S の全ての定理を証明できることをいう.
このとき, $T \vdash S$ とかく.

命題 1.4

$$R \vdash R_0.$$

証明.

$m, n \in \mathbb{N}$ について, $m \leq n$ ならば $R \vdash \overline{m} \leq \overline{n}$ を示せばよい

- $m = n$ のとき: R5 より $R \vdash x \leq \overline{m} \vee \overline{m} \leq x$ なので, x に $\overline{m}$ を代入すれば $R \vdash \overline{m} \leq \overline{m} \vee \overline{m} \leq \overline{m}$ だから $R \vdash \overline{m} \leq \overline{m}$.
- $m < n$ のとき: 任意の $k \leq m$ について $n \neq k$ であるから, R3 より

$$R \vdash \bigwedge_{k \leq m} \overline{n} \neq \overline{k}.$$

したがって R4 より $R \vdash \overline{n} \not\leq \overline{m}$ なので, R5 から $R \vdash \overline{m} \leq \overline{n}$ を得る. □

有限公理化不可能性 1

R と R_0 は無限個の公理を持つが、実は有限公理化不可能である。
そのことを示すために次の 2 つの命題を示す。

命題 1.7.(1)

R_0 は有限モデルを持たない。

証明.

$M \models R_0$ について、 $R3$ より各自然数 i, j について $M \models \bar{i} \neq \bar{j}$.
したがって $\{\bar{i}^M \mid i \in \mathbb{N}\}$ は M の領域の無限部分集合。



有限公理化不可能性 2

命題 1.7.(2)

有限理論 T が $R \vdash T$ を満たすなら、 T は有限モデルを持つ。

証明.

- R の公理 $R3$ を, $i, j \leq k$ ($i \neq j$) に制限することによって得られる理論を $R \upharpoonright k$ とかく。
- $R \upharpoonright k$ が有限モデルを持つことを示せば十分。
- 標準モデル $\mathbb{N}$ の領域を k 以下に制限し,

各演算を k 以下に切り落とすことで得られる $\mathcal{L}_A$ -構造を M とする。

例えば $i +^M j := \min\{i + j, k\}$ (詳しい定義は資料を参照)。

$$R1 : \overline{m}^M +^M \overline{n}^M = \min\{m + n, k\} = \overline{m + n}^M.$$

$$R2 : \overline{m}^M \times^M \overline{n}^M = \min\{m \times n, k\} = \overline{m \times n}^M.$$

$$R3 : i, j \leq k$$
 ($i \neq j$) について, $\overline{i}^M = i$ と $\overline{j}^M = j$ となり, $\overline{i}^M \neq \overline{j}^M$.

$$R4 : i \leq^M \overline{n}^M$$
 なら, $i \leq^M \min\{n, k\}$ つまり $i \leq \min\{n, k\}$ で,

特に $i \leq n$ かつ $i = \overline{i}^M$. よって $i \in \{\overline{0}^M, \dots, \overline{n}^M\}$.

$$R5 : \text{任意の } i \in M \text{ について, } i \leq \min\{n, k\} \text{ または } \min\{n, k\} \leq i \text{ なので,}$$

$$i \leq^M \min\{n, k\} \text{ または } \min\{n, k\} \leq^M i, \text{ すなわち } i \leq^M \overline{n}^M \text{ または } \overline{n}^M \leq^M i.$$

- 以上より $M \models R \upharpoonright k$.



有限公理化不可能性 3

定理 1.8

R および R_0 は有限公理化不可能.

証明.

R もしくは R_0 を公理化する有限理論 T があったとすると, 特に $R \vdash T \vdash R_0$.

命題 1.7.(2) より T は有限モデル M を持つ.

M は R_0 のモデルでもあるので命題 1.7.(1) に反する.



R_0 -構造と R -構造 1

続いて、 R_0 や R のモデルについて分析する。

定義 (R_0 -構造と R -構造)

$\mathcal{L}_A$ -構造 M が **R_0 -構造** であるとは、次が成り立つことをいう：

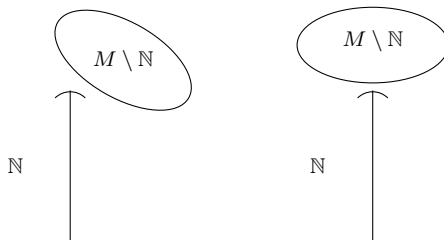
- ① 標準モデル $\mathbb{N}$ は M の部分構造。

すなわち、 $0^M = 0$ であり、 s^M , $+^M$, $\times^M$, $\leq^M$ の $\mathbb{N}$ への制限はそれぞれ $\mathbb{N}$ の後者関数 s , 加法 $+$, 乗法 $\times$, 順序 $\leq$ 。

- ② 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $a \in M$ について、もし $a \leq^M n$ ならば $a \in \mathbb{N}$ 。

R_0 -構造が次の条件を満たすとき、 **R -構造** であるという。

- すべての $n \in \mathbb{N}$ と $a \in M \setminus \mathbb{N}$ について $n \leq^M a$ 。

R_0 -構造と R -構造 2Figure: R_0 -構造と R -構造

R_0 -構造と R -構造 3

定理 1.10.(1)

$\mathcal{L}_A$ -構造 M について, $M \models R_0 \iff M$ はある R_0 -構造と同型.

証明.

($\Rightarrow$): $M \models R_0$ について, $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ を, $n \mapsto \bar{n}^M$ で定める.

- $\mathbb{N}_M := \{\bar{n}^M \mid n \in \mathbb{N}\}$ として, f が $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_M$ を保証することを示す (f が全射は OK).

単射: $m \neq n \xRightarrow{R3} \bar{m}^M \neq \bar{n}^M \Rightarrow f(m) \neq f(n)$.

準同型: 例えば $+$ について

$$f(m+n) = \overline{m+n}^M \stackrel{R1}{=} \bar{m}^M +^M \bar{n}^M = f(m) +^M f(n).$$

項目 2: $a \leq^M \bar{n}^M \stackrel{R4}{\Rightarrow} \exists k \leq n (a = \bar{k}^M) \Rightarrow a \in \mathbb{N}_M$.

($\Leftarrow$): 任意の R_0 -構造 M が R_0 のモデルであることを示せばよい.

- s^M は s の拡張なので, 各数項 $\bar{n}$ は M において $n \in \mathbb{N}$ として解釈される.
- $+^M$ と $\times^M$ と $\leq^M$ はそれぞれ $+$ と $\times$ と $\leq$ の拡張なので, R1, R2, R3, R6 は M においても成立.

R4: 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $a \leq^M \bar{n}$ となる $a \in M$ をとれば, R_0 -構造の定義の項目 2 より $a \in \mathbb{N}$ なので $a \leq n$ であり, $a \in \{0, 1, \dots, n\}$. □

$\mathbf{R}_0$ -構造と $\mathbf{R}$ -構造 4

証明は省略するが（資料を参照）， $\mathbf{R}$ についても次が成り立つ．

定理 1.10.(2)

$\mathcal{L}_A$ -構造 M について， $M \models \mathbf{R} \iff M$ はある $\mathbf{R}$ -構造と同型．

系 1.11

$\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}_0$ の真の拡大理論．

証明．

$\mathbf{R}_0$ -構造 $M = \langle \mathbb{N} \cup \{a\}; 0, s^M, +^M, \times^M, \leq^M \rangle$ を適当に $0 \not\leq^M a$ となるように定めてやれば，これは $\mathbf{R}$ -構造ではない． $M \models \mathbf{R}_0$ だが $M \not\models \mathbf{R}$ なので $\mathbf{R}_0 \not\vdash \mathbf{R}$. $\square$

次の文は $\mathbf{R}$ では証明できない．

$$\forall x (s(x) \neq \bar{0}) \quad \forall x (x + 0 = x) \quad \forall x \forall y (x \leq y \rightarrow \exists z (z + x = y))$$

理論 Q と PA

- R₀ や R は $\forall$ を含むような文に関する証明能力がほぼない。
- 適切に量化記号を使用することによって R の拡大有限理論が得られる。

定義 (理論 Q と PA)

次の公理 Q1~Q8 からなる $\mathcal{L}_A$ -理論を **Robinson 算術 Q** という：

$$\text{Q1 } \forall x (s(x) \neq 0)$$

$$\text{Q2 } \forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\text{Q3 } \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = s(y)))$$

$$\text{Q4 } \forall x (x + 0 = x)$$

$$\text{Q5 } \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\text{Q6 } \forall x (x \times 0 = 0)$$

$$\text{Q7 } \forall x \forall y (x \times s(y) = x \times y + x)$$

$$\text{Q8 } \forall x \forall y (x \leq y \leftrightarrow \exists z (z + x = y))$$

Q に帰納法公理図式 Ind を加えることで得られる $\mathcal{L}_A$ -理論を **Peano 算術 PA** という：

$$\text{Ind } \forall \vec{y} (\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(s(x), \vec{y})) \rightarrow \forall x \varphi(x, \vec{y}))$$

定理 1.13

$$\text{PA} \vdash \text{Q} \vdash \text{R}.$$

① 理論 R と R_0 の基本性質

② Σ_1 -完全性定理

③ 関数と集合の表現可能性

④ R_0 における R の解釈

諸定義

R_0 や R は非常に弱い理論であるが、一方で $\mathbb{N}$ において正しい Σ_1 文をすべて証明することができる。

定義 (Δ_0 論理式と Σ_1 論理式)

- ① $\mathcal{L}_A$ -論理式 φ と変数 x を含まない $\mathcal{L}_A$ -項 t について、 $\exists x \leq t \varphi$ および $\forall x \leq t \varphi$ をそれぞれ $\exists x (x \leq t \wedge \varphi)$ および $\forall x (x \leq t \rightarrow \varphi)$ の略記とする。
含まれる量化記号が全てこれらの形をしている $\mathcal{L}_A$ -論理式を **Δ_0 論理式**という。
- ② Δ_0 論理式 φ について $\exists v_0 \cdots \exists v_{k-1} \varphi$ という形の論理式を **Σ_1 論理式**という。
特に $k = 0$ の場合、つまり量化記号のブロックが空の場合も許す。
したがって Δ_0 論理式はまた Σ_1 論理式でもある。

定義 (Σ_1 -完全性)

理論 T が **Σ_1 -完全**であるとは、任意の Σ_1 文 σ について、 $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $T \vdash \sigma$ となることをいう。

Σ_1 -完全性定理 1

- R_0 の Σ_1 -完全性を証明する.
- それだけではなく R_0 は Σ_1 -完全な理論の中で最小.
その意味で R_0 は特別な理論 (Švejdar (2008)).

定理 1.16 (Σ_1 -完全性定理)

任意の $\mathcal{L}_A$ -理論 T について, T が Σ_1 -完全 $\iff T \vdash R_0$.

証明.

($\Rightarrow$): R_0 の公理は全て $\mathbb{N}$ において正しい Δ_0 文.

したがって T が Σ_1 -完全であれば, T は R_0 の全ての公理を証明できる.

($\Leftarrow$): R_0 の Σ_1 -完全性を証明すればよい.

$M \models R_0$ を任意にとる. M は R_0 -構造としてよい.

M は $\mathbb{N}$ を部分構造に持つため,

- 原子 $\mathcal{L}_A$ -文 φ について

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff M \models \varphi$$

- 任意の閉 $\mathcal{L}_A$ -項 t について, $t^M = n = t^{\mathbb{N}}$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる.

Σ_1 -完全性定理 2 R_0 の Σ_1 -完全性の証明の続き (2/4).

任意の Δ_0 文 φ について,

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff M \models \varphi$$

が成り立つことを φ の構成に関する帰納法で示す.

- φ が原子文なら OK.
- φ が $\psi_0 \wedge \psi_1$ のとき:

$$\mathbb{N} \models \psi_0 \wedge \psi_1 \iff \mathbb{N} \models \psi_0 \ \& \ \mathbb{N} \models \psi_1$$

$$\stackrel{\text{I.H.}}{\iff} M \models \psi_0 \ \& \ M \models \psi_1$$

$$\iff M \models \psi_0 \wedge \psi_1$$

- $\psi_0 \vee \psi_1$ や $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ や $\neg\psi_0$ の場合も同様.

Σ_1 -完全性定理 3 R_0 の Σ_1 -完全性の証明の続き (3/4).

- φ が $\exists x \leq t \delta(x)$ のとき: $t^M = n = t^{\mathbb{N}}$ となる $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathbb{N} \models \exists x \leq \bar{n} \delta(x) \iff M \models \exists x \leq \bar{n} \delta(x)$$

を示せば十分.

($\Rightarrow$): $\mathbb{N} \models \exists x \leq \bar{n} \delta(x)$ とすると, ある $k \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{N} \models \bar{k} \leq \bar{n} \wedge \delta(\bar{k})$.

I.H. より $M \models \bar{k} \leq \bar{n} \wedge \delta(\bar{k})$ となり, $M \models \exists x \leq \bar{n} \delta(x)$.

($\Leftarrow$): $\mathbb{N} \models \neg \exists x \leq \bar{n} \delta(x)$ とすると, 任意の $k \leq n$ について $\mathbb{N} \models \neg \delta(\bar{k})$.

I.H. より

$$M \models \bigwedge_{k \leq n} \neg \delta(\bar{k}) \quad \text{したがって} \quad M \models \forall x \left(\bigvee_{k \leq n} x = \bar{k} \rightarrow \neg \delta(x) \right).$$

R4 より $M \models \forall x \leq \bar{n} \neg \delta(x)$ すなわち $M \models \neg \exists x \leq \bar{n} \delta(x)$.

- φ が $\forall x \leq t \delta(x)$ の場合も同様.

以上で $\forall \varphi: \Delta_0$ 文 $(\mathbb{N} \models \varphi \iff M \models \varphi)$ が示せた.

Σ_1 -完全性定理 4

R_0 の Σ_1 -完全性の証明の続き (4/4).

- 最後に, $\mathbb{N} \models \sigma$ を満たす Σ_1 文 σ を任意にとる.
- σ は Δ_0 論理式 $\delta(\vec{x})$ について $\exists \vec{x} \delta(\vec{x})$ という形.
- $\mathbb{N} \models \exists \vec{x} \delta(\vec{x})$ なので, 自然数の組 $\vec{k}$ があって $\mathbb{N} \models \delta(\vec{k})$.
- 先ほど示したことから $M \models \delta(\vec{k})$ なので, $M \models \sigma$.
- M は任意の R_0 のモデルなので, 完全性定理より $R_0 \vdash \sigma$.



① 理論 R と R_0 の基本性質

② Σ_1 -完全性定理

③ 関数と集合の表現可能性

④ R_0 における R の解釈

関数の表現可能性 1

Σ_1 -完全性定理の応用として、 R_0 に対する関数と集合の表現可能性定理を示す。

定義（関数の表現可能性）

T を理論、 $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ を $x_1, \dots, x_k, y$ 以外に自由変数をもたない論理式、 f を $\mathbb{N}$ 上の k 変数部分関数とする。

- ① φ が f を T において**表現する**とは、任意の $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$ について、

$$f(n_1, \dots, n_k) = m \text{ ならば } T \vdash \forall y (\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m})$$

が成り立つことをいう。

- ② f が T において**表現可能**であるとは、 f を T において表現する論理式が存在することをいう。

関数の表現可能性 2

定理 1.20 (R に対する表現可能性定理 (関数))

$\mathbb{N}$ 上の任意の計算可能な部分関数は R において Σ_1 論理式で表現可能.

証明.

- 議論の単純化のために, $\mathbb{N}$ 上の計算可能な 1 変数部分関数 f に対してのみ証明する.
- Δ_0 論理式 $\delta(x, y, z)$ があって, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ について

$$f(n) = m \iff \mathbb{N} \models \exists z \delta(\bar{n}, \bar{m}, z)$$

となる (資料を参照) .

- ここで Σ_1 論理式 $\sigma(x, y)$ を

$$\exists w (y \leq w \wedge \exists z \leq w \delta(x, y, z) \wedge \forall y' \leq w \forall z \leq w (\delta(x, y', z) \rightarrow y' = y))$$

と定め, $\sigma(x, y)$ が R において f を表現することを示す.

- いま $f(n) = m$ として, 次を示す:

$$R \vdash \forall y (\sigma(\bar{n}, y) \leftrightarrow y = \bar{m})$$

関数の表現可能性 3

証明の続き (2/3).

($\leftarrow$): $R \vdash \forall y (y = \overline{m} \rightarrow \sigma(\overline{n}, y))$ を示す.

- $f(n) = m$ なので, $\mathbb{N} \models \delta(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ がとれる.
- Σ_1 -完全性定理より $R \vdash \delta(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$.
- また, $m' \neq m$ とすれば $f(n) \neq m'$ なので, $\mathbb{N} \models \forall z \neg \delta(\overline{n}, \overline{m'}, z)$.
- ここで $r = \max\{m, k\}$ すると

$$\mathbb{N} \models \forall y' \leq \overline{r} \forall z \leq \overline{r} (\delta(\overline{n}, y', z) \rightarrow y' = \overline{m}).$$

- これは Δ_0 文なので Σ_1 -完全性定理より

$$R \vdash \forall y' \leq \overline{r} \forall z \leq \overline{r} (\delta(\overline{n}, y', z) \rightarrow y' = \overline{m}). \quad (1)$$

- R6 より $R \vdash \overline{m} \leq \overline{r} \wedge \overline{k} \leq \overline{r}$ なので, (1) と合わせれば

$$R \vdash \overline{m} \leq \overline{r} \wedge \overline{k} \leq \overline{r} \wedge \delta(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}) \wedge \forall y' \leq \overline{r} \forall z \leq \overline{r} (\delta(\overline{n}, y', z) \rightarrow y' = \overline{m}).$$

- すなわち $R \vdash \sigma(\overline{n}, \overline{m})$ であり, つまり

$$R \vdash \forall y (y = \overline{m} \rightarrow \sigma(\overline{n}, y)).$$

関数の表現可能性 4

証明の続き (3/3).

$(\rightarrow)$: $R \vdash \forall y (\sigma(\bar{n}, y) \rightarrow y = \bar{m})$ を示す.

- $R \vdash y \leq v \wedge v \leq \bar{r} \rightarrow y \leq \bar{r}$ が示せるので (資料の命題 1.5.(3)) ,

$$R \vdash w \leq \bar{r} \wedge y \leq w \wedge z \leq w \wedge \delta(\bar{n}, y, z) \rightarrow y \leq \bar{r} \wedge z \leq \bar{r} \wedge \delta(\bar{n}, y, z).$$

- これと (1) を合わせて,

$$R \vdash w \leq \bar{r} \wedge y \leq w \wedge \exists z \leq w \delta(\bar{n}, y, z) \rightarrow y = \bar{m}. \quad (2)$$

- $m \leq r$ かつ $m \leq k$ なので, 資料の命題 1.5.(4) より $R \vdash \bar{r} \leq w \rightarrow \bar{m} \leq w \wedge \bar{k} \leq w$.

- これと $R \vdash \delta(\bar{n}, \bar{m}, \bar{k})$ を合わせれば

$$R \vdash \bar{r} \leq w \wedge \forall y' \leq w \forall z \leq w (\delta(\bar{n}, y', z) \rightarrow y' = y) \rightarrow y = \bar{m}. \quad (3)$$

- **R5** より $R \vdash w \leq \bar{r} \vee \bar{r} \leq w$ なので, (2) と (3) を合わせれば

$$R \vdash y \leq w \wedge \exists z \leq w \delta(\bar{n}, y, z) \wedge \forall y' \leq w \forall z \leq w (\delta(\bar{n}, y', z) \rightarrow y' = y) \rightarrow y = \bar{m}$$

- すなわち

$$R \vdash \forall y (\sigma(\bar{n}, y) \rightarrow y = \bar{m}).$$



関数の表現可能性 5

注意

Σ_1 -完全性は R_0 に対して成立したが、
 表現可能性定理の証明においては R 固有の公理図式 $R5$ が明示的に用いられている。
 したがって R_0 に対してはそのままの議論では証明が通らない。
 この点については次の節で議論を行う。

集合の表現可能性 1

定義（集合の表現可能性）

T を理論, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ を $x_1, \dots, x_k$ 以外の自由変数をもたない論理式, $X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする.

① φ が X を T において**表現する**とは, 任意の $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ について,

- $(n_1, \dots, n_k) \in X$ ならば $T \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$
- $(n_1, \dots, n_k) \notin X$ ならば $T \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$

が成り立つことをいう.

② X が T において**表現可能**であるとは, X を T において表現する論理式が存在することをいう.

集合の表現可能性 2

 R に対する表現可能性定理 (集合)

任意の再帰的集合は R において Σ_1 論理式で表現可能.

証明.

- $X \subseteq \mathbb{N}^k$ を再帰的集合とすると, X の特性関数 $f(x_1, \dots, x_k)$, すなわち

$$f(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1, \dots, n_k) \in X \\ 0 & (n_1, \dots, n_k) \notin X \end{cases}$$

を満たす関数 f は計算可能な全域関数.

- 表現可能性定理より, R において f を表現する Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ がとれる.
- Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k, \bar{1})$ が R において X を表現することを示す.
 - ① $(n_1, \dots, n_k) \in X$ とすれば, $f(n_1, \dots, n_k) = 1$ であり,
 $R \vdash \forall y (\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \bar{1})$ だから $R \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \bar{1})$.
 - ② $(n_1, \dots, n_k) \notin X$ とすれば, $f(n_1, \dots, n_k) = 0$ であり,
 $R \vdash \forall y (\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \bar{0})$ と $R \vdash \bar{1} \neq \bar{0}$
より $R \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \bar{1})$.



① 理論 R と R_0 の基本性質

② Σ_1 -完全性定理

③ 関数と集合の表現可能性

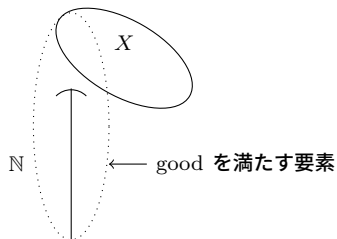
④ R_0 における R の解釈

R_0 における R の解釈 1

- 表現可能性定理の証明には $R5$ が用いられており, R_0 に対してはそのままでは適用することができない.
- しかし, Δ_0 論理式 $x \leq^+ y$ があって, $\leq^+$ に対する $R4$ と $R5$ が R_0 で証明できる.
- $\leq$ の代わりに $\leq^+$ を使用すれば, 表現可能性定理の証明を R_0 に対して適用できる.

定義

- Δ_0 論理式 $\text{good}(y)$ を $\bar{0} \leq y \wedge \forall z \leq y (z = y \vee s(z) \leq y)$ と定める.
- Δ_0 論理式 $x \leq^+ y$ を $\text{good}(y) \rightarrow x \leq y$ と定める.
- $\mathcal{L}_A$ -論理式 φ の中に現れる $t_0 \leq t_1$ という部分論理式を全て $t_0 \leq^+ t_1$ で置き換えることで得られる論理式を φ^+ とかく.

R_0 における R の解釈 2Figure: R_0 -構造 における good のイメージ

R_0 における R の解釈 3

まずは R_0 が $\leq^\dagger$ の R4 を証明できることをみる.

補題 1.25.(1)

$n \in \mathbb{N}$ について, $R_0 \vdash \forall x (x \leq^\dagger \bar{n} \rightarrow \bigvee_{k \leq n} x = \bar{k})$.

証明.

- $\mathbb{N} \models \text{good}(\bar{n})$ なので, Σ_1 -完全性定理より $R_0 \vdash \text{good}(\bar{n})$.
- したがって,

$$R_0 \vdash x \leq^\dagger \bar{n} \leftrightarrow x \leq \bar{n}.$$

- これと R4 を合わせれば, $R_0 \vdash \forall x (x \leq^\dagger \bar{n} \rightarrow \bigvee_{k \leq n} x = \bar{k})$. □

定義 (再掲)

- $\text{good}(y)$ は $\bar{0} \leq y \wedge \forall z \leq y (z = y \vee s(z) \leq y)$.
- $x \leq^\dagger y$ は $\text{good}(y) \rightarrow x \leq y$.

R_0 における R の解釈 4

補題 1.25.(2)

$n \in \mathbb{N}$ について, $R_0 \vdash \forall x (x \leq^\dagger \bar{n} \vee \bar{n} \leq^\dagger x)$.

証明.

- まずは全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge x \not\leq \bar{n} \rightarrow \bar{n} \leq x$$

を n に関する帰納法で示す.

- $n = 0$ については $\text{good}(x)$ の定め方より成立.
- $R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge x \not\leq \bar{n} \rightarrow \bar{n} \leq x$ と仮定.
- $R_0 \vdash x \leq \bar{n} \rightarrow x \leq \overline{n+1}$ が示せる (資料の命題 1.5.(3) と R6) ので I.H. と合わせて

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge x \not\leq \overline{n+1} \rightarrow \bar{n} \leq x,$$

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge x \not\leq \overline{n+1} \rightarrow \bar{n} \leq x \wedge \bar{n} \neq x \rightarrow \overline{n+1} \leq x. \quad (R_0 \vdash x = \bar{n} \rightarrow x \leq \overline{n+1} \text{ より})$$

- ここで $\text{good}(x)$ の定め方より $R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge \bar{n} \leq x \wedge \bar{n} \neq x \rightarrow \overline{n+1} \leq x$.
- これらを合わせると

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \wedge x \not\leq \overline{n+1} \rightarrow \overline{n+1} \leq x.$$

R_0 における R の解釈 5

証明の続き.

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \rightarrow (x \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x)$$

が示せた.

- $R_0 \vdash x \leq \bar{n} \leftrightarrow x \leq^\dagger \bar{n}$ だったので

$$R_0 \vdash \text{good}(x) \rightarrow (x \leq^\dagger \bar{n} \vee \bar{n} \leq^\dagger x).$$

- 他方, $\leq^\dagger$ の定め方より $R_0 \vdash \neg \text{good}(x) \rightarrow \forall y (y \leq^\dagger x)$ なので, 特に

$$R_0 \vdash \neg \text{good}(x) \rightarrow \bar{n} \leq^\dagger x.$$

- 排中律より

$$R_0 \vdash x \leq^\dagger \bar{n} \vee \bar{n} \leq^\dagger x.$$



R_0 における R の解釈 6

補題より次の定理が直ちに従う。

定理 1.26 (Cobham)

任意の $\mathcal{L}_A$ -論理式 φ について、 $R \vdash \varphi$ ならば $R_0 \vdash \varphi^\dagger$ 。

R に対する表現可能性定理とこの定理を合わせれば、 R_0 に対する表現可能性定理が得られる。

定理 1.27 (R_0 に対する表現可能性定理)

- ① $\mathbb{N}$ 上の任意の計算可能な部分関数は R_0 において表現可能。
- ② 任意の再帰的集合は R_0 において表現可能。

注意

R_0 に対する表現可能性定理においては、与えられた計算可能な部分関数もしくは再帰的集合（のインデックス）から、それらを表現する論理式を実効的に得ることができる。