理論の不完全性，決定不能性，分離不能性
第 2 回ロジック・ウィンタースクール
2023/12/26(火)〜12/29(金)

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

最終更新：2023 年 12 月 29 日

概要

Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理は「十分な算術 T を含む無矛盾な RE 理論は不完全」という主張であるが，このような条件を満たす理論 T は本質的不完全であるといわれる．理論の本質的不完全性は決定不能性や分離不能性の概念と密接に関わっており，こうした話題に関する研究が 1950 年代から 1960 年代にかけて盛んに行われていた．本講義では Tarski, Mostowski and Robinson [47] による弱い算術の理論 $\mathbf{R}$ および Cobham による $\mathbf{R}$ の部分理論 $\mathbf{R}_0$ の本質的不完全性を始めとする，理論の不完全性・決定不能性・分離不能性に関する古典的な諸結果について紹介する．また，これらを再検討しようとする最近の試みについても紹介する．

本稿の各節の内容は次のとおりである．

第 1 節 理論 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$ を導入し，それらの基本的な性質を分析する．また，これらの理論に対する Σ_1-完全性定理及び表現可能性定理を証明する．

第 2 節 第 1 不完全性定理に関連する諸概念（本質的不完全性，本質的決定不能性，再帰的分離性，およびそれらの実効版）を導入し，それらの関係について分析を行う．特に Ehrenfeucht の定理および Pour-El の定理が本節の重要項目である．更に，理論 $\mathbf{R}_0$ がこれらの性質を持つこと，すなわち第 1 不完全性定理のいくつかのバリエーションを随時確認していく．

第 3 節 本質的決定不能性な有限理論が有する性質である本質的遺伝的決定不能性に関連する諸概念（強再帰的分離不能性およびこれらの実効版）について分析を行う．まずは Pour-El の定理の遺伝版である Kurahashi and Visser の定理を紹介する．更に，理論 $\mathbf{R}_0$ がこれらの性質を有することを主張する Cobham の定理および Vaught の定理について紹介する．

第 4 節 第 2 節において導入した諸概念に関連するものとして，Lindenbaum 代数の同型性に関する話題と，解釈可能性に関する話題について紹介する．

本稿では第 1 不完全性定理の，特に本質的不完全性や本質的決定不能性に関連する話題のみを扱う．不完全性定理周辺の話題はこの他にも第 2 不完全性定理をはじめとして豊富にある．本稿を通じて不完全性定理に興味を持った方は，ぜひその他の話題についても触れてみてほしい．不完全性定理周辺のサーベイとしては例えば [54] などを参照されたい．また，不完全性定理周辺の教科書としては Boolos [1]，Lindström [26] を挙げておく．

目次

1　Σ_1-完全性と表現可能性

節 1.1 ではまず Tarski, Mostowski and Robinson [47] による理論 $\mathbf{R}$ および Cobham による理論 $\mathbf{R}_0$ を導入し，それらの基本的な性質を確認する．続いて節 1.2 において $\mathbf{R}_0$ に対する Σ_1-完全性定理の証明を行う．節 1.3 では Σ_1-完全性定理を用いて $\mathbf{R}$ に対する表現可能性定理を証明する．最後に節 1.4 において $\mathbf{R}_0$ が $\mathbf{R}$ を実質的に含むことを示し，$\mathbf{R}_0$ に対しても表現可能性定理が成立することを確認する．理論 $\mathbf{R}$ を基盤にして不完全性定理の議論を行う教科書には田中 [53] があり，$\mathbf{R}$ に関しては例えば本稿の節 1.2 と 1.3 の内容が含まれている．

1.1　理論 R と R_0 の基本性質

$\mathcal{L}_A = \{0, \mathsf{s}, +, \times, \leq\}$ とし，これを**算術の言語**という．ここで 0 は定数記号，s は 1 変数関数記号，$+, \times$ は 2 変数関数記号，$\leq$ は 2 変数関係記号である．本稿では第 4 節を除いて基本的には言語 $\mathcal{L}_A$ の理論や論理式のみを扱うこととする．したがって，単に理論や論理式と書けば，それは $\mathcal{L}_A$-理論や $\mathcal{L}_A$-論理式を表すこととしておく．

s は後者関数を意図する関数記号であり，例えば $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$ は 2 を意図する $\mathcal{L}_A$-項である．この観点から，各自然数 n に対する**数項** $\overline{n}$ を以下で再帰的に定める．

定義 1.1 (数項)**.**
- $\overline{0}$ は 0.
- $\overline{n+1}$ は $\mathsf{s}(\overline{n})$.

理論 $\mathbf{R}$ および $\mathbf{R}_0$ は数項を用いて次のように導入される．

定義 1.2 (理論 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$)**.** 次の公理図式 R1〜R5 からなる $\mathcal{L}_A$-理論を $\mathbf{R}$ という：

R1　$\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$　$(m, n \in \mathbb{N})$

R2　$\overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n}$　$(m, n \in \mathbb{N})$

R3　$\overline{m} \neq \overline{n}$　($m \neq n$ となる $m, n \in \mathbb{N}$)

R4　$\forall x \left(x \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}\right)$　$(n \in \mathbb{N})$

R5　$\forall x \left(x \leq \overline{n} \lor \overline{n} \leq x\right)$　$(n \in \mathbb{N})$

$\mathbf{R}$ の公理図式 R5 を次の公理図式 R6 に置き換えることで得られる $\mathcal{L}_A$-理論を $\mathbf{R}_0$ という：

R6　$\overline{m} \leq \overline{n}$　($m \leq n$ となる $m, n \in \mathbb{N}$)

注意 1.3. 厳密にいえば定義 1.2 において導入した理論 $\mathbf{R}$ は Tarski, Mostowski and Robinson [47] によるオリジナルのものとは異なっている．というのも，まずオリジナルの算術の言語は関係記号 $\leq$ をもたず，$x \leq y$ を論理式 $\exists z\,(x + z = y)$ の略記として扱っていた．我々の $\mathbf{R}$ において $x \leq y$ と $\exists z\,(x + z = y)$ の同値性は証明できないため，我々の $\mathbf{R}$ はオリジナルのものよりも真に弱いのである．この同値性が $\mathbf{R}$ に対して要求したい性質に寄与しないことが Jones and Shepherdson [22] によって指摘されており，本稿ではその指摘に従った定義を採用した．

理論 T が理論 S の**拡大理論**であるとは，T が S の全ての定理を証明できることをいう．このとき，$T \vdash S$ とかく．

命題 1.4. $m, n \in \mathbb{N}$ について，$m \leq n$ ならば $\mathbf{R} \vdash \overline{m} \leq \overline{n}$.
すなわち $\mathbf{R} \vdash \mathbf{R}_0$ である．

証明． $m=n$ のとき：公理図式 R5 より $\mathbf{R} \vdash x \leq \overline{m} \vee \overline{m} \leq x$ なので，x に $\overline{m}$ を代入すれば $\mathbf{R} \vdash \overline{m} \leq \overline{m} \vee \overline{m} \leq \overline{m}$ だから $\mathbf{R} \vdash \overline{m} \leq \overline{m}$ を得る．

$m<n$ のとき：任意の $k \leq m$ について $n \neq k$ であるから，公理図式 R3 より

$$\mathbf{R} \vdash \bigwedge_{k \leq m} \overline{n} \neq \overline{k}$$

を得る．したがって公理図式 R4 より $\mathbf{R} \vdash \overline{n} \not\leq \overline{m}$ なので，公理図式 R5 から $\mathbf{R} \vdash \overline{m} \leq \overline{n}$ が得られる． □

したがって $\mathbf{R}_0$ において証明可能な論理式は $\mathbf{R}$ においても証明可能である．$\mathbf{R}_0$ や $\mathbf{R}$ において証明できるいくつかの文について確認をしておく．

命題 1.5. $m, n \in \mathbb{N}$ とする．

1. $\mathbf{R}_0 \vdash \forall x\big(\bigvee_{k \leq n} x=\overline{k} \to x \leq \overline{n}\big)$.

2. $m \not\leq n$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \overline{m} \not\leq \overline{n}$.

3. $\mathbf{R}_0 \vdash \forall x \forall y(x \leq y \wedge y \leq \overline{n} \to x \leq \overline{n})$.

4. $m \leq n$ ならば $\mathbf{R} \vdash \forall x(\overline{n} \leq x \to \overline{m} \leq x)$.

証明． 1. $n \in \mathbb{N}$ を任意にとれば，各 $k \leq n$ について公理図式 R6 より $\mathbf{R} \vdash \overline{k} \leq \overline{n}$ なので

$$\mathbf{R}_0 \vdash \forall x(x=\overline{k} \to x \leq \overline{n})$$

である．つまり

$$\mathbf{R}_0 \vdash \forall x\big(\bigvee_{k \leq n} x=\overline{k} \to x \leq \overline{n}\big)$$

がいえた．

2. $m \not\leq n$ とすれば，各 $k \leq n$ について $m \neq k$ である．公理図式 R3 を用いて

$$\mathbf{R}_0 \vdash \bigwedge_{k \leq n} \overline{m} \neq \overline{k}$$

が得られ，公理図式 R4 より $\mathbf{R}_0 \vdash \overline{m} \not\leq \overline{n}$ を得る．

3. 公理図式 R4 より

$$\mathbf{R}_0 \vdash y \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} y=\overline{k}$$

なので

$$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq y \wedge y \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x \leq \overline{k}$$

となる．ここで各 $k \leq n$ について，式 $x \leq \overline{k}$ に対して公理図式 R4 を適用して，それらをまとめれば

$$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq y \wedge y \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x=\overline{k}$$

が得られるため，項目 1 より $\mathbf{R}_0 \vdash x \leq y \wedge y \leq \overline{n} \to x \leq \overline{n}$ となる．

4. $m \leq n$ とする．$m=n$ の場合は明らかなので，$m<n$ とする．公理図式 R5 より

$$\mathbf{R} \vdash \overline{n} \leq x \wedge \overline{m} \not\leq x \to \overline{n} \leq x \wedge x \leq \overline{m}$$

なので，項目 3 より $\mathbf{R} \vdash \overline{n} \leq x \wedge \overline{m} \not\leq x \to \overline{n} \leq \overline{m}$ を得る．いま $n \not\leq m$ なので項目 2 より $\mathbf{R}_0 \vdash \overline{n} \not\leq \overline{m}$ だから，$\mathbf{R} \vdash \overline{n} \leq x \to \overline{m} \leq x$ が成り立つ． □

注意 1.6. 命題 1.5.(4) だけは $\mathbf{R}_0$ ではなく $\mathbf{R}$ における証明可能性を主張している．実際，$\mathbf{R}_0 \nvdash \forall x\,(\overline{1} \leq x \to 0 \leq x)$ となることが反例モデルを作ることで示せる．

$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$ は無限個の公理を持つが，実はこれらを有限個の公理だけを用いて公理化することはできない．すなわち $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$ は有限公理化不可能な理論であるが，そのことを示すために次の命題を示す．

命題 1.7.

1. $\mathbf{R}_0$ は有限モデルを持たない．

2. 有限理論 T が $\mathbf{R} \vdash T$ を満たすなら，T は有限モデルを持つ．

証明． 1. $M \models \mathbf{R}_0$ とする．公理図式 R3 より各自然数 i, j について $M \models \overline{i} \neq \overline{j}$ である．したがって $\{\overline{i}^M \mid i \in \mathbb{N}\}$ は M の領域の無限部分集合である．

2. T を有限理論で $\mathbf{R} \vdash T$ とする．$\mathbf{R}$ の公理図式 R3 を，自然数 k について k 以下の異なる i と j に関する有限個の文 $\overline{i} \neq \overline{j}$ だけに制限することによって得られる理論を $\mathbf{R} \upharpoonright k$ と書くことにすると，T は有限なので，ある k について $\mathbf{R} \upharpoonright k \vdash T$ となることが分かる．したがって，理論 $\mathbf{R} \upharpoonright k$ が有限モデルを持つことを示せば十分である．

有限の領域 $\{0, 1, \ldots, k\}$ 上に $\mathcal{L}_A$-構造 M を，$i, j \leq k$ について

- $0^M = 0$
- $\mathsf{s}^M(i) = \min\{i+1, k\}$
- $i +^M j = \min\{i+j, k\}$
- $i \times^M j = \min\{i \times j, k\}$
- $i \leq^M j \iff i \leq j$

と定める．つまり M は $\mathbb{N}$ を k 以下に切り落とすことで得られる $\mathcal{L}_A$-構造である．このとき，各自然数 m, n について

- $\overline{n}^M = \min\{n, k\}$
- $\overline{m}^M +^M \overline{n}^M = \min\{m+n, k\}$
- $\overline{m}^M \times^M \overline{n}^M = \min\{m \times n, k\}$

となることが簡単に確認できる．それでは，$M \models \mathbf{R} \upharpoonright k$ であることを次で示す．$m, n \in \mathbb{N}$ とする．

R1: $\overline{m}^M +^M \overline{n}^M = \min\{m+n, k\} = \overline{m+n}^M$.

R2: $\overline{m}^M \times^M \overline{n}^M = \min\{m \times n, k\} = \overline{m \times n}^M$.

R3: k 以下の異なる i, j について，$\overline{i}^M = i$ と $\overline{j}^M = j$ なので $\overline{i}^M \neq \overline{j}^M$ である．

R4: $i \leq^M \overline{n}^M$ とすれば $i \leq^M \min\{n, k\}$ つまり $i \leq \min\{n, k\}$ で，特に $i \leq n$ かつ $i = \overline{i}^M$ である．よって $i \in \{\overline{0}^M, \ldots, \overline{n}^M\}$ がいえた．

R5: 任意の $i \in M$ について，$i \leq \min\{n, k\}$ または $\min\{n, k\} \leq i$ なので，$i \leq^M \min\{n, k\}$ または $\min\{n, k\} \leq^M i$，すなわち $i \leq^M \overline{n}^M$ または $\overline{n}^M \leq^M i$. □

命題 1.7.(1) より，$\mathbf{R}_0$ を含むどんな理論も有限モデルを持たないことが分かる．

定理 1.8. $\mathbf{R}$ および $\mathbf{R}_0$ は有限公理化不可能である．

証明． $\mathbf{R}$ もしくは $\mathbf{R}_0$ を公理化する有限理論 T があったとすると，特に $\mathbf{R} \vdash T \vdash \mathbf{R}_0$ である．命題 1.7.(2) より T は有限モデル M を持つが，M は $\mathbf{R}_0$ のモデルでもあるので命題 1.7.(1) に反する． □

$\mathbf{R}_0$ や $\mathbf{R}$ は非常に弱い理論であり，実際に $\mathbf{R}$ は $\mathbb{N}$ において成立する基本的な文をほとんど証明することができない．というのも，$\mathbf{R}$ の各公理は数項に関する事実しかほとんど述べておらず，つまり数全体の記述としては公理図式 R4 と R5 しか設けられていないからである．次で示

すように，$\mathbb{N}$ に何らかの集合 X を付加したような形をしているような $\mathcal{L}_A$-構造は $\mathbf{R}_0$ のモデルとなり，更にそのような X が $\mathbb{N}$ 全体の上部に位置するような形をした $\mathcal{L}_A$-構造は $\mathbf{R}$ のモデルとなる．

定義 1.9 ($\mathbf{R}_0$-構造と $\mathbf{R}$-構造)**.** $\mathcal{L}_A$-構造 M が **$\mathbf{R}_0$-構造**であるとは，次が成り立つことをいう：

1. 標準モデル $\mathbb{N}$ は M の部分構造である．
   すなわち，$0^M = 0$ であり，s^M, $+^M$, $\times^M$, $\leq^M$ の $\mathbb{N}$ への制限はそれぞれ $\mathbb{N}$ の後者関数 s, 加法 $+$, 乗法 $\times$, 順序 $\leq$ である．
2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $a \in M$ について，もし $a \leq^M n$ ならば $a \in \mathbb{N}$ である．

$\mathbf{R}_0$-構造 M が次の条件を満たすとき，**$\mathbf{R}$-構造**であるという．

- すべての $n \in \mathbb{N}$ と $a \in M \setminus \mathbb{N}$ について $n \leq^M a$ である．

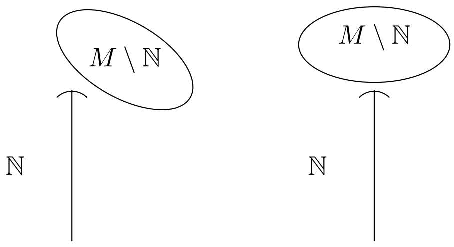

図 1　$\mathbf{R}_0$-構造と $\mathbf{R}$-構造

定理 1.10. *M を $\mathcal{L}_A$-構造とする．*

1. $M \models \mathbf{R}_0 \iff M$ はある $\mathbf{R}_0$-構造と同型である．
2. $M \models \mathbf{R} \iff M$ はある $\mathbf{R}$-構造と同型である．

証明. 1. ($\Leftarrow$): 任意の $\mathbf{R}_0$-構造 M が $\mathbf{R}_0$ のモデルであることを示す．s^M は s の拡張なので，各数項 $\overline{n}$ は M において $n \in \mathbb{N}$ として解釈される．関数 $+^M$ と $\times^M$ と $\leq^M$ はそれぞれ $+$ と $\times$ と $\leq$ の拡張なので，公理図式 R1, R2, R3, R6 は M においても成り立つ．各 $n \in \mathbb{N}$ について，$a \leq^M n$ となる $a \in M$ をとれば，$\mathbf{R}_0$-構造の定義の項目 2 より $a \in \mathbb{N}$ である．関係 $\leq^M$ は $\mathbb{N}$ 上では $\leq$ と一致するので，$a \leq n$ であり，$a \in \{0, 1, \ldots, n\}$ である．すなわち公理図式 R4 も M において成り立つ．以上より $M \models \mathbf{R}_0$ である．

($\Rightarrow$): $M \models \mathbf{R}_0$ として，M がある $\mathbf{R}_0$-構造と同型であることを示す．$f : \mathbb{N} \to M$ を，$n \mapsto \overline{n}^M$ と定める．M における数項の解釈全体の集合 $\mathbb{N}_M := \{\overline{n}^M \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{N}$ と同型な M の部分 $\mathcal{L}_A$-構造を成し，f がその同型写像であることを示す．まず $m \neq n$ とすると，公理図式 R3 より $\overline{m}^M \neq \overline{n}^M$，つまり $f(m) \neq f(n)$ であるから，f は単射である．f は明らかに全射なので，f は全単射である．続いて，f が準同型写像であることを確認する．

- $f(\mathsf{s}(n)) = f(n+1) = \overline{n+1}^M = (\mathsf{s}(\overline{n}))^M = \mathsf{s}^M(\overline{n}^M) = \mathsf{s}^M(f(n))$,
- 公理図式 R1 より，$f(m+n) = \overline{m+n}^M = \overline{m}^M +^M \overline{n}^M = f(m) +^M f(n)$,
- 公理図式 R2 より，$f(m \times n) = \overline{m \times n}^M = \overline{m}^M \times^M \overline{n}^M = f(m) \times^M f(n)$,
- $m \leq n$ ならば公理図式 R6 より $\overline{m}^M \leq^M \overline{n}^M$ つまり $f(m) \leq^M f(n)$ である．また $m \not\leq n$ ならば命題 1.5.2 より $\mathbf{R}_0 \vdash \overline{m} \not\leq \overline{n}$ なので，$\overline{m}^M \not\leq^M \overline{n}^M$，したがって $f(m) \not\leq^M f(n)$ である．以上より $m \leq n$ と $f(m) \leq^M f(n)$ は同値である．

以上で f が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}_M$ への同型写像であることが分かった．したがって，M は $\mathbb{N}$ と同型な部分構造を持つ．

最後に $\mathbf{R}_0$-構造の定義の項目 2 が成立することを示す．$\overline{n}^M \in \mathbb{N}_M$ と $a \in M$ で，$a \leq^M \overline{n}^M$ となるものを任意にとる．公理図式 R4 より，ある $k \leq n$ について $a = \overline{k}^M$ であるため，$a \in \mathbb{N}_M$ となる．

2. ($\Leftarrow$): M を $\mathbf{R}$-構造とすると，M は $\mathbf{R}_0$-構造なので既に公理図式 R1, R2, R3, R4 が M で成り立つことが示せている．よって公理図式 R5 が成り立つことを示せば $M \models \mathbf{R}$ がいえる．各 $n \in \mathbb{N}$ と $a \in M$ について，$a \in \mathbb{N}$ ならば $a \leq^M n$ または $n \leq^M a$ である．また，$a \in M \setminus \mathbb{N}$ ならば $\mathbf{R}$-構造の定義より $n \leq^M a$ である．

($\Rightarrow$): $M \models \mathbf{R}$ とすれば $M \models \mathbf{R}_0$ であり，上述のように $f : \mathbb{N} \to M$ と $\mathbb{N}_M$ を定めれば f は $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_M$ の間の同型写像である．$\overline{n}^M \in \mathbb{N}_M$ と $a \in M \setminus \mathbb{N}_M$ を任意にとれば，$a \not\leq^M \overline{n}^M$ となることも示せており，公理図式 R5 より $\overline{n}^M \leq^M a$ となる．したがって M は $\mathbf{R}$-構造と同型である． □

系 1.11. $\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}_0$ の真の拡大理論である．

証明． $\mathbf{R}_0$-構造 $M = \langle \mathbb{N} \cup \{a\}; 0, \mathsf{s}^M, +^M, \times^M, \leq^M \rangle$ を適当に $0 \not\leq^M a$ となるように定めてやれば，これは $\mathbf{R}$-構造ではない．定理 1.10 より $M \models \mathbf{R}_0$ だが $M \not\models \mathbf{R}$ である．よって $\mathbf{R}_0 \nvdash \mathbf{R}$ である． □

例えば $\mathbf{R}$-構造 M を $\mathsf{s}^M(a) = 0$ となる $a \in M$ を持つものとして定めれば $M \models \exists x(\mathsf{s}(x) = \overline{0})$ なので $\mathbf{R} \nvdash \forall x(\mathsf{s}(x) \neq \overline{0})$ が分かる．その他，$\mathbf{R}$ が $\forall x\,(x + 0 = x)$ や $\forall x\,(\mathsf{s}(x) = x + \overline{1})$ や $\forall x \forall y\,(x \leq y \to \exists z\,(z + x = y))$ など，限定量化記号ではない $\forall$ を含むような，標準モデル $\mathbb{N}$ で正しい文に関する証明能力がほぼないことが容易に確かめられる．理論 $\mathbf{R}_0$ や $\mathbf{R}$ は各数項に関する無限個の公理を持っていたが，適切に量化記号を使用することによって $\mathbf{R}$ より真に強い，有限個の公理からなる理論を定めることができる．そのうちの一つが Robinson 算術 $\mathbf{Q}$ であり，$\mathbf{Q}$ はまた Peano 算術 $\mathbf{PA}$ を定める基盤となる理論でもある．

定義 1.12 (理論 $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{PA}$)**.** 次の公理 Q1〜Q8 からなる $\mathcal{L}_A$-理論を **Robinson 算術 $\mathbf{Q}$** という：

Q1 $\forall x\,(\mathsf{s}(x) \neq 0)$
Q2 $\forall x \forall y\,(\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y)$
Q3 $\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y(x = \mathsf{s}(y)))$
Q4 $\forall x\,(x + 0 = x)$
Q5 $\forall x \forall y\,(x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y))$
Q6 $\forall x\,(x \times 0 = 0)$
Q7 $\forall x \forall y\,(x \times \mathsf{s}(y) = x \times y + x)$
Q8 $\forall x \forall y\,\big(x \leq y \leftrightarrow \exists z(z + x = y)\big)$

$\mathbf{Q}$ に次の帰納法公理図式 Ind を加えることで得られる $\mathcal{L}_A$-理論を **Peano 算術 $\mathbf{PA}$** という：
Ind $\forall \vec{y}\,\big(\varphi(0, \vec{y}) \land \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(\mathsf{s}(x), \vec{y})) \to \forall x\,\varphi(x, \vec{y})\big)$

今回は $\mathbf{Q}$ についてはほとんど議論しないため，次の定理の証明は省略する (Hájek and Pudlák [18] 等を参照)．

定理 1.13. $\mathbf{Q} \vdash \mathbf{R}$ である．

1.2 Σ_1-完全性定理

$\mathbf{R}_0$ や $\mathbf{R}$ は非常に弱い理論であるが，一方で $\mathbb{N}$ において正しい Σ_1 文をすべて証明することができる．すなわちこれらの理論は Σ_1-完全である．

定義 1.14 (Δ_0 論理式と Σ_1 論理式)**.**

1. $\mathcal{L}_A$-論理式 φ と変数 x を含まない $\mathcal{L}_A$-項 t について，$\exists x \leq t\, \varphi$ および $\forall x \leq t\, \varphi$ をそれぞれ $\exists x\,(x \leq t \land \varphi)$ および $\forall x\,(x \leq t \to \varphi)$ の略記とし，含まれる量化記号が全てこれらの形をしている $\mathcal{L}_A$-論理式を Δ_0 **論理式**という．
2. Δ_0 論理式 φ について $\exists v_0 \cdots \exists v_{k-1} \varphi$ という形の論理式を Σ_1 **論理式**という．特に $k = 0$ の場合，つまり量化記号のブロックが空の場合も許す．したがって Δ_0 論理式はまた Σ_1 論理式でもある．

定義 1.15 (Σ_1-完全性)**.** 理論 T が Σ_1**-完全**（Σ_1**-complete**）であるとは，任意の Σ_1 文 σ について，$\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $T \vdash \sigma$ となることをいう．

次の定理から $\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性が分かるが，それだけではなく $\mathbf{R}_0$ は Σ_1-完全な理論の中で最小であることも分かり，その意味で $\mathbf{R}_0$ は特別な理論である（特に $\mathbf{R}_0$ の最小性は Švejdar [46] による）．

定理 1.16 (Σ_1-完全性定理)**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-理論 T について，T が Σ_1-完全 $\iff T \vdash \mathbf{R}_0$.

証明． ($\Rightarrow$): $\mathbf{R}_0$ の公理は全て $\mathbb{N}$ において正しい Δ_0 文であることに注意．したがって T が Σ_1-完全であれば，T は $\mathbf{R}_0$ の全ての公理を証明できる．つまり $T \vdash \mathbf{R}_0$ である．

($\Leftarrow$): $\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性を示せば十分である．まずは M を任意の $\mathbf{R}_0$-構造として，M の性質を分析することから始める．

(A): M は $\mathbb{N}$ を部分構造に持つため，原子 $\mathcal{L}_A$-文 φ について

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff M \models \varphi$$

となることが分かる．また任意の閉 $\mathcal{L}_A$-項 t について，$t^M = n = t^{\mathbb{N}}$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれる．

(B): 任意の Δ_0 文 φ について，

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff M \models \varphi$$

が成り立つことを φ の構成に関する帰納法で示す．原子文 φ については (A) で既に成立する．Δ_0 文 ψ_0, ψ_1，および Δ_0 論理式 $\delta(x)$ の任意のインスタンスについて成り立つと仮定する．

- φ が $\psi_0 \land \psi_1$ のとき:

$$\mathbb{N} \models \psi_0 \land \psi_1 \iff \mathbb{N} \models \psi_0 \,\&\, \mathbb{N} \models \psi_1 \overset{\text{I.H.}}{\iff} M \models \psi_0 \,\&\, M \models \psi_1 \iff M \models \psi_0 \land \psi_1$$

  で成り立つ．
- φ が $\psi_0 \lor \psi_1$ や $\psi_0 \to \psi_1$ や $\neg\psi_0$ の場合も同様に示せる．
- φ が $\exists x \leq t\, \delta(x)$ のとき：$t^M = n = t^{\mathbb{N}}$ となる $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathbb{N} \models \exists x \leq \overline{n}\, \delta(x) \iff M \models \exists x \leq \overline{n}\, \delta(x)$$

  を示せば十分である．
  ($\Rightarrow$): $\mathbb{N} \models \exists x \leq \overline{n}\, \delta(x)$ とすると，ある $k \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{N} \models \overline{k} \leq \overline{n} \land \delta(\overline{k})$ である．(A) と帰納法の仮定より $M \models \overline{k} \leq \overline{n} \land \delta(\overline{k})$ となり，$M \models \exists x \leq \overline{n}\, \delta(x)$ が成り立つ．
  ($\Leftarrow$): 対偶を示す．$\mathbb{N} \models \neg\exists x \leq \overline{n}\, \delta(x)$ とすると任意の $k \leq n$ について $\mathbb{N} \models \neg\delta(\overline{k})$ である．よって帰納法の仮定より

$$M \models \bigwedge_{k \leq n} \neg\delta(\overline{k}).$$

したがって

$$M \models \forall x\big(\bigvee_{k\leq n} x=\overline{k} \to \neg\delta(x)\big)$$

となる．ここで公理図式 R4 を用いれば $M \models \forall x \leq \overline{n}\, \neg\delta(x)$ が成り立つ．よって $M \models \neg\exists x \leq \overline{n}\, \delta(x)$ である．

- φ が $\forall x \leq t\, \delta(x)$ の場合も同様である．

では，$\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性の証明に戻る．$\mathbb{N} \models \sigma$ を満たす Σ_1 文 σ を任意にとる．σ は Δ_0 論理式 $\delta(\vec{x})$ について $\exists\vec{x}\, \delta(\vec{x})$ という形であり，$\mathbb{N} \models \exists\vec{x}\, \delta(\vec{x})$ なので，自然数の組 $\vec{k}$ があって $\mathbb{N} \models \delta(\vec{\overline{k}})$ となる．M を $\mathbf{R}_0$ の任意のモデルとすれば，定理 1.10 より M は $\mathbf{R}_0$-構造だとしてよい．(B) より $M \models \delta(\vec{\overline{k}})$ なので，$M \models \sigma$ となる．完全性定理より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma$ が得られた． □

1.3 関数と集合の表現可能性

Σ_1-完全性定理の応用として，$\mathbf{R}_0$ に対する関数と集合の表現可能性定理を示す．

定義 1.17 (関数の表現可能性)**.** T を $\mathcal{L}_A$-理論，$\varphi(x_1,\ldots,x_k,y)$ を $x_1,\ldots,x_k,y$ 以外に自由変数をもたない論理式，f を $\mathbb{N}$ 上の k 変数部分関数とする．

1. φ が f を T において**表現する（represent）**とは，任意の $n_1,\ldots,n_k,m \in \mathbb{N}$ について，

$$f(n_1,\ldots,n_k)=m \text{ ならば } T \vdash \forall y(\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},y) \leftrightarrow y=\overline{m})$$

   が成り立つことをいう．

2. f が T において**表現可能（representable）**であるとは，f を T において表現する論理式が存在することをいう．

事実 1.18. f を $\mathbb{N}$ 上の計算可能な k 変数部分関数とすると，Σ_1 論理式 $\sigma(x_1,\ldots,x_k,y)$ が存在して，任意の $n_1,\ldots,n_k,m \in \mathbb{N}$ について

$$f(n_1,\ldots,n_k)=m \iff \mathbb{N} \models \sigma(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},\overline{m})$$

が成り立つ．更に，f がインデックス i を持つとすると，φ は i から実効的に計算できる（つまり $i \mapsto \varphi$ は計算可能）．

証明. まずは任意の原始再帰的関数 f について，条件を満たす Σ_1 論理式 σ がとれることを f の構成に関する帰納法で示す（その際には $\mathbb{N}$ における有限列のコード化を用いる）．ここで “インデックス v を持つ計算可能な k 変数部分関数に $x_1,\ldots,x_k$ を入力したときの出力は y で，z はその計算列のコード” を意味する関係 $R(v,x_1,\ldots,x_k,y,z)$ が原始再帰的であることが分かる（Kleene の標準形定理（例えば Odifreddi [32, Theorem II.1.2] を参照）を用いる）．R の特徴関数 $\chi_R(v,x_1,\ldots,x_k,y,z)$ は原始再帰的なので，条件を満たす Σ_1 論理式 $\sigma_0(v,x_1,\ldots,x_k,y,z,w)$ がとれる．したがって，f がインデックス i を持つ計算可能関数ならば，任意の $n_1,\ldots,n_k,m \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned} f(n_1,\ldots,n_k)=m &\iff \exists l \in \mathbb{N}\, R(i,n_1,\ldots,n_k,m,l) \\ &\iff \exists l \in \mathbb{N}\, \chi_R(i,n_1,\ldots,n_k,m,l)=1 \\ &\iff \mathbb{N} \models \exists z\, \sigma_0(\overline{i},\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},\overline{m},z,\overline{1}) \end{aligned}$$

なので，Σ_1 論理式 $\exists z\, \sigma_0(\overline{i},x_1,\ldots,x_k,y,z,\overline{1})$ が条件を満たす．また，$\exists z\, \sigma_0(\overline{i},x_1,\ldots,x_k,y,z,\overline{1})$ は i から実効的に計算することができる． □

注意 1.19. $\mathbb{N}$ において $\exists\vec{z}\,\varphi(\vec{x},y,\vec{z})$ と $\exists w\,\exists\vec{z}\le w\,\varphi(\vec{x},y,\vec{z})$ が同値であることを考えると，事実 1.18 における Σ_1 論理式 $\sigma(\vec{x},y)$ は Δ_0 論理式 $\delta(\vec{x},y,z)$ について $\exists z\,\delta(\vec{x},y,z)$ という形であるとしてよい．

定理 1.20 (R に対する表現可能性定理（関数）). $\mathbb{N}$ 上の任意の計算可能な部分関数は $\mathbf{R}$ において Σ_1 論理式で表現可能である．

証明. 議論を単純にするために，$\mathbb{N}$ 上の計算可能な 1 変数部分関数 f に対してのみ証明する．このとき事実 1.18 とその後の注意より，Δ_0 論理式 $\delta(x,y,z)$ があって，任意の $n,m\in\mathbb{N}$ について

$$f(n)=m \iff \mathbb{N}\models\exists z\,\delta(\overline{n},\overline{m},z)$$

となる．ここで Σ_1 論理式 $\sigma(x,y)$ を

$$\exists w\,\big(y\le w\wedge\exists z\le w\,\delta(x,y,z)\wedge\forall y'\le w\,\forall z\le w(\delta(x,y',z)\to y'=y)\big)$$

と定め，$\sigma(x,y)$ が $\mathbf{R}$ において f を表現することを示す．いま $f(n)=m$ として

$$\mathbf{R}\vdash\forall y\,(\sigma(\overline{n},y)\leftrightarrow y=\overline{m})$$

を示せばよい．

($\leftarrow$): $f(n)=m$ より，$\mathbb{N}\models\delta(\overline{n},\overline{m},\overline{k})$ を満たす $k\in\mathbb{N}$ がとれる．Σ_1-完全性定理より $\mathbf{R}\vdash\delta(\overline{n},\overline{m},\overline{k})$ である．また，$m'\ne m$ とすれば $f(n)\ne m'$ なので，$\mathbb{N}\models\forall z\,\neg\delta(\overline{n},\overline{m'},z)$ である．ここで $r=\max\{m,k\}$ すると

$$\mathbb{N}\models\forall y'\le\overline{r}\,\forall z\le\overline{r}\,(\delta(\overline{n},y',z)\to y'=\overline{m})$$

であり，これは Δ_0 文なので Σ_1-完全性定理より

$$\mathbf{R}\vdash\forall y'\le\overline{r}\,\forall z\le\overline{r}\,(\delta(\overline{n},y',z)\to y'=\overline{m}) \tag{1}$$

を得る．公理図式 R6 より $\mathbf{R}\vdash\overline{m}\le\overline{r}\wedge\overline{k}\le\overline{r}$ なので，(1) と合わせれば

$$\mathbf{R}\vdash\overline{m}\le\overline{r}\wedge\overline{k}\le\overline{r}\wedge\delta(\overline{n},\overline{m},\overline{k})\wedge\forall y'\le\overline{r}\,\forall z\le\overline{r}\,(\delta(\overline{n},y',z)\to y'=\overline{m})$$

がいえる．すなわち $\mathbf{R}\vdash\sigma(\overline{n},\overline{m})$ であり，つまり

$$\mathbf{R}\vdash\forall y(y=\overline{m}\to\sigma(\overline{n},y))$$

が示せた．

($\rightarrow$): 命題 1.5.(3) より

$$\mathbf{R}\vdash w\le\overline{r}\wedge y\le w\to y\le\overline{r}\quad\text{および}\quad\mathbf{R}\vdash w\le\overline{r}\wedge z\le w\to z\le\overline{r}$$

である．これらを合わせると

$$\mathbf{R}\vdash w\le\overline{r}\wedge y\le w\wedge z\le w\wedge\delta(\overline{n},y,z)\to y\le\overline{r}\wedge z\le\overline{r}\wedge\delta(\overline{n},y,z)$$

を得る．これと (1) を合わせて，

$$\mathbf{R}\vdash w\le\overline{r}\wedge y\le w\wedge\exists z\le w\,\delta(\overline{n},y,z)\to y=\overline{m} \tag{2}$$

を得る．また，$m \leq r$ かつ $m \leq k$ なので，命題 1.5.(4) より $\mathbf{R} \vdash \overline{r} \leq w \to \overline{m} \leq w \wedge \overline{k} \leq w$ である．これと $\mathbf{R} \vdash \delta(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ を合わせれば

$$\mathbf{R} \vdash \overline{r} \leq w \wedge \forall y' \leq w \forall z \leq w(\delta(\overline{n}, y', z) \to y' = y) \to y = \overline{m} \tag{3}$$

が得られる．公理図式 R5 より $\mathbf{R} \vdash w \leq \overline{r} \vee \overline{r} \leq w$ なので，(2) と (3) を合わせれば

$$\mathbf{R} \vdash y \leq w \wedge \exists z \leq w\, \delta(\overline{n}, y, z) \wedge \forall y' \leq w \forall z \leq w(\delta(\overline{n}, y', z) \to y' = y) \to y = \overline{m}$$

すなわち

$$\mathbf{R} \vdash \forall y(\sigma(\overline{n}, y) \to y = \overline{m})$$

が得られた． □

Σ_1-完全性は $\mathbf{R}_0$ に対して成立したが，他方，表現可能性定理の証明においては命題 1.5.4 の使用があり，また公理図式 R5 も明示的に用いられている．したがって $\mathbf{R}_0$ に対してはそのままの議論では証明が通らない．この点については節 1.4 において議論を行う．

計算可能な全域関数について，次の系を得る．

系 1.21. $\mathbb{N}$ 上の任意の計算可能な k 変数全域関数 f に対して，ある Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ が存在して次が成り立つ：任意の $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$ について，

1. $f(n_1, \dots, n_k) = m$ ならば $\mathbf{R} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$,

2. $f(n_1, \dots, n_k) \neq m$ ならば $\mathbf{R} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$,

3. $\mathbf{R} \vdash \forall y \forall z(\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, z) \to y = z)$.

証明． 表現可能性定理より，f を $\mathbf{R}$ において表現する Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ がとれる．この φ が条件を満たすことを示す．

1. $f(n_1, \dots, n_k) = m$ とすると，$\mathbf{R} \vdash y = \overline{m} \to \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y)$ なので y に $\overline{m}$ を代入して $\mathbf{R} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m})$ となる．

2. $f(n_1, \dots, n_k) \neq m$ とする．f は全域関数なので $f(n_1, \dots, n_k) = r$ となる $r \neq m$ がある．公理図式 R3 より $\mathbf{R} \vdash \overline{m} \neq \overline{r}$ である．

$$\mathbf{R} \vdash \forall y(y \neq \overline{r} \to \neg\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y))$$

なので，y に $\overline{m}$ を代入すれば $\mathbf{R} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m})$ が得られる．

3. f は全域関数なので $f(n_1, \dots, n_k) = m$ となる $m \in \mathbb{N}$ がとれ，

$$\mathbf{R} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, z) \to y = \overline{m} \wedge z = \overline{m}$$

なので成立する． □

続いて，集合の表現可能性を示す．

定義 1.22 (集合の表現可能性)**．** T を $\mathcal{L}_A$-理論，$\varphi(x_1, \dots, x_k)$ を $x_1, \dots, x_k$ 以外の自由変数をもたない論理式，$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする．

1. φ が X を T において**表現する（represent）**とは，任意の $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ について，
   - $(n_1, \dots, n_k) \in X$ ならば $T \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$,
   - $(n_1, \dots, n_k) \notin X$ ならば $T \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$,

   が成り立つことをいう．
2. X が T において**表現可能（representable）**であるとは，X を T において表現する論理式が存在することをいう．

定理 1.23 (**R** に対する表現可能性定理（集合）)**.** 任意の再帰的集合は **R** において Σ_1 論理式で表現可能である.

証明. $X \subseteq \mathbb{N}^k$ を再帰的集合とすると，X の特性関数 $f(x_1, \ldots, x_k)$，すなわち

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1, \ldots, n_k) \in X \\ 0 & (n_1, \ldots, n_k) \notin X \end{cases}$$

を満たす関数 f は計算可能な全域関数である．関数 f に対して，系 1.21 の条件を満たす Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ がとれる．ここで Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k, \overline{1})$ が **R** において X を表現することを示す.

- $(n_1, \ldots, n_k) \in X$ とすれば，$f(n_1, \ldots, n_k) = 1$ であり，$\mathbf{R} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{1})$ である.
- $(n_1, \ldots, n_k) \notin X$ とすれば，$f(n_1, \ldots, n_k) = 0$ であり，$f(n_1, \ldots, n_k) \neq 1$ なので $\mathbf{R} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{1})$ が成り立つ. □

1.4 $\mathbf{R}_0$ における R の解釈

上述のように，表現可能性定理の証明には公理図式 R5 が用いられており，$\mathbf{R}_0$ に対してはそのままでは適用することができない．しかし，実は Δ_0 論理式 $x \leq^\dagger y$ が存在して，公理図式 R4 と R5 の $\leq$ を $\leq^\dagger$ に置き換えたものが $\mathbf{R}_0$ において証明できる．したがって $\leq$ の代わりに $\leq^\dagger$ を使用することで，表現可能性定理の証明を $\mathbf{R}_0$ に対して適用することができる．以下ではこのことを詳しく紹介する.

定義 1.24.

- Δ_0 論理式 $\mathrm{good}(y)$ を $\overline{0} \leq y \land \forall z \leq y\,(z = y \lor \mathsf{s}(z) \leq y)$ と定める.
- Δ_0 論理式 $x \leq^\dagger y$ を $\mathrm{good}(y) \to x \leq y$ と定める.
- $\mathcal{L}_A$-論理式 φ の中に現れる $t_0 \leq t_1$ という部分論理式を全て $t_0 \leq^\dagger t_1$ で置き換えることで得られる論理式を $\varphi^\dagger$ とかく.

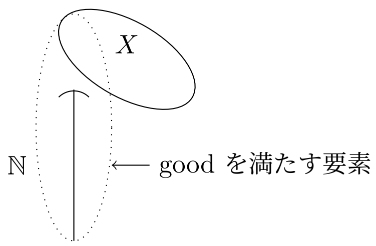

図 2　$\mathbf{R}_0$-構造 における good のイメージ

補題 1.25. $n \in \mathbb{N}$ とする.

1. $\mathbf{R}_0 \vdash \forall x\big(x \leq^\dagger \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}\big)$.
2. $\mathbf{R}_0 \vdash \forall x(x \leq^\dagger \overline{n} \lor \overline{n} \leq^\dagger x)$.

証明. 1. $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{N} \models \mathrm{good}(\overline{n})$ なので，Σ_1-完全性定理より $\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(\overline{n})$ である．したがって，

$$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq^\dagger \overline{n} \leftrightarrow x \leq \overline{n}$$

となる．これと公理図式 R4 を合わせれば，$\mathbf{R}_0 \vdash \forall x\bigl(x \leq^\dagger \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}\bigr)$ が得られる．

2. まずは全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land x \nleq \overline{n} \to \overline{n} \leq x$$

であることを n に関する帰納法で示す．$n = 0$ については $\mathrm{good}(x)$ の定め方より $\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \to \overline{0} \leq x$ なので成り立つ．続いて $\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land x \nleq \overline{n} \to \overline{n} \leq x$ と仮定する．命題 1.5.(3) より

$$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq \overline{n} \land \overline{n} \leq \overline{n+1} \to x \leq \overline{n+1}$$

なので，公理図式 R6 と合わせて $\mathbf{R}_0 \vdash x \leq \overline{n} \to x \leq \overline{n+1}$ となる．この対偶を帰納法の仮定と合わせて

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land x \nleq \overline{n+1} \to \overline{n} \leq x$$

である．再び公理図式 R6 より $\mathbf{R}_0 \vdash x = \overline{n} \to x \leq \overline{n+1}$ なので，

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land x \nleq \overline{n+1} \to \overline{n} \leq x \land \overline{n} \neq x$$

となる．ここで $\mathrm{good}(x)$ の定め方より

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land \overline{n} \leq x \land \overline{n} \neq x \to \overline{n+1} \leq x$$

なので

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \land x \nleq \overline{n+1} \to \overline{n+1} \leq x$$

が得られる．以上より $n+1$ についても成立する．

従って，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \to (x \leq \overline{n} \lor \overline{n} \leq x)$$

が示せた．$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq \overline{n} \leftrightarrow x \leq^\dagger \overline{n}$ だったので

$$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{good}(x) \to (x \leq^\dagger \overline{n} \lor \overline{n} \leq^\dagger x)$$

となる．他方，$\leq^\dagger$ の定め方より $\mathbf{R}_0 \vdash \neg\mathrm{good}(x) \to \forall y(y \leq^\dagger x)$ なので，特に

$$\mathbf{R}_0 \vdash \neg\mathrm{good}(x) \to \overline{n} \leq^\dagger x$$

となる．したがって，排中律より

$$\mathbf{R}_0 \vdash x \leq^\dagger \overline{n} \lor \overline{n} \leq^\dagger x$$

が得られた． □

補題より次の定理が直ちに従う．

定理 1.26 (Cobham (Jones and Shepherdson [22] を参照))**.** 任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ について，$\mathbf{R} \vdash \varphi$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \varphi^\dagger$ である．

$\mathbf{R}$ に対する表現可能性定理（定理 1.20 と 1.23）と定理 1.26 を合わせれば，$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理が得られる．

定理 1.27 ($\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理)**.**

1. $\mathbb{N}$ 上の任意の計算可能な部分関数は $\mathbf{R}_0$ において表現可能である．
2. 任意の再帰的集合は $\mathbf{R}_0$ において表現可能である．

注意 1.28. 事実 1.18 では，計算可能部分関数 f のインデックス i から，条件を満たす Σ_1 論理式が実効的に得られることを述べた．この事実と本節における証明から，$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理においては，計算可能な部分関数や再帰的集合のインデックスから，それらを表現する論理式を実効的に得ることもできる．この事実は次の節で用いることとなる．

2　第 1 不完全性定理

十分な算術を含む ω-無矛盾かつ再帰的な理論の不完全性は Gödel [16] によって証明された．更に Rosser [39] によって ω-無矛盾性の仮定が単に無矛盾性に弱められることが示された．また，Craig のトリック [10] によって理論が再帰的であるという仮定は RE であるという条件に弱められることも分かる．したがって，こんにちでは Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理として「**PA** の無矛盾 RE 拡大理論は不完全である」という主張が述べられている．第 1 不完全性定理は理論の決定不能性と密接な関わりを持つ．実際，Rosser [39] は第 1 不完全性定理から，**PA** の無矛盾な拡大理論が決定不能であることを導いている．本節の目的は次の 2 つである．

1. 完全性や決定不能性に関する諸性質を導入し，それらの間の関係を明らかにすること．
2. $\mathbf{R}_0$ が実際にこうした性質を持つことを示すこと，すなわち第 1 不完全性定理のいろいろなバリエーションを証明すること．

まず節 2.1 では本質的不完全性と本質的決定不能性の概念を導入し，これらの同値性と $\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性を証明する．節 2.2 において再帰的分離不能性と一様本質的不完全性の概念を導入し，これらの同値性を主張する Ehrenfeucht の定理の証明および $\mathbf{R}_0$ が再帰的分離不能性を持つことの証明を行う．節 2.3 では節 2.1 と 2.2 において導入した諸概念の実効版である，実効的本質的不完全性，実効的本質的創造性，実効的分離不能性の概念を導入し，これらの同値性を主張する Pour-El の定理を証明する．更に，$\mathbf{R}_0$ の実効的本質的不完全性を証明する．

2.1　本質的不完全性と本質的決定不能性

以降では $\mathcal{L}_A$-論理式の Gödel 数化を固定したうえで議論を行う．文の集合 T が RE（再帰的）であるとは，T の要素の Gödel 数全体の集合が RE（再帰的）であることをいう．以降，単純化のために論理式とその Gödel 数を同一視して扱う場合がある．

定義 2.1. 理論 T について，T の定理である文全体の集合を T_{p}，T において反証可能な文全体の集合を T_{r} と表す．

ここで p と r はそれぞれ provable（証明可能）と refutable（反証可能）を表す．T_{p} は $\mathrm{Th}(T)$ と書かれることも多いが，本稿では記述の簡潔さの観点から T_{p} を採用する．

- T が無矛盾 $\iff$ $T_{\mathsf{p}} \cap T_{\mathsf{r}} = \emptyset$
- T が完全 $\iff$ $T_{\mathsf{p}} \cup T_{\mathsf{r}}$ は文全体の集合

となる．T が RE であれば，T_{p} と T_{r} はともに RE となるが，他方，T が再帰的であったとしても T_{p} が再帰的とは限らない．

定義 2.2. T を理論とする．

1. T が**決定可能（decidable）**であるとは，T_{p} が再帰的集合であることをいう．
2. T が決定可能でないとき，T は**決定不能（undecidable）**であるという．

T が決定可能であるとは，すなわち，与えられた文が T の定理かどうかを実効的に判定できるということである[*1]．本節では理論の不完全性と決定不能性の関係を分析を行うが，これらの概念は基本的には同値ではない．

- 不完全だが決定可能な理論（Boole 代数の理論，Abel 群の理論など）
- 完全だが決定不能な理論（True Arithmetic $\mathbf{TA} = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi \ \&\ \varphi$ は文 $\}$ など）

が存在する．他方，RE 理論については決定不能性が不完全性を導くことが簡単に示せるが，その前に次のよく知られた事実を確認しておく．

事実 2.3 (Odifreddi [32, Theorem II.1.19] を参照)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}^k$ が再帰的であることと，A とその補集合 $\overline{A}$ が共に RE であることは同値である．

命題 2.4. 無矛盾な *RE* 理論 T が決定不能ならば T は不完全．

証明. 対偶を示す．RE 理論 T が完全であると仮定する．T は RE なので T_{p} と T_{r} も RE である．φ を任意の文とすると T の無矛盾性と完全性より，$\varphi \notin T_{\mathsf{p}} \iff \varphi \in T_{\mathsf{r}}$ である．よって RE 集合 T_{p} は補集合も RE なので，事実 2.3 より再帰的集合であり，T は決定可能である． □

第 1 不完全性定理は理論の不完全性に関係する定理であるが，ただ単に一つの理論の不完全性を主張するだけではなく，ある理論の拡大理論たちの不完全性をも主張する定理である．この観点から，次の定義を行う．

定義 2.5. T を理論とする．

1. T の任意の無矛盾な RE 拡大理論が不完全であるとき，T は**本質的不完全（essentially incomplete）**であるという．
2. T の任意の無矛盾な拡大理論が決定不能であるとき，T は**本質的決定不能（essentially undecidable）**であるという．

これらの概念は実際にそれぞれ不完全性と決定不能性よりも真に強いことが次の例から分かる．

例 2.6. 有限 $\mathcal{L}_A$-構造 M について $\mathrm{Th}(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi \ \&\ \varphi$ は文 $\}$ とすると，$\mathrm{Th}(M)$ は無矛盾かつ完全かつ決定可能である．よって言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は不完全で決定不能（定理 3.5）だが，本質的不完全でも本質的決定不能でもない．

定義 2.5 において導入した 2 つの性質は，実は同値である．

定理 2.7. T を理論とすると，以下は同値である：

1. T は本質的決定不能である．
2. T は本質的不完全である．

証明. $(1 \Rightarrow 2)$: T が本質的決定不能であるとし，T の任意の無矛盾な RE 拡大理論 U をとる．仮定より U は決定不能である．命題 2.4 より U は不完全である．

$(2 \Rightarrow 1)$: 対偶を示す．T が本質的決定不能でないとすると，T の無矛盾な拡大理論のなかに決定可能な理論 U がある．文全体を Gödel 数の小さい順に並べた列を $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ とし，U の拡大理論の列 $U_0, U_1, \ldots$ を次のように再帰的に定義する：

- $U_0 := U$,

[*1] $T \vdash \varphi$ もしくは $T \vdash \neg\varphi$ を満たす文 φ は T において決定可能であるということがある．文の決定可能性と定義 2.2 で定めた理論の決定可能性はいずれも第 1 不完全性定理と関係のある概念であるために，混同しないように注意が必要である．

- $U_{n+1} := \begin{cases} U_n + \{\varphi_n\} & U_n + \{\varphi_n\} \text{ が無矛盾のとき}, \\ U_n + \{\neg\varphi_n\} & \text{そうでないとき}. \end{cases}$

U は無矛盾なので，定義より各 U_n は無矛盾である．

ここで，与えられた n と文 ψ について $\psi \in (U_n)_\mathsf{p}$ かどうかを実効的に判定する手続きを次で再帰的に与える：

- U_0 つまり U は決定可能なので，$\psi \in (U_0)_\mathsf{p}$ の判定手続きを既に有している．
- $\psi \in (U_n)_\mathsf{p}$ の判定手続きがあると仮定する．ξ を，φ_n と $\neg\varphi_n$ のうち U_{n+1} に加えられた方とする．仮定より $U_n \vdash \neg\varphi_n$ かどうか，つまり $U_n + \{\varphi_n\}$ が無矛盾かどうかを判定できるので，ξ が φ_n と $\neg\varphi_n$ のどちらであるかも判定できる．$U_{n+1} \vdash \psi \iff U_n \vdash \xi \to \psi$ なので，$(\xi \to \psi) \in (U_n)_\mathsf{p}$ かどうかを判定することで $\psi \in (U_{n+1})_\mathsf{p}$ かどうかが判定できる．

$U^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ とすると U^* は無矛盾かつ完全な U の拡大理論である．また $U^* = U^*_\mathsf{p}$ である．いま，与えられた文 ψ について ψ が φ_n である $n \in \mathbb{N}$ をとれば，$\varphi_n \in U^*_\mathsf{p} \iff \varphi_n \in (U_{n+1})_\mathsf{p}$ である．すなわち $\psi \in U^*_\mathsf{p}$ かどうかを判定するには，$\varphi_n \in (T_{n+1})_\mathsf{p}$ かどうかを判定してやればよい．したがって U^*_p は再帰的集合である．

以上より U^* は無矛盾かつ完全な T の RE 拡大理論である．したがって T は本質的不完全ではない． □

理論 T が本質的決定不能であれば，その拡大理論ももちろん本質的決定不能である．したがって，できるだけ弱い理論に対する本質的決定不能性を示したい．さて，表現可能性定理を用いて $\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性を示そう．

定理 2.8 (Rosser [39]; Tarski, Mostowski and Robinson [47]; Cobham)**．** $\mathbf{R}_0$ は本質的決定不能である．

証明． $\mathbf{R}_0$ の無矛盾な拡大理論 T が決定可能であると仮定して矛盾を導く．

自由変数を x だけ含む $\mathcal{L}_A$-論理式全体を Gödel 数の小さい順に $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ と並べ，集合 D_T を

$$D_T := \{n \in \mathbb{N} \mid T \vdash \varphi_n(\overline{n})\}$$

と定める．

与えられた $n \in \mathbb{N}$ に対して文 $\varphi_n(\overline{n})$ を計算し，続いて $T \vdash \varphi_n(\overline{n})$ かどうかを T の決定可能性を用いて判定すれば，$n \in D_T$ かどうかが判定できる．すなわち D_T は再帰的集合である．

$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理より，D_T を $\mathbf{R}_0$ において表現する論理式 $\xi(x)$ がとれる．このとき $\neg\xi(x)$ はある $k \in \mathbb{N}$ について $\varphi_k(x)$ に等しい．

- $k \in D_T$ とすれば $\mathbf{R}_0 \vdash \xi(\overline{k})$ だから $T \vdash \xi(\overline{k})$ であり，T の無矛盾性より $T \nvdash \neg\xi(\overline{k})$ である．つまり $T \nvdash \varphi_k(\overline{k})$ なので $k \notin D_T$ となりおかしい．
- $k \notin D_T$ とすれば $\mathbf{R}_0 \vdash \neg\xi(\overline{k})$ なので $T \vdash \neg\xi(\overline{k})$ であり，$T \vdash \varphi_k(\overline{k})$ となる．したがって $k \in D_T$ となるために矛盾する．

いずれの場合も矛盾するので，T は決定可能でない． □

定理 2.8 の証明において，$\mathbf{R}_0$ に関する性質として用いたのは再帰的集合の表現可能性定理のみである．また再帰的集合の表現可能性は，計算可能な全域関数の表現可能性から導けた．したがって次の系を得る．

系 2.9.

1. 任意の再帰的集合が T において表現可能であれば，T は本質的決定不能である（Putnam [36]）．

2. 任意の計算可能な全域関数が T において表現可能であれば，T は本質的決定不能である（Tarski, Mostowski and Robinson [47]）．

定理 2.7 より第 1 不完全性定理が得られる．

定理 2.10 (第 1 不完全性定理 (Gödel [16]; Rosser [39]; Tarski, Mostowski and Robinson [47]; Cobham))**.** $\mathbf{R}_0$ は本質的不完全である．

注意 2.11. $\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性は「$\mathbf{R}_0$ の任意の無矛盾な拡大理論 T について T_{p} の補集合は RE ではない」という形に強めることができる（Smullyan [40]，Cobham [9] および Kikuchi and Kurahashi [23] を参照）．

2.2　一様本質的不完全性と再帰的分離不能性

理論の本質的不完全性と本質的決定不能性について，それぞれに対するより強い概念を導入する．理論の列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が RE であるとは，集合 $\{(i, \varphi) \mid \varphi \in T_i\}$ が RE であることをいう．

定義 2.12 (一様本質的不完全性と再帰的分離不能性)**.** T を理論とする．

1. T が**一様本質的不完全（uniformly essentially incomplete）**であるとは，T の無矛盾な拡大理論の RE 列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して，文 φ が存在して，全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して $T_i \nvdash \varphi$ かつ $T_i \nvdash \neg\varphi$ となることをいう．
2. T が**再帰的分離不能（recursively inseparable）**であるとは，$T_{\mathsf{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ となるような再帰的集合 X が存在しないことをいう．

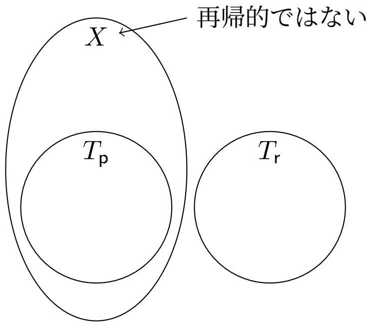

図 3　再帰的分離不能性

明らかに一様本質的不完全であれば本質的不完全である．同様に次も成立する．

命題 2.13. 理論 T が再帰的分離不能ならば本質的決定不能である．

証明. T を再帰的分離不能な理論とし，U を T の任意の無矛盾な拡大理論とする．このとき $T_{\mathsf{p}} \subseteq U_{\mathsf{p}}$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap U_{\mathsf{p}} = \emptyset$ となるので，再帰的分離不能性より U_{p} は再帰的ではない．したがって U は決定不能である．□

他方，本質的決定不能だが再帰的分離不能でないような RE 理論が存在することが知られている（Ehrenfeucht [12]）．定理 2.7 において本質的決定不能性と本質的不完全性の同値性を証明したが，実は定義 2.12 において導入した 2 つの概念も実は同値である．このことを確認するために，次の事実を用意しておく．

事実 2.14 (Reduction Theorem (Odifreddi [32, Proposition II.1.23] を参照))**.** A と B を RE 集合とすると，RE 集合 $A' \subseteq A$ と $B' \subseteq B$ が存在して，$A' \cup B' = A \cup B$ かつ $A' \cap B' = \emptyset$ が成り立つ．

次の定理が成立する．

定理 2.15 (Ehrenfeucht [12])**.** *無矛盾な RE 理論 T について，以下は同値である：*
1. T は再帰的分離不能である．
2. T は一様本質的不完全である．

証明． $(1 \Rightarrow 2)$: （図 4 に証明の状況を示している．）T を再帰的分離不能とする．$\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を T の無矛盾な拡大理論の RE 列とする．$A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(T_i)_{\mathsf{p}}$ および $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(T_i)_{\mathsf{r}}$ と定めるとこれらは RE 集合である．Reduction Theorem より，RE 集合 $A' \subseteq A$ と $B' \subseteq B$ で $A' \cup B' = A \cup B$ かつ $A' \cap B' = \emptyset$ となるものがとれる．$T_{\mathsf{p}} \subseteq A$ なので $T_{\mathsf{p}} \subseteq A' \cup B'$ であるが，$T_{\mathsf{p}} \cap B = \emptyset$ なので $T_{\mathsf{p}} \cap B' = \emptyset$ であり，$T_{\mathsf{p}} \subseteq A'$ がいえる．また $T_{\mathsf{r}} \cap A = \emptyset$ より $T_{\mathsf{r}} \cap A' = \emptyset$ である．T の再帰的分離不能性より A' は再帰的集合ではない．もし $A' \cup B'$ が全ての文を含むなら，任意の文 ψ について $\psi \notin A' \iff \psi \in B'$ となり，事実 2.3 より A' が再帰的となるためおかしい．以上より，ある文 $\varphi \notin A' \cup B' = A \cup B$ が存在する．これはすなわち全ての $i \in \mathbb{N}$ について $T_i \nvdash \varphi$ かつ $T_i \nvdash \neg\varphi$ となることに他ならない．

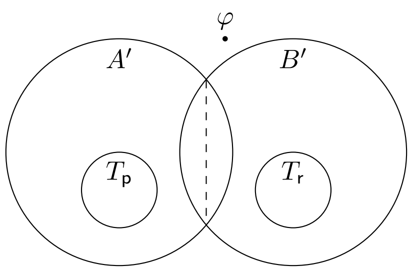

図 4　$(1 \Rightarrow 2)$ の状況

$(2 \Rightarrow 1)$: T を一様本質的不完全とする．いま $T_{\mathsf{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く．このとき

$$\{\varphi \mid \varphi \in X \ \&\ \varphi \text{ は文}\} \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \notin X \ \&\ \varphi \text{ は文}\}$$

は RE 集合なので，その要素の実効的な列挙 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ がとれる．各 $i \in \mathbb{N}$ について $T_i := T + \{\psi_i\}$ と定めると，$\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は T の拡大理論の RE 列である．各 T_i の無矛盾性を示す．

- $\psi_i \in X$ のとき，$T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ なので $\psi_i \notin T_{\mathsf{r}}$，すなわち $T \nvdash \neg\psi_i$ なので T_i は無矛盾．
- ある $\varphi \notin X$ について ψ_i が $\neg\varphi$ のとき，$T_{\mathsf{p}} \subseteq X$ より $\varphi \notin T_{\mathsf{p}}$ だから $T \nvdash \varphi$ である．したがって T_i は無矛盾．

T の一様本質的不完全性より，文 ξ が存在して，全ての $i \in \mathbb{N}$ について $T_i \nvdash \xi$ かつ $T_i \nvdash \neg\xi$ となる．

- もし $\xi \in X$ なら，ある $i \in \mathbb{N}$ について ψ_i が ξ と一致するので $T_i = T + \xi \vdash \xi$ となりおかしい．
- もし $\xi \notin X$ なら，ある $i \in \mathbb{N}$ について ψ_i が $\neg\xi$ と一致するので $T_i = T + \neg\xi \vdash \neg\xi$ となりおかしい．

いずれの場合も矛盾するので，条件を満たす X が存在しない，すなわち T が再帰的分離不能であることが示せた． $\square$

さて，定理 2.8 の拡張である次の定理を示そう．証明の方針は定理 2.8 の証明とほぼ同一である．

定理 2.16 (Grzegorczyk, Mostowski and Ryll-Nardzewski [17]; Smullyan [40])**.** $\mathbf{R}_0$ は再帰的分離不能である．

証明． $(\mathbf{R}_0)_{\mathsf{p}} \subseteq X$ かつ $(\mathbf{R}_0)_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く．

自由変数を x だけ含む論理式全体を Gödel 数の小さい順に $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ と並べ，集合 D_X を

$$D_X := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(\overline{n}) \in X\}$$

と定める．X が再帰的であることから D_X も再帰的である．

$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理より，D_X を $\mathbf{R}_0$ において表現する論理式 $\xi(x)$ がとれる．このとき $\neg\xi(x)$ はある $k \in \mathbb{N}$ について $\varphi_k(x)$ に等しい．

- $k \in D_X$ とすれば $\mathbf{R}_0 \vdash \xi(\overline{k})$ で，$\mathbf{R}_0 \vdash \neg\neg\xi(\overline{k})$ である．つまり $\neg\xi(\overline{k}) \in (\mathbf{R}_0)_{\mathsf{r}}$ である．$(\mathbf{R}_0)_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ なので $\neg\xi(\overline{k}) \notin X$ すなわち $\varphi_k(\overline{k}) \notin X$ である．このとき $k \notin D_X$ なのでおかしい．
- $k \notin D_X$ とすれば $\mathbf{R}_0 \vdash \neg\xi(\overline{k})$ なので $\neg\xi(\overline{k}) \in (\mathbf{R}_0)_{\mathsf{p}} \subseteq X$ であり，したがって $\varphi_k(\overline{k}) \in X$ となる．つまり $k \in D_X$ となるために矛盾する．

いずれの場合も矛盾するため，このような X は存在しない． $\square$

定理 2.16 の証明は定理 2.8 の証明と同様に再帰的集合の表現可能性定理のみから得られている．すなわち，次の系を得る．

系 2.17 (Smullyan [40])**.** 任意の再帰的集合が T において表現可能であれば，T は再帰的分離不能である．

定理 2.15 と 2.16 によって次の定理が得られる．

定理 2.18 (Mostowski [28])**.** $\mathbf{R}_0$ は一様本質的不完全である．

2.3 実効的本質的不完全性，実効的本質的創造性，実効的分離不能性

定理 2.10 から，$\mathbf{R}_0$ が本質的不完全であること，すなわち $\mathbf{R}_0$ の無矛盾な RE 拡大理論 T が不完全である，すなわち $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となる文 φ が存在することが分かる．しかしこれまでの議論ではそのような文 φ の存在が分かるだけで，具体的に φ を見つける手続きが与えられているわけではない．このような観点から，ここでは，これまでに扱ってきた各性質の実効化について議論する．ただし，各性質の実効化とは何かについては丁寧に議論する必要がある．

以降ではインデックス i をもつ RE 集合を W_i で表すことにする．本質的不完全性の実効化を定めるのは簡単で，T の無矛盾な RE 拡大理論 U のインデックスから $U \nvdash \varphi$ かつ $U \nvdash \neg\varphi$ となる文 φ が実効的に得られることを要求すればよい．すなわち次の定義が得られる．

定義 2.19 (実効的本質的不完全性)**.** 理論 T が**実効的本質的不完全（effectively essentially incomplete）**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x)$ が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，W_i が T の無矛盾な拡大理論ならば，$\Phi(i)$ が定義され，$\Phi(i)$ は文で，$\mathsf{W}_i \nvdash \Phi(i)$ かつ $\mathsf{W}_i \nvdash \neg\Phi(i)$ となることをいう．

続いて本質的決定不能性の実効化について考える．まずは集合が再帰的でないこと示す手続きの実効化について考える．RE 集合 X が再帰的でないとは，事実 2.3 よりその補集合が RE ではないということなので，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，$X \cap \mathsf{W}_i = \emptyset$ ならば W_i は X の補集合ではない，つまり $n \notin X \cup \mathsf{W}_i$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれるということである．したがって RE 集合 X が実効的に再帰的でないとは，ある計算可能部分関数 Φ が存在して，

$$\forall i \in \mathbb{N}\,(X \cap \mathsf{W}_i = \emptyset \Rightarrow \Phi(i)\downarrow\ \&\ \Phi(i) \notin X \cup \mathsf{W}_i)$$

となる，ということである．これはすなわち X が**創造的（creative）**（Post [33] もしくは Odifreddi [32, Definition III.6.5] を参照）であるということに他ならない．

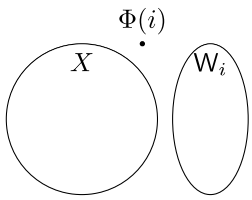

図 5　創造性

本質的決定不能性の実効化は次の実効的本質的創造性である．

定義 2.20 (実効的本質的創造性)**.** 理論 T が**実効的本質的創造的（effectively essentially creative）**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について，W_i が T の無矛盾な拡大理論で，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，$\Phi(i, j)$ が定義され，$\Phi(i, j)$ は文で，$\Phi(i, j) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$ となることをいう．

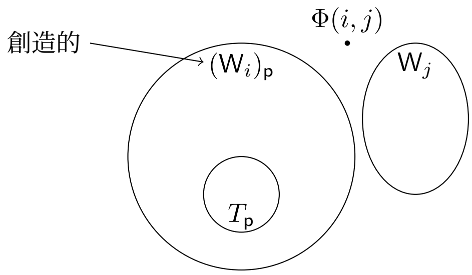

図 6　実効的本質的創造性

実効的本質的創造性の概念は Feferman [13, 脚注 11] において導入され，Smullyan [41] において議論されている．

再帰的分離不能性の実効化も同様の考え方で定式化できる．

定義 2.21 (実効的分離不能性)**.** 理論 T が**実効的分離不能（effectively inseparable）**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について，$T_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，$\Phi(i, j)$ が定義され，$\Phi(i, j)$ は文で，$\Phi(i, j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$ となることをいう．

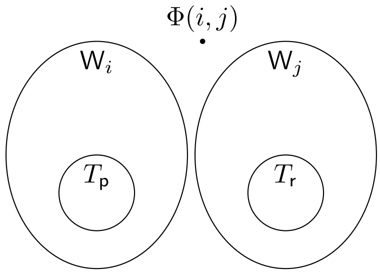

図 7　実効的分離不能性

理論の実効的分離不能性は Smullyan [41] によって分析が行われており，特に Smullyan [43] および Smullyan の書籍 [44] には実効的分離不能性と同値な条件に関する多くの結果が記載されている（最近の Cheng [3] も参照）．理論が実効的分離不能なら再帰的分離不能であるが一般に逆は成立しない（Visser [52, Example 5.7] を参照）．さて，実効化する前の性質については，定理 2.7 において本質的決定不能性と本質的不完全性が同値であることが示されており，この状況を鑑みると実効的本質的創造性と実効的本質的不完全性が同値であることが期待される．他方，再帰的分離不能性が本質的決定不能性よりも真に強い性質であったことから，実効的分離不能性もまた実効的本質的創造性よりも真に強い性質であると予想されるが，実はそうではない．面白いことに，実効化された 3 つの概念は同値となることが Pour-El によって示されているのである．ここでは Pour-El の定理の Kurahashi and Visser [25] による再帰定理を用いた簡潔な証明を紹介する．

事実 2.22 (パラメータありの再帰定理（の帰結）(Soare [45, Theorem 3.5] を参照))**.** 任意の計算可能な全域関数 $f(x,y,z)$ に対して，計算可能な全域関数 $g(x,y)$ が存在して，$\mathsf{W}_{g(x,y)} = \mathsf{W}_{f(x,y,g(x,y))}$ が成立する．

定理 2.23 (Pour-El [34])**.** 理論 T が無矛盾かつ RE なら，以下は同値である：

1. T は実効的分離不能である．

2. T は実効的本質的創造的である．

3. T は実効的本質的不完全である．

証明. $(1 \Rightarrow 2)$: （図 8 に証明の状況を示している．）T が実効的分離不能であるとして，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x,y)$ とする．$\mathsf{W}_{\Psi(x)} = (\mathsf{W}_x)_\mathsf{p}$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$ および $\mathsf{W}_{\Theta(x)} = \mathsf{W}_x \cup T_\mathsf{r}$ を満たす計算可能関数 $\Theta(x)$ を用意しておく[*2]．W_i を T の無矛盾な拡大理論とし，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ とする．いま $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap T_\mathsf{r} = \emptyset$ なので，$\mathsf{W}_{\Psi(i)} \cap \mathsf{W}_{\Theta(j)} = (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap (\mathsf{W}_j \cup T_\mathsf{r}) = \emptyset$ である．また $T_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi(i)}$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ なので，実効的分離不能性より $\Phi(\Psi(i),\Theta(j))$ は定義され，$\Phi(\Psi(i),\Theta(j))$ は文で，$\Phi(\Psi(i),\Theta(j)) \notin \mathsf{W}_{\Psi(i)} \cup \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ となる．特に $\Phi(\Psi(i),\Theta(j)) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$ であり，計算可能関数 $\Phi(\Psi(x),\Theta(y))$ によって T は実効的本質的創造的である．

$(2 \Rightarrow 3)$: T が実効的本質的創造的であるとして，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x,y)$ とする．$\mathsf{W}_{\Psi(x)} = (\mathsf{W}_x)_\mathsf{r}$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$ を用意しておく．W_i を T の無矛盾な拡大理論とすると，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{\Psi(i)} = (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap (\mathsf{W}_i)_\mathsf{r} = \emptyset$ なので，実効的本質的創造性より

[*2] これらは $f(x,y)\downarrow \iff y \in (\mathsf{W}_x)_\mathsf{p}$ となる計算可能関数 f と $g(x,y)\downarrow \iff y \in \mathsf{W}_x \cup T_\mathsf{r}$ となる計算可能関数 g それぞれに対して S^m_n-定理（Odifreddi [32, Proposition II.1.7] を参照）を適用することで得られる．

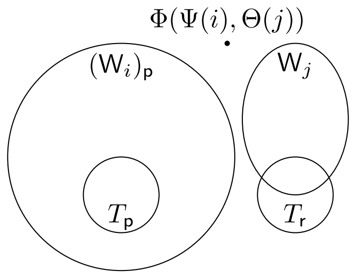

図 8　(1 ⇒ 2) の状況

$\Phi(i,\Psi(i))$ は定義され，$\Phi(i,\Psi(i))$ は文で，$\Phi(i,\Psi(i)) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_{\Psi(i)} = (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup (\mathsf{W}_i)_\mathsf{r}$ となる．すなわち $\mathsf{W}_i \nvdash \Phi(i,\Psi(i))$ かつ $\mathsf{W}_i \nvdash \neg\Phi(i,\Psi(i))$ となるため，計算可能関数 $\Phi(x,\Psi(x))$ によって T は実効的本質的不完全である．

(3 ⇒ 1): T が実効的本質的不完全であるとして，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x)$ とする．パラメータありの再帰定理を用いて

$$\mathsf{W}_{\Psi(x,y)} = T \cup \{\varphi \mid \Phi(\Psi(x,y))\downarrow = \varphi \ \&\ \varphi \in \mathsf{W}_x\} \cup \{\neg\varphi \mid \Phi(\Psi(x,y))\downarrow = \varphi \ \&\ \varphi \in \mathsf{W}_y\}$$

を満たす計算可能関数 $\Psi(x,y)$ を用意しておく[*3]．このとき

$$\mathsf{W}_{\Psi(x,y)} = \begin{cases} T + \{\Phi(\Psi(x,y))\} & \Phi(\Psi(x,y))\downarrow \text{ は文 } \&\ \Phi(\Psi(x,y)) \in \mathsf{W}_x \text{ のとき} \\ T + \{\neg\Phi(\Psi(x,y))\} & \Phi(\Psi(x,y))\downarrow \text{ は文 } \&\ \Phi(\Psi(x,y)) \in \mathsf{W}_y \text{ のとき} \\ T & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

が成り立つ．

$T_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ とする．

- もし $\Phi(\Psi(i,j))$ が定義され，$\Phi(\Psi(i,j))$ が文で，$\Phi(\Psi(i,j)) \in \mathsf{W}_i$ とすると，$\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} = T + \{\Phi(\Psi(i,j))\}$ となる．$\mathsf{W}_i \cap T_\mathsf{r} = \emptyset$ なので $\Phi(\Psi(i,j)) \notin T_\mathsf{r}$，つまり $T \nvdash \neg\Phi(\Psi(i,j))$ であり，$\mathsf{W}_{\Psi(i,j)}$ は T の無矛盾な拡大理論である．実効的本質的不完全性より $\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} \nvdash \Phi(\Psi(i,j))$ となるが，これは $\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} = T + \{\Phi(\Psi(i,j))\}$ に反する．
- もし $\Phi(\Psi(i,j))$ が定義され，$\Phi(\Psi(i,j))$ が文で，$\Phi(\Psi(i,j)) \in \mathsf{W}_j$ とすると，$\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} = T + \{\neg\Phi(\Psi(i,j))\}$ となる．$\mathsf{W}_j \cap T_\mathsf{p} = \emptyset$ なので $\Phi(\Psi(i,j)) \notin T_\mathsf{p}$，つまり $T \nvdash \Phi(\Psi(i,j))$ であり，$\mathsf{W}_{\Psi(i,j)}$ は T の無矛盾な拡大理論である．実効的本質的不完全性より $\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} \nvdash \neg\Phi(\Psi(i,j))$ となるが，これは $\mathsf{W}_{\Psi(i,j)} = T + \{\neg\Phi(\Psi(i,j))\}$ に反する．

以上より，$\mathsf{W}_{\Psi(x,y)} = T$ であることが示せた．したがって $\mathsf{W}_{\Psi(x,y)}$ は T の無矛盾な拡大理論であるから，Φ の取り方より $\Phi(\Psi(i,j))$ が定義され，$\Phi(\Psi(i,j))$ は文である．上で $\Phi(\Psi(i,j)) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$ が示せており，以上から計算可能関数 $\Phi(\Psi(x,y))$ によって T は実効的分離不能である． □

系として，Ehrenfeucht の定理（定理 2.15）の実効版が得られる．

[*3] これはまずは S^m_n-定理を用いて

$$\mathsf{W}_{\Theta(x,y,z)} = T \cup \{\varphi \mid \Phi(z)\downarrow = \varphi \ \&\ \varphi \in \mathsf{W}_x\} \cup \{\neg\varphi \mid \Phi(z)\downarrow = \varphi \ \&\ \varphi \in \mathsf{W}_y\}$$

をみたす計算可能な全域関数 $\Theta(x,y,z)$ を用意し，パラメータありの再帰定理より $\mathsf{W}_{\Psi(x,y)} = \mathsf{W}_{\Theta(x,y,\Psi(x,y))}$ を満たす $\Psi(x,y)$ をとればよい．

定義 2.24 (実効的一様本質的不完全性)**.** 理論 T が**実効的一様本質的不完全（effectively uniformly essentially incomplete）**であるとは，計算可能関数 $\Phi(x)$ が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，i が T の無矛盾な拡大理論の RE 列 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ のインデックスならば，$\Phi(i)$ が定義され，$\Phi(i)$ は文で，全ての $k \in \mathbb{N}$ について $T_k \nvdash \Phi(i)$ かつ $T_k \nvdash \neg\Phi(i)$ となることをいう．

系 2.25. 無矛盾な *RE* 理論 T について，以下は同値である：

1. T は実効的分離不能である．

2. T は実効的一様本質的不完全である．

証明. ($1 \Rightarrow 2$): 定理 2.15 ($1 \Rightarrow 2$) の証明の実効版を考えればよい（Reduction Theorem の実効版などを用いる）．

($2 \Rightarrow 1$): T が実効的一様本質的不完全なら，実効的本質的不完全なので Pour-El の定理（定理 2.23）より T は実効的分離不能である． □

続いて $\mathbf{R}_0$ が実際に実効的本質的不完全であることを証明する．これは通常の Gödel–Rosser の第 1 不完全性定理の証明を行えばよく，その最も重要な部分は次の不動点定理である．

定理 2.26 (不動点定理 (Gödel [16]; Carnap [2]))**.** 自由変数を x のみ含むような任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，次の同値性を満たす $\mathcal{L}_A$-文 ψ が実効的にとれる：

$$\mathbf{R}_0 \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

ここで $\ulcorner \psi \urcorner$ は ψ の *Gödel* 数の数項である．更に

$$\mathbb{N} \models \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

であり，この場合 φ が Σ_1 論理式なら，ψ は Σ_1 としてとれる．

証明. 自由変数を x だけ含む $\mathcal{L}_A$-論理式全体を実効的に $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots$ と並べ，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\psi_n(\overline{n})$ の Gödel 数を計算する計算可能関数 f をとる．$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理より，f を $\mathbf{R}_0$ において表現する論理式 $\sigma(x, y)$ がとれる．すなわち，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbf{R}_0 \vdash \forall y\,(\sigma(\overline{n}, y) \leftrightarrow y = \ulcorner \psi_n(\overline{n}) \urcorner)$ である．いま論理式 $\exists y\,(\varphi(y) \land \sigma(x, y))$ は自由変数を x だけ含むので，ある k について $\psi_k(x)$ である．このとき文 $\psi_k(\overline{k})$ が求める条件を満たすことが次のように確認できる：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 \vdash \psi_k(\overline{k}) &\leftrightarrow \exists y\,(\varphi(y) \land \sigma(\overline{k}, y)) \\ &\leftrightarrow \exists y\,(\varphi(y) \land y = \ulcorner \psi_k(\overline{k}) \urcorner) \\ &\leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi_k(\overline{k}) \urcorner). \end{aligned}$$

φ から $\psi_k(\overline{k})$ が実効的に得られることも分かる．

この同値性は $\mathbf{R}$ でも成立するが，このとき $\mathbf{R}$ に対する表現可能性定理より論理式 $\sigma(x, y)$ は Σ_1 としてよい．更に $\mathbb{N}$ は $\mathbf{R}$ のモデルなので，同値性は $\mathbb{N}$ において成立する．φ が Σ_1 論理式の場合には，$\exists y\,(\varphi(y) \land \sigma(x, y))$ と述語論理上で同値な Σ_1 論理式 $\xi(x)$ がとれ，$\xi(x)$ が $\psi_k(x)$ であるような k について考えれば，同様の議論で $\psi_k(\overline{k})$ が条件を満たす Σ_1 文であることが示せる． □

一般に RE 理論 T について，関係 “y は x の T における証明の Gödel 数” は再帰的とは限らない．他方，T が再帰的であればこの関係もまた再帰的となることが示せるため，その意味で再帰的な理論は扱いやすい．実は次で示す Craig のトリックにより，T_{p} を扱う際には RE 理論と再帰的理論には差異がないことが分かる．

定理 2.27 (Craig のトリック (Craig [10]))**.** 任意の RE 理論 T に対して，$T_{\mathsf{p}} = T'_{\mathsf{p}}$ である再帰的理論 T' が実効的にとれる．

証明. T は RE なので，ある再帰的集合 $X \in \mathbb{N}^2$ が実効的にとれて，任意の文 φ について，$\varphi \in T \iff \exists y\,((\ulcorner \varphi \urcorner, y) \in X)$ が成り立つ．理論 T' を $\{\varphi \wedge (\overline{n} = \overline{n}) \mid (\varphi, n) \in X\}$ と定める．$\varphi \wedge (\overline{n} = \overline{n})$ の Gödel 数から φ の Gödel 数および n を計算する計算可能関数がとれるので，T' が再帰的であることが示せる．$T \vdash T'$ は明らか．他方，各 $\varphi \in T$ について $(\varphi, n) \in X$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれるので，$\varphi \wedge (\overline{n} = \overline{n}) \in T'$ だから $T' \vdash \varphi$ となる．したがって $T' \vdash T$ である．以上より $T_{\mathsf{p}} = T'_{\mathsf{p}}$ であり，また T から T' を実効的に得ることもできる． □

定理 2.28 (Gödel [16]; Rosser [39]; Tarski, Mostowski and Robinson [47]; Cobham)**.**
$\mathbf{R}_0$ は実効的本質的不完全である．

証明. W_i を $\mathbf{R}_0$ の無矛盾な拡大理論とする．Craig のトリックによって得られる，$(\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} = U_{\mathsf{p}}$ を満たす再帰的理論を U とする．このとき関係 “y は x の U における証明の Gödel 数” は再帰的なので，$\mathbf{R}_0$ に対する表現可能性定理より，この関係を $\mathbf{R}_0$ において表現する論理式 $\mathrm{Prf}_U(x, y)$ が実効的にとれる．いま不動点定理より文 ψ で次の同値性を満たすものが実効的にとれる：

$$\mathbf{R}_0 \vdash \psi \leftrightarrow \forall y \left(\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \to \exists z \leq^{\dagger} y\, \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)\right).$$

$U \nvdash \psi$ かつ $U \nvdash \neg\psi$ であることを以下で示す．

- $U \vdash \psi$ とすると，その証明の Gödel 数 p をとれば $\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, \overline{p})$ である．U は無矛盾なので $U \nvdash \neg\psi$ だから，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbf{R}_0 \vdash \neg\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, \overline{n})$ である．特に定理 1.26 より $\mathbf{R}_0 \vdash \forall z (z \leq^{\dagger} \overline{p} \to \bigvee_{k \leq p} z = \overline{k})$ なので $\mathbf{R}_0 \vdash \forall z \leq^{\dagger} \overline{p}\, \neg\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)$ である．したがって $\mathbf{R}_0 \vdash \exists y \left(\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq^{\dagger} y\, \neg\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)\right)$ であり，$\mathbf{R}_0 \vdash \neg\psi$ が得られる．よって $U \vdash \neg\psi$ となり，U の無矛盾性に反する．
- $U \vdash \neg\psi$ とすると，先ほどと同様にその証明の Gödel 数 q について

  $$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, \overline{q}) \wedge \forall y \leq^{\dagger} \overline{q}\, \neg\mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y)$$

  となる．ここで $\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \to y \not\leq^{\dagger} \overline{q}$ であるが，定理 1.26 より

  $$\mathbf{R}_0 \vdash y \leq^{\dagger} \overline{q} \vee \overline{q} \leq^{\dagger} y$$

  なので，

  $$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \to \overline{q} \leq^{\dagger} y$$

  が得られる．一方，$\mathbf{R}_0 \vdash \overline{q} \leq^{\dagger} y \to \exists z \leq^{\dagger} y\, \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)$ なので，

  $$\mathbf{R}_0 \vdash \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \psi \urcorner, y) \to \exists z \leq^{\dagger} y\, \mathrm{Prf}_U(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)$$

  が得られる．すなわち $\mathbf{R}_0 \vdash \psi$ なので $U \vdash \psi$ となり，U の無矛盾性に反する．

i から ψ を計算する計算可能関数によって，$\mathbf{R}_0$ は実効的本質的不完全である． □

定理 2.23 と 2.28 より，次の定理が直ちに従う．

定理 2.29 (Smullyan [41])**.** $\mathbf{R}_0$ は実効的本質的創造的かつ実効的分離不能である．

3 本質的遺伝的決定不能性

節 3.1 では本質的遺伝的決定不能性と強再帰的分離不能性の概念を導入し，これらの有限理論とこれらの性質の関わりについて紹介する．節 3.2 ではこれらの性質の実効版である，実効的本質的遺伝的創造性，強実効的分離不能性を導入し，これら 2 つの実効化された性質が同値であるという Kurahashi and Visser の定理を紹介する．節 3.3 では $\mathbf{R}_0$ の本質遺伝的決定不能性を主張する Cobham の定理と，$\mathbf{R}_0$ の強実効的分離不能性を主張する Vaught の定理の状況に関する解説を行う．Cobham と Vaugth の定理の証明を節 3.4 において行う．

3.1 本質的遺伝的決定不能性と強再帰的分離不能性

有限理論の本質的決定不能性は，実は無矛盾な拡大理論の決定不能性だけではなく，その部分理論の決定不能性までもを導くことが知られている．まずはこの観点から，本質的決定不能性より強い次の性質を導入する．

定義 3.1 (本質的遺伝的決定不能性)**.** 理論 T が**本質的遺伝的決定不能（essentially hereditarily undecidable）**であるとは，$T + U$ が無矛盾である任意の理論 U が決定不能であることをいう．

本質的遺伝的決定不能は Visser [52] によって詳細に分析が行われている．この性質は，次の命題が示すように，理論が本質的に遺伝的決定不能であることと同値であることから本質的遺伝的決定不能性と名付けられている．

命題 3.2. 理論 T について，以下は同値である：

1. T は本質的遺伝的決定不能である．
2. T の任意の無矛盾な拡大理論 S と，S の任意の部分理論 U について，U は決定不能である．

証明. $(1 \Rightarrow 2)$: T が本質的遺伝的決定不能であるとする．T の任意の無矛盾な拡大理論 S と，S の任意の部分理論 U をとれば，$T + U$ は S は部分理論なので無矛盾だから，U は決定不能である．

$(2 \Rightarrow 1)$: T が条件 2 を満たすとする．$T + U$ が無矛盾である理論 U をとれば，U は T の無矛盾な拡大理論 $T + U$ の部分理論なので決定不能である． □

命題 3.3 (Tarski, Mostwoski and Robinson [47])**.** 有限かつ本質的決定不能な理論 T は本質的遺伝的決定不能である．

証明. T を有限かつ本質的決定不能な理論とし，$T + U$ が無矛盾であるような理論 U をとる．T は本質的決定不能なので $T + U$ は決定不能である．演繹定理により，任意の論理式 φ について，$T + U \vdash \varphi$ と $U \vdash \bigwedge T \to \varphi$ は同値である．したがって $T + U$ の決定不能性から U の決定不能性が従う． □

本質的決定不能である有限理論の存在は Mostowski and Tarski [29] において初めて与えられた．第 1 節 において導入した理論 $\mathbf{Q}$ は Robinson [38] によって導入された本質的決定不能な有限理論である．実際，定理 1.13 より $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の拡大理論であり，$\mathbf{R}$ は本質的決定不能（定理 2.8）なので，$\mathbf{Q}$ も本質的決定不能である．よって命題 3.3 より次の系を得る．

系 3.4 (Tarski, Mostowski and Robinson [47])**.** $\mathbf{Q}$ は本質的遺伝的決定不能である．

特に言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は $\mathbf{Q}$ と無矛盾なので，次がいえる．

定理 3.5 (Church [7]; Turing [49])**.** 言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は決定不能である．

他方，定理 1.8 より $\mathbf{R}$ および $\mathbf{R}_0$ は有限公理化可能ではないため，これらの理論が本質的遺伝的決定不能であるかどうかは非自明である．実際，本質的決定不能であるが本質的遺伝的決定不能ではない理論の存在が知られている（Ehrenfeucht [11]; Putnam [36]）．$\mathbf{R}$ および $\mathbf{R}_0$ に対する問題については節 3.3 と 3.4 において詳しく分析を行う．

続いて，本質的遺伝的決定不能性を導くような分離性を導入する．

定義 3.6 (強再帰的分離不能性)**.** 理論 T が**強再帰的分離不能（strongly recursively inseparable）**であるとは，$0_{\mathsf{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在しないことをいう．ここで 0_{p} は言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理で証明可能な文全体の集合である．

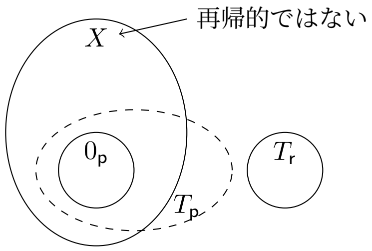

図 9　強再帰的分離不能性

強再帰的分離不能なら再帰的分離不能であり，また次も成立する．

命題 3.7. T を理論とする．

1. T が有限かつ再帰的分離不能なら，T は強再帰的分離不能である．

2. T が強再帰的分離不能なら T は本質的遺伝的決定不能である．

証明. 1. T が有限かつ再帰的分離不能であるとする．いま $0_{\mathsf{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在すると仮定して矛盾を導く．文 φ について，演繹定理より

- $\varphi \in T_{\mathsf{p}} \iff T \vdash \varphi \iff \vdash \bigwedge T \to \varphi \iff \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in 0_{\mathsf{p}}$,
- $\varphi \in T_{\mathsf{r}} \iff T \vdash \neg\varphi \iff T \vdash \bigwedge T \land \neg\varphi \iff \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in T_{\mathsf{r}}$

である．ここで

$$Y := \left\{\varphi \mid \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in X \ \&\ \varphi \text{ は文 }\right\}$$

と定める．X は再帰的なので Y も再帰的である．いま $0_{\mathsf{p}} \subseteq X$ なので

$$\varphi \in T_{\mathsf{p}} \Rightarrow \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in 0_{\mathsf{p}} \Rightarrow \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in X \Rightarrow \varphi \in Y$$

となり $T_{\mathsf{p}} \subseteq Y$ であることが分かる．また

$$\varphi \in T_{\mathsf{r}} \cap Y \iff \left(\bigwedge T \to \varphi\right) \in T_{\mathsf{r}} \cap X$$

であり，$T_{\mathsf{r}} \cap X = \emptyset$ なので $T_{\mathsf{r}} \cap Y = \emptyset$ も得られる．これは T の再帰的分離不能性に反する．

2. T を強再帰的分離不能とする．理論 U を $T + U$ が無矛盾であるものとすると，$0_{\mathsf{p}} \subseteq U_{\mathsf{p}}$ かつ $T_{\mathsf{r}} \cap U_{\mathsf{p}} = \emptyset$ なので U_{p} は再帰的でない．つまり U は決定不能である．□

他方，

- 再帰的分離不能であるが本質的遺伝的決定不能でない RE 理論
- 本質的遺伝的決定不能であるが再帰的分離不能でない RE 理論

の存在が知られている（Visser [52, Example 5.7]）．実効化されていない諸性質の関係に関する状況を整理すると次の図のようになる．

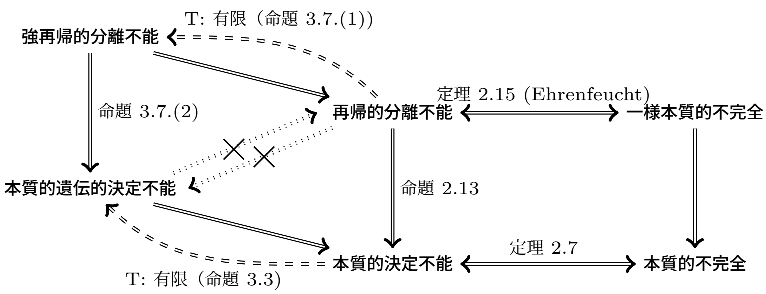

図 10　実効化されていない諸性質の関係

3.2　実効的本質的遺伝的創造性と強実効的分離不能性

前節と同様に，本質的遺伝的決定不能性と強再帰的分離不能性の概念の実効化も考えよう．まずは本質的遺伝的決定不能性の実効化は次の実効的本質的遺伝的創造性である．

定義 3.8 (実効的本質的遺伝的創造性)**.** 理論 T が**実効的本質的遺伝的創造的（effectively essentially hereditarily creative）**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x,y)$ が存在して，任意の $i,j \in \mathbb{N}$ について，W_i は $T+\mathsf{W}_i$ が無矛盾である理論で，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，$\Phi(i,j)$ は定義され，$\Phi(i,j)$ は文で，$\Phi(i,j) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$ となることをいう．

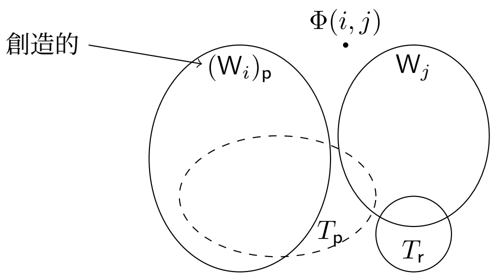

図 11　実効的本質的遺伝的創造性

強再帰的分離不能性の実効化は次の通り．

定義 3.9 (強実効的分離不能性)**.** 理論 T が**強実効的分離不能（effectively strongly inseparable）**であるとは，ある計算可能部分関数 $\Phi(x,y)$ が存在して，任意の $i,j \in \mathbb{N}$ について，$0_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，$\Phi(i,j)$ は定義され，$\Phi(i,j)$ は文で，$\Phi(i,j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$ となることをいう．

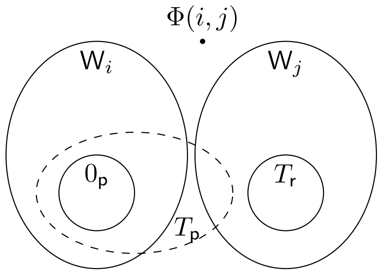

図 12　強実効的分離不能性

命題 3.3 の実効版も同様に成立する．ただし，この命題の改良版を後の命題 3.18 において証明することになる．

命題 3.10. 実効的本質的創造的な有限理論 T は実効的本質的遺伝的創造的である．

証明. T を有限かつ実効的本質的創造的な理論とし，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x,y)$ とする．$\mathsf{W}_{\Psi(x)} = T \cup \mathsf{W}_x$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$ および $\mathsf{W}_{\Theta(x)} = \{\varphi \mid \big(\bigwedge T \to \varphi\big) \in \mathsf{W}_x$ & φ は文 $\}$ となる計算可能関数 $\Theta(x)$ を用意しておく．W_i が理論で，かつ $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾であるような $i \in \mathbb{N}$ と $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ となる $j \in \mathbb{N}$ をとる．このとき，任意の文 φ について

- $\varphi \in (\mathsf{W}_{\Psi(i)})_\mathsf{p} \iff \varphi \in (T + \mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \iff \big(\bigwedge T \to \varphi\big) \in (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p}$
- $\varphi \in \mathsf{W}_{\Theta(j)} \iff \big(\bigwedge T \to \varphi\big) \in \mathsf{W}_j$

が成立している．これらの同値性と $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ から $(\mathsf{W}_{\Psi(i)})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{\Theta(j)} = \emptyset$ が得られる．$\mathsf{W}_{\Psi(i)}$ は T の無矛盾な拡大理論なので，$\Phi(\Psi(i),\Theta(j))$ は定義され，$\Phi(\Psi(i),\Theta(j))$ は文で，$\Phi(\Psi(i),\Theta(j)) \notin (\mathsf{W}_{\Psi(i)})_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ となる．再び同値性より $\big(\bigwedge T \to \Phi(\Psi(i),\Theta(j))\big) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$ となる．したがって，$(i,j) \mapsto \big(\bigwedge T \to \Phi(\Psi(i),\Theta(j))\big)$ を計算する計算可能関数によって T は実効的本質的遺伝的創造的である．$\square$

他方，命題 3.10 における T の有限性の仮定は一般には落とせないこと，すなわち

- 実効的本質的創造的だが実効的本質的遺伝的創造的ではない理論

の存在が知られている（Visser [52, Example 5.7]）．

前節において，実効的分離不能性と実効的本質的創造性が同値であるという Pour-El の定理（定理 2.23）を証明したが，同様に強実効的分離不能と実効的本質的遺伝的創造的の同値性を，次のパラメータありの二重再帰定理を用いて示すことができる．

事実 3.11 (パラメータありの二重再帰定理（の帰結）(Soare [45, Exercise 3.15.(b)] を参照))**.** 任意の計算可能な全域関数 $f_0(x,y,z,w)$ と $f_1(x,y,z,w)$ に対して，計算可能な全域関数 $g_0(x,y)$ と $g_1(x,y)$ が存在して，$\mathsf{W}_{g_0(x,y)} = \mathsf{W}_{f_0(x,y,g_0(x,y),g_1(x,y))}$ かつ $\mathsf{W}_{g_1(x,y)} = \mathsf{W}_{f_1(x,y,g_0(x,y),g_1(x,y))}$ が成立する．

定理 3.12 (Kurahashi and Visser [25])**.** 理論 T が無矛盾かつ *RE* なら，以下は同値である：

1. T は強実効的分離不能である．
2. T は実効的本質的遺伝的創造的である．

証明. $(1 \Rightarrow 2)$: （図 13 に証明の状況を示している．）T が強実効的分離不能であるとして，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x,y)$ とする．$\mathsf{W}_{\Psi(x)} = (\mathsf{W}_x)_\mathsf{p}$ となる計算可能関数 $\Psi(x)$

および $\mathsf{W}_{\Theta(x)} = \mathsf{W}_x \cup T_\mathsf{r}$ を満たす計算可能関数 $\Theta(x)$ を用意しておく．W_i を $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾である理論とし，$(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ とする．

$T + \mathsf{W}_i$ の無矛盾性より $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap T_\mathsf{r} = \emptyset$ なので，$\mathsf{W}_{\Psi(i)} \cap \mathsf{W}_{\Theta(j)} = (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap (\mathsf{W}_j \cup T_\mathsf{r}) = \emptyset$ である．また $0_\mathsf{p} \subseteq (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} = \mathsf{W}_{\Psi(i)}$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ なので，強実効的分離不能性より $\Phi(\Psi(i), \Theta(j))$ は定義され，$\Phi(\Psi(i), \Theta(j))$ は文で，$\Phi(\Psi(i), \Theta(j)) \notin \mathsf{W}_{\Psi(i)} \cup \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ となる．特に $\Phi(\Psi(i), \Theta(j)) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$ であり，計算可能関数 $\Phi(\Psi(x), \Theta(y))$ によって T は実効的本質的遺伝的創造的である．

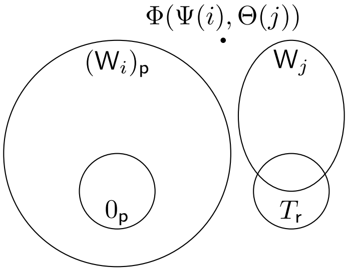

図 13　(1 ⇒ 2) の状況

(2 ⇒ 1): T が実効的本質的遺伝的創造的であるとして，それによって得られる計算可能関数を $\Phi(x, y)$ とする．パラメータありの二重再帰定理を用いて

- $\mathsf{W}_{\Psi_0(x,y)} = \begin{cases} \{\Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y))\} & \Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y))\downarrow \text{ は文} \\ & \quad \& \ \Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y)) \in \mathsf{W}_x \text{ のとき,} \\ \emptyset & \text{それ以外のとき} \end{cases}$
- $\mathsf{W}_{\Psi_1(x,y)} = \begin{cases} \{\neg\Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y))\}_\mathsf{r} & \Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y))\downarrow \text{ は文} \\ & \quad \& \ \Phi(\Psi_0(x,y), \Psi_1(x,y)) \in \mathsf{W}_y \text{ のとき,} \\ 0_\mathsf{r} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

を満たす計算可能関数 $\Psi_0(x, y)$ と $\Psi_1(x, y)$ を用意しておく．

$0_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ とする．表記を単純にするために $k_0 := \Psi_0(i, j)$ と $k_1 := \Psi_1(i, j)$ としておく．

- もし $\Phi(k_0, k_1)$ が定義され，$\Phi(k_0, k_1)$ が文 φ で，$\varphi \in \mathsf{W}_i$ とすると，$\mathsf{W}_{k_0} = \{\varphi\}$ かつ $\mathsf{W}_{k_1} = 0_\mathsf{r}$ となる．$\mathsf{W}_i \cap T_\mathsf{r} = \emptyset$ なので $\varphi \notin T_\mathsf{r}$，つまり $T \nvdash \neg\varphi$ となり $T + \mathsf{W}_{k_0}$ は無矛盾である．いまもし $\xi \in (\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{k_1} = \{\varphi\}_\mathsf{p} \cap 0_\mathsf{r}$ となる ξ がとれたとすると，$\varphi \vdash \xi$ かつ $\vdash \neg\xi$ なので，$\vdash \neg\varphi$ であるが，これは $\varphi \notin T_\mathsf{r}$ に反する．よって $(\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{k_1} = \emptyset$ である．実効的本質的遺伝的創造性より $\varphi = \Phi(k_0, k_1) \notin (\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_{k_1}$ となるが，これは $\varphi \in (\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} = \{\varphi\}_\mathsf{p}$ に反する．
- もし $\Phi(k_0, k_1)$ が定義され，$\Phi(k_0, k_1)$ が文 φ で，$\varphi \in \mathsf{W}_j$ とすると，$\mathsf{W}_{k_0} = \emptyset$ かつ $\mathsf{W}_{k_1} = \{\neg\varphi\}_\mathsf{r}$ となる．いまもし $\xi \in (\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{k_1} = 0_\mathsf{p} \cap \{\neg\varphi\}_\mathsf{r}$ となる ξ がとれたとすると，$\vdash \xi$ かつ $\neg\varphi \vdash \neg\xi$ なので，$\vdash \varphi$ であるが，これは $0_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ に反する．よって $(\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{k_1} = \emptyset$ である．また明らかに $T + \mathsf{W}_{k_0} = T$ は無矛盾なので，実効的本質的遺伝的創造性より $\varphi \notin (\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_{k_1}$ となるが，これは $\varphi \in \mathsf{W}_{k_1} = \{\neg\varphi\}_\mathsf{r}$ に反する．

以上より，$\mathsf{W}_{k_0} = \emptyset$ かつ $\mathsf{W}_{k_1} = 0_\mathsf{r}$ であることが分かった．このとき $T + \mathsf{W}_{k_0} = T$ は無矛盾で，$(\mathsf{W}_{k_0})_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_{k_1} = 0_\mathsf{p} \cap 0_\mathsf{r} = \emptyset$ なので，Φ の取り方より $\Phi(k_0, k_1)$ が定義され，$\Phi(k_0, k_1)$ は $\mathcal{L}_A$-文である．上の議論から $\Phi(k_0, k_1) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$ が既に示せており，以上から計算可能関数 $\Phi(\Psi_0(x, y), \Psi_1(x, y))$ によって T は強実効的分離不能である．　□

実効化された諸性質の関係に関する状況は次の図の通りである．

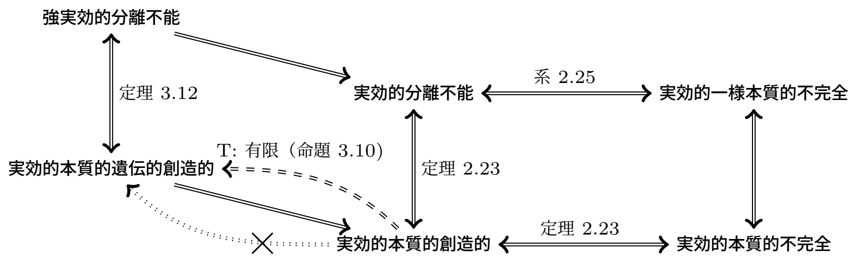

図 14　実効化された諸性質の関係

3.3　Cobham の定理と Vaught の定理

Cobham は，$\mathbf{R}_0$ が有限公理化可能ではないにも関わらず，本質的遺伝的決定不能であることを証明した．

定理 3.13 (Cobham)**.** $\mathbf{R}_0$ は本質的遺伝的決定不能である．

この結果は Vaught [50] において紹介されているが，しかしそのオリジナルの証明は残念ながら残されていない．

Vaught [50] の脚注 2

> This result, as yet unpublished, was communiated orally by Cobham to the author and others in 1957. The full proof and various consequences were described by Cobham in correspondence with A. Tarski and the author in 1958.

証明の概要は [8] にあるが，やはりその詳細は残されていない．Vaught は Cobham の定理の証明から次の定理が得られることを指摘しているが，これも証明が書かれていない．

定理 3.14 (Vaught [50])**.** 理論 U が RE でありかつ $\mathbf{R}_0 + U$ が無矛盾ならば，有限 $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S + U$ は無矛盾．

定理 3.14 が分かれば Cobham の定理が得られることは次のように簡単に確かめられる．

定理 *3.14* $\Rightarrow$ 定理 *3.13* の証明. $\mathbf{R}_0 + U$ が無矛盾である理論 U をとる．U が RE でなければ決定不能なので，U は RE としてよい．定理 3.14 より，有限理論 S で，$S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S + U$ が無矛盾となるものがとれる．$\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性より S は本質的決定不能である．S は有限なので，命題 3.3 より S は本質的遺伝的決定不能である．したがって U は決定不能である．　□

Vaught は次の Trakhtenbrot の定理を利用することで，Cobham の定理より更に強い結果を得た．

定理 3.15 (Trakhtenbrot [48])**.** $\mathcal{F}$ を有限反例モデルをもつ $\mathcal{L}_A$-文全体の集合とする．このとき，0_p と $\mathcal{F}$ は実効的分離不能である．

定理 3.16 (Vaught [50])**.** $\mathbf{R}_0$ は強実効的分離不能である．

定理 3.12 より $\mathbf{R}_0$ の実効的本質的遺伝的創造性が得られ，特に Cobham の定理が従う．Conham の定理の直接的な証明は Visser [51] において初めて与えられた．しかし，Visser による証明は上で紹介した Vaught の 2 つの定理（定理 3.14 と 3.16）のどちらの証明にも適用できないものとなっている．ここで Vaught の定理（定理 3.14）の実効版に注目する．

定義 3.17 (実効的有限拡大性)**.** 理論 T が**実効的有限拡大性をもつ**とは，計算可能関数 $\Phi(x)$ が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，もし W_i が理論で $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾であれば，$\Phi(i)$ が定義され，$\Phi(i)$ が文で，$\Phi(i) \vdash T$ かつ $\Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は無矛盾となることをいう．

例えば有限理論 T は定数関数 $\Phi(x) = \bigwedge T$ によって実効的有限拡大性をもつ．よって次は命題 3.10 の改良である．

命題 3.18. 理論 T が実効的有限拡大性をもち，かつ実効的本質的創造的なら，T は実効的本質的遺伝的創造的である．したがって T は強実効的分離不能である．

証明. 理論 T が実効的有限拡大性をもち，かつ実効的本質的創造的であるとし，それぞれによって得られる計算可能関数を $\Phi(x)$ および $\Psi(x, y)$ とする．$\mathsf{W}_{\Sigma(x)} = \{\Phi(x)\} \cup \mathsf{W}_x$ となる計算可能関数 $\Sigma(x)$ および $\mathsf{W}_{\Theta(x)} = \{\varphi \mid (\Phi(x) \to \varphi) \in \mathsf{W}_x \ \&\ \varphi \text{ は文}\}$ となる計算可能関数 $\Theta(x)$ を用意しておく．W_i が理論で $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾であり，$(\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ となるとする．このとき $\Phi(i)$ は定義され，$\Phi(i)$ は文で，$\Phi(i) \vdash T$ かつ $\Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は無矛盾となる．いま任意の文 φ について，

- $\varphi \in (\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_{\mathsf{p}} \iff \varphi \in (\Phi(i) + \mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \iff (\Phi(i) \to \varphi) \in (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$
- $\varphi \in \mathsf{W}_{\Theta(j)} \iff (\Phi(i) \to \varphi) \in \mathsf{W}_j$

が成り立つ．これらの同値性と $(\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ から，$(\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_{\mathsf{p}} \cap \mathsf{W}_{\Theta(j)} = \emptyset$ が得られる．また $\Phi(i) \vdash T$ より $\mathsf{W}_{\Sigma(i)} = \Phi(i) + \mathsf{W}_i$ は T の無矛盾な拡大理論である．したがって $\Psi(\Sigma(i), \Theta(j))$ が定義され，$\Psi(\Sigma(i), \Theta(j))$ は文で，$\Psi(\Sigma(i), \Theta(j)) \notin (\mathsf{W}_{\Sigma(i)})_{\mathsf{p}} \cup \mathsf{W}_{\Theta(j)}$ である．つまり再び同値性より $\big(\Phi(i) \to \Psi(\Sigma(i), \Theta(j))\big) \notin (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \cup \mathsf{W}_j$ となる．以上より，$(i, j) \mapsto \big(\Phi(i) \to \Psi(\Sigma(i), \Theta(j))\big)$ を計算する計算可能関数によって T は実効的本質的遺伝的創造的である．定理 3.12 より T は強実効的分離不能でもある． □

定理 2.29 より $\mathbf{R}_0$ は実効的本質的創造的なので，Vaught の 2 つの定理を証明するには，$\mathbf{R}_0$ が実効的有限拡大性をもつことを証明すれば十分である．

定理 3.19 (Kurahashi and Visser [24])**.** $\mathbf{R}_0$ は実効的有限拡大性をもつ．

証明は基本的には Visser [51] による Cobham の定理の証明の改良であり，次の定理を証明することが本質的である．

定理 3.20 (Certified Extension Theorem [24])**.** 任意の Σ_1 文 σ に対して，次の条件を満たす Σ_1 文 σ^{cert} が実効的にとれる：

1. $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.

定理 3.20 から $\mathbf{R}_0$ が実効的有限拡大性をもつことが従う．

定理 *3.20* $\Rightarrow$ 定理 *3.19* の証明. W_i が理論で $\mathbf{R}_0 + \mathsf{W}_i$ が無矛盾とする．$(\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$ は RE であり，事実 1.18 より $\forall n \big(n \in (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}} \iff \mathbb{N} \models \alpha(\overline{n})\big)$ を満たす Σ_1 論理式 $\alpha(x)$ が i から実効的にとれる．不動点定理（定理 2.26）と定理 3.20 より，$\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow \alpha(\ulcorner \neg\sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner)$ を満たす Σ_1 文 σ および σ^{cert} が i から実効的にとれる．

いま $\mathbb{N} \models \sigma$ であると仮定すれば，不動点の性質から $\mathbb{N} \models \alpha(\ulcorner\neg\sigma^{\mathrm{cert}}\urcorner)$ であり，α の取り方から $\neg\sigma^{\mathrm{cert}} \in (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$，すなわち $\mathsf{W}_i \vdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ である．他方，定理 3.20.(1) より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$ なので，$\mathbf{R}_0 + \mathsf{W}_i$ の無矛盾性に反する．

したがって $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ である．不動点の性質から $\mathbb{N} \models \neg\alpha(\ulcorner\neg\sigma^{\mathrm{cert}}\urcorner)$ で，α の取り方から $\neg\sigma^{\mathrm{cert}} \notin (\mathsf{W}_i)_{\mathsf{p}}$ であり，したがって $\sigma^{\mathrm{cert}} + \mathsf{W}_i$ は無矛盾である．他方，定理 3.20.(2) より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ である．以上より，$i \mapsto \sigma^{\mathrm{cert}}$ を計算する計算可能関数によって $\mathbf{R}_0$ は実効的有限拡大性をもつ． □

3.4 定理 3.20 の証明

したがって，あとは定理 3.20 を証明すればよいことが分かった．定理 3.20 の証明の方針は次のとおりである．

- Σ_1 文 σ に対して σ^{cert} を「σ の witness が自然数と同様に振る舞う数であること」を保証する文とする．
- 項目 1 について，$\mathbb{N} \models \sigma$ の場合に，σ の witness が自然数でとれるので，$\mathbb{N} \models \sigma^{\mathrm{cert}}$ となる．$\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$ が得られる．
- 項目 2 について，$\mathbb{N} \models \neg\sigma$ のとき，σ の witness は自然数にはない．σ^{cert} は σ witness がどんな自然数よりも大きくなることを保証し，このことから σ^{cert} のモデルは $\mathbf{R}_0$-構造となる．つまり $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ となる．

では，「σ の witness が自然数と同様に振る舞う数であること」を保証する文 σ^{cert} を具体的に定義するが，まずは Δ_0 論理式および Σ_1 論理式をきれいな形に変形することから始める．

定義 3.21 (純 Δ_0 論理式と純 Σ_1 論理式)**.**

1. Δ_0 論理式 φ が**純**であるとは，φ に含まれる $t_1 \leq t_2$ という形の原子論理式はすべて t_1 と t_2 が変数であり，含まれる $t_1 = t_2$ という形の原子論理式はすべて $0 = x$ または $x = y$ または $\mathsf{s}(x) = y$ または $x + y = z$ または $x \times y = z$（x, y, z は変数）という形をしていることをいう．
2. 論理式 φ が**純** Σ_1 であるとは，ある純 Δ_0 論理式 $\psi(\vec{x})$ について $\exists\vec{x}\,\psi(\vec{x})$ という形であることをいう．ただし $\vec{x}$ は空も許す．
3. 論理式 φ が**純 1-**Σ_1 であるとは，ある純 Δ_0 論理式 $\psi(x)$ について $\exists x\,\psi(x)$ という形であることをいう．

命題 3.22. 任意の Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ に対して，純 *1-*Σ_1 論理式 $\varphi^\bullet(\vec{x})$ で

1. $\mathbb{N} \models \forall\vec{x}\big(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^\bullet(\vec{x})\big)$

2. $\vdash \varphi^\bullet(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x})$（つまり述語論理で証明可能）

となるものを実効的にとることができる．

証明. 初めに φ に含まれる $\to$ を $\neg$ と $\vee$ で書き換え，更に $\neg$ をすべて論理式の内側に移動し，$\neg$ が原子論理式以外には適用されない形に書き換える．続いて，含まれる

- $\forall x \leq t\,\psi$ を $\exists y\,(t = y \wedge \forall x \leq y\,\psi)$ に，
- $\exists x \leq t\,\psi$ を $\exists y\,(t = y \wedge \exists x \leq y\,\psi)$ に，
- $t_1 = t_2$ を $\exists x(t_1 = x \wedge t_2 = x)$ に，
- $\circ \in \{\leq, \neq, \nleq\}$ について $t_1 \circ t_2$ を $\exists x_1 \exists x_2\,(t_1 = x_1 \wedge t_2 = x_2 \wedge x_1 \circ x_2)$ に，

書き換える．新しく導入した存在量化に使用する変数は他のどの変数とも異なるとしておけば，更にそれらの存在量化を論理式の先頭に移動することができる．このような書き換えを任意の Σ_1 論理式に施すことで，Σ_1 論理式は $\exists\vec{x}\,\psi(\vec{x})$ という形で，特に $\psi(\vec{x})$ は $\to$ を含まず，$\neg$ は原子

論理式以外には適用されず，含まれる $t_1 \leq t_2$ という形の原子論理式はすべて t_1 と t_2 が変数であり，含まれる $t_1 = t_2$ という形の原子論理式はすべて t_2 が変数である Δ_0 論理式であるとしてよい．

続いて，上述の条件を満たす任意の Δ_0 論理式 φ に対して，$\mathbb{N}$ 上で同値であり述語論理上で φ を含意する純 Σ_1 論理式が取れることを帰納法を用いて示す．まずは $\mathcal{L}_A$-項 t の構成に関する帰納法で $t = x$ と述語論理上で同値な純 Σ_1 論理式が取れることを示す．

- t が 0 なら $0 = x$ は純 Δ_0 論理式で，純 Σ_1 論理式である．
- t が変数 y なら $y = x$ は純 Δ_0 論理式で，純 Σ_1 論理式である．
- t が $\mathsf{s}(t_1)$ なら，$\mathsf{s}(t_1) = x$ は $\exists y(\mathsf{s}(y) = x \land t_1 = y)$ と述語論理上で同値である．ここで帰納法の仮定より，ある純 Δ_0 論理式 $\psi(y, \vec{z})$ が存在して $t_1 = y$ は述語論理上で $\exists \vec{z}\, \psi(y, \vec{z})$ と同値となる（ただし $\vec{z}$ は x, y とは異なる変数のみからなるとしてよい）．したがって $\mathsf{s}(t_1) = x$ は純 Σ_1 論理式 $\exists y \exists \vec{z}(\mathsf{s}(y) = x \land \psi(y, \vec{z}))$ と述語論理上で同値である．
- t が $t_1 + t_2$ や $t_1 \times t_2$ の場合も同様にやればよい．

続いて帰納法のステップを示す．いま φ_0 と φ_1 に対して，それぞれ条件を満たす純 Σ_1 論理式 $\exists \vec{x}\, \psi_0(\vec{x})$ と $\exists \vec{y}\, \psi_1(\vec{y})$ がとれたとする（$\vec{x}$ と $\vec{y}$ は共通の変数を含まないとしてよい）．このとき $\varphi_0 \circ \varphi_1$（$\circ \in \{\lor, \land\}$）に対しては純 Σ_1 論理式 $\exists \vec{x} \exists \vec{y}\, (\psi_0(\vec{x}) \circ \psi_1(\vec{y}))$ が条件を満たす．

いま $\varphi_0(y)$ に対して，純 Δ_0 論理式 $\psi_0(\vec{x}, y)$ があって $\exists \vec{x}\, \psi_0(\vec{x}, y)$ が条件を満たすとする．このとき $\exists y \leq z\, \varphi_0(y)$ に対しては純 Σ_1 論理式 $\exists \vec{x} \exists y \leq z\, \psi_0(\vec{x}, y)$ が条件を満たすことは明らか．また，$\forall y \leq z\, \varphi_0(y)$ に対しては純 Σ_1 論理式 $\exists w\, \forall y \leq z\, \exists \vec{x} \leq w\, \psi_0(\vec{x}, y)$ が条件を満たす．すなわち，

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} \models \forall y \leq z\, \varphi_0(y) &\leftrightarrow \forall y \leq z\, \exists \vec{x}\, \psi_0(\vec{x}, y) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&\leftrightarrow \exists w\, \forall y \leq z\, \exists \vec{x} \leq w\, \psi_0(\vec{x}, y) && \text{(Σ_1-Collection Principle より)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vdash \exists w\, \forall y \leq z\, \exists \vec{x} \leq w\, \psi_0(\vec{x}, y) &\to \forall y \leq z\, \exists \vec{x}\, \psi_0(\vec{x}, y) \\
&\to \forall y \leq z\, \varphi_0(y) && \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}$$

である．

最後に命題の主張を示す．Σ_1 論理式 $\exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$（$\psi(\vec{x})$ は Δ_0）に対して，純 Σ_1 論理式 $\exists \vec{y}\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y})$（$\psi^*(\vec{x}, \vec{y})$ は純 Δ_0）が存在して，

- $\mathbb{N} \models \forall \vec{x}\, \bigl(\psi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y}\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y})\bigr)$
- $\vdash \exists \vec{y}\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y}) \to \psi(\vec{x})$

が成立することは既に示した．このとき純 1-Σ_1 論理式 $\exists w\, \exists \vec{x} \leq w\, \exists \vec{y} \leq w\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y})$ について，

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} \models \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x}) &\leftrightarrow \exists \vec{x} \exists \vec{y}\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y}) \\
&\leftrightarrow \exists w\, \exists \vec{x} \leq w\, \exists \vec{y} \leq w\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vdash \exists w\, \exists \vec{x} \leq w\, \exists \vec{y} \leq w\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y}) &\to \exists \vec{x} \exists \vec{y}\, \psi^*(\vec{x}, \vec{y}) \\
&\to \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})
\end{aligned}$$

が成立する． □

$x < y$ を $x \leq y \land x \neq y$ の略記とする．

定義 3.23 (Certification)．論理式 $\mathrm{cert}(v)$ を，以下の論理式を $\land$ でつなげたものとする：

C1　$0 \leq v$

C2　$\forall x < v\, (\mathsf{s}(x) \leq v)$

C3　$\forall x\,(x \leq 0 \leftrightarrow x = 0)$
C4　$\forall x < v\,\forall y\,\big(y \leq \mathsf{s}(x) \leftrightarrow (y \leq x \vee y = \mathsf{s}(x))\big)$
C5　$\forall x, y, z \leq v\,\big(\mathsf{s}((x \times y) + z) \neq 0\big)$
C6　$\forall x, y, z, w \leq v\,\big(\mathsf{s}((x \times y) + z) = \mathsf{s}w \to (x \times y) + z = w\big)$
C7　$\forall x, y \leq v\,\big((x \times y) + 0 = x \times y\big)$
C8　$\forall x, y, z \leq v\,\big((x \times y) + \mathsf{s}(z) = \mathsf{s}((x \times y) + z)\big)$
C9　$\forall x \leq v\,(x \times 0 = 0)$
C10　$\forall x, y \leq v\,\big(x \times \mathsf{s}(y) = (x \times y) + x\big)$

ここで C3 と C4 は Δ_0 ではないが，それぞれ
- $\forall x \leq 0\,(x = 0 \wedge 0 \leq 0)$
- $\forall x < v\,\Big(\forall y \leq \mathsf{s}(x)\,\big(y \leq x \vee y = \mathsf{s}(x)\big) \wedge \forall y \leq x\,\big(y \leq \mathsf{s}(x) \wedge \mathsf{s}(x) \leq \mathsf{s}(x)\big)\Big)$

と述語論理上で同値であり，これらに書き換えたと考えれば Δ_0 論理式として扱える．したがって $\mathrm{cert}(v)$ は Δ_0 論理式であるとしてよい．さて，ようやく σ^{cert} を定義することができる．

定義 3.24. Σ_1 文 σ に対して, 命題 3.22 を利用して, 純 1-Σ_1 文 $\exists x\,\sigma_0(x)$ で $\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow \exists x\,\sigma_0(x)$ を満たすものを取り，Σ_1 文 σ^{cert} を

$$\exists x\,\big(\mathrm{cert}(x) \wedge \sigma_0(x)\big)$$

と定める．

Σ_1 文 σ に対して σ^{cert} は実効的にとることができる．定理 3.20 を証明するには，次を示せば十分である．

定理 3.25. 任意の純 *1*-Σ_1 文 σ について，
1. $\mathbb{N} \models \sigma$ ならば $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$.

定理 3.25 の証明を行う前に，次の条件 (†) を満たす $\mathcal{L}_A$-モデル M の性質について調べておくことにする：
(†)：M の元 b は $M \models \mathrm{cert}(b)$ を満たし，自然数 k は全ての $m < k$ について $M \models \overline{m} \neq b$ を満たすとする．

補題 3.26 (†)**.** 各 $m \leq k$ に対して，$M \models \overline{m} \leq b$.

証明. 補題を $m \leq k$ に関する帰納法で示す．$m = 0$ について，C1 より $M \models 0 \leq b$ である．補題が $m + 1 \leq k$ となる m に対して成り立つとする．帰納法の仮定より $M \models \overline{m} \leq b$ である．$m < k$ なので，仮定 (†) より $M \models \overline{m} \neq b$ となるから，$M \models \overline{m} < b$ である．C2 より $M \models \overline{m + 1} \leq b$ が得られた．□

以降の補題の証明において，補題 3.26 は特に言及することなく自由に用いることにする．

補題 3.27 (†)**.** 任意の $m \leq k$ について，$M \models \forall y\,\Big(y \leq \overline{m} \leftrightarrow \bigvee_{l \leq m} y = \overline{l}\Big)$.

証明. 補題を $m \leq k$ に関する帰納法で示す．$m = 0$ の場合は C3 より．補題が $m + 1 \leq k$ となる m に対して成り立つとする．いま $m < k$ なので $M \models \overline{m} < b$ だから，C4 と帰納法の仮定

より

$$\begin{aligned}
M \models y \leq \overline{m+1} &\leftrightarrow y \leq \mathsf{s}(\overline{m}) \\
&\leftrightarrow y \leq \overline{m} \vee y = \mathsf{s}(\overline{m}) && \text{(C4)} \\
&\leftrightarrow \bigvee_{l \leq m} y = \bar{l} \vee y = \overline{m+1} && \text{(帰納法の仮定)} \\
&\leftrightarrow \bigvee_{l \leq m+1} y = \bar{l}. && \square
\end{aligned}$$

補題 3.28 (†)**.** 任意の $m, n, p \leq k$ に対して，$M \models (\overline{m} \times \overline{n}) + \overline{p} = \overline{(m \times n) + p}$.

証明. 補題を n に関する帰納法で証明する．$n = 0$ について，$M \models (\overline{m} \times 0) + \overline{p} = \overline{p}$ を p に関する帰納法で示す．$p = 0$ の場合，C7 より $M \models (\overline{m} \times 0) + 0 = \overline{m} \times 0$ である．C9 より $M \models \overline{m} \times 0 = 0$ なので，$M \models (\overline{m} \times 0) + 0 = 0$ となり成立する．

$p + 1 \leq k$ となる p について成り立つと仮定する．C8 と p に対する帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
M \models (\overline{m} \times 0) + \overline{p+1} &= (\overline{m} \times 0) + \mathsf{s}(\overline{p}) \\
&= \mathsf{s}((\overline{m} \times 0) + \overline{p}) && \text{(C8)} \\
&= \mathsf{s}(\overline{p}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \overline{p+1}
\end{aligned}$$

が得られる．これで補題の $n = 0$ の場合が示せた．

補題が $n + 1 \leq k$ を満たす n に対して成立すると仮定する．$M \models (\overline{m} \times (\overline{n+1})) + \overline{p} = \overline{(m \times (n+1)) + p}$ を p に関する帰納法で証明する．$p = 0$ のとき，C7 と C10 と n に関する帰納法の仮定と $m \leq k$ より

$$\begin{aligned}
M \models (\overline{m} \times (\overline{n+1})) + 0 &= \overline{m} \times \mathsf{s}(\overline{n}) && \text{(C7)} \\
&= (\overline{m} \times \overline{n}) + \overline{m} && \text{(C10)} \\
&= \overline{(m \times n) + m} && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \overline{(m \times (n+1)) + 0}.
\end{aligned}$$

最後に主張が $p + 1 \leq k$ となる p に対して成り立つと仮定する．C8 と p に対する帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
M \models (\overline{m} \times (\overline{n+1})) + (\overline{p+1}) &= (\overline{m} \times (\overline{n+1})) + \mathsf{s}(\overline{p}) \\
&= \mathsf{s}((\overline{m} \times (\overline{n+1})) + \overline{p}) && \text{(C8)} \\
&= \mathsf{s}(\overline{(m \times (n+1)) + p}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \overline{(m \times (n+1)) + (p+1)}. && \square
\end{aligned}$$

補題 3.29 (†)**.** $m, n \leq k$ とする．

1. $M \models \overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n}$.

2. $M \models \overline{m} + \overline{n} = \overline{m + n}$.

証明. 1. 補題 3.28 より $M \models (\overline{m} \times \overline{n}) + 0 = \overline{m \times n}$ なので，C7 より $M \models \overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n}$ となる．

2. $k = 0$ のとき，$m = n = 0$ である．C7 より $M \models (0 \times 0) + 0 = 0 \times 0$ であり，C9 より $M \models 0 \times 0 = 0$ なので，$M \models 0 + 0 = 0$ が得られる．

$k \geq 1$ の場合，補題 3.28 と項目 1 より

$$\begin{aligned} M \models \overline{m} + \overline{n} &= (\overline{m} \times \overline{1}) + \overline{n} \\ &= \overline{m + n}. \end{aligned}$$

□

補題 3.30 (†)**.** $m \leq k^2 + k$ と $l \leq k$ が $m \neq l$ とする．このとき $M \models \overline{m} \neq \overline{l}$.

証明. 補題を $l \leq k$ に関する帰納法で証明する．$l = 0$ の場合，$m \leq k^2 + k$ が $m \neq 0$ とする．このとき $m = n + 1$ となる n がとれ，$\overline{m}$ は $\mathsf{s}(\overline{n})$ に等しい．$n = (k \times m_0) + m_1$ を満たす $m_0, m_1 \leq k$ をとれば，補題 3.28 より $M \models \overline{m} = \mathsf{s}(\overline{k} \times \overline{m_0} = \overline{m_1})$ であり，C5 と合わせると $M \models \overline{m} \neq 0$ が得られる．

$l + 1 \leq k$ を満たす l について成り立つと仮定する．$m \leq k^2 + k$ が $m \neq l + 1$ を満たすとする．

$m = 0$ の場合，$l = (k \times l_0) + l_1$ を満たす $l_0, l_1 \leq k$ をとれば，補題 3.28 より $M \models \overline{l + 1} = \mathsf{s}(\overline{k} \times \overline{l_0} = \overline{l_1})$ であり，C5 と合わせると $M \models \overline{l + 1} \neq 0$ が得られる．

$m > 0$ の場合，$m = n + 1$ となる n がとれて $n \neq l$ となる．$n = (k \times m_0) + m_1$ となる $m_0, m_1 \leq k$ をとる．帰納法の仮定より $M \models \overline{n} \neq \overline{l}$ なので補題 3.28 より $M \models (\overline{k} \times \overline{m_0}) + \overline{m_1} \neq \overline{l}$ である．C6 より $M \models \mathsf{s}((\overline{k} \times \overline{m_0}) + \overline{m_1}) \neq \mathsf{s}(\overline{l})$ となり，補題 3.28 より $M \models \mathsf{s}(\overline{n}) \neq \mathsf{s}(\overline{l})$ すなわち $M \models \overline{m} \neq \overline{l + 1}$ が得られる． □

純 Δ_0 論理式を考えるのは，次の補題を成立させるためであり，これが今回の証明の最も重要なステップである．

補題 3.31 (†)**.** 任意の純 Δ_0 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_i)$ と $n_0, \ldots, n_i \leq k$ について，もし $\mathbb{N} \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$ ならば $M \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$ である．

証明. 任意の純 Δ_0 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_i)$ と $n_0, \ldots, n_i \leq k$ に対して，次の 2 個の主張を φ の構成に関する帰納法で同時に示す：

1. $\mathbb{N} \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$ ならば $M \models \varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$.
2. $\mathbb{N} \models \neg\varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$ ならば $M \models \neg\varphi(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i})$.

最初にこの主張を原子論理式に対して示す．

- φ が $x_0 = x_1$ という形の場合.
  1. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} = \overline{n_1}$ なら $n_0 = n_1$ で $M \models \overline{n_0} = \overline{n_1}$ は明らか.
  2. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} \neq \overline{n_1}$ なら $n_0 \neq n_1$ である．$n_0, n_1 \leq k$ なので，補題 3.30 より $M \models \overline{n_0} \neq \overline{n_1}$ となる.
- φ が $0 = x_0$ という形の場合は $x_0 = x_1$ の場合の特別な場合なので成立する.
- φ が $\mathsf{s}(x_0) = x_1$ という形の場合.
  1. $\mathbb{N} \models \mathsf{s}(\overline{n_0}) = \overline{n_1}$ ならば $n_0 + 1 = n_1$ であり，$M \models \overline{n_0 + 1} = \overline{n_1}$ となる．これは $M \models \mathsf{s}(\overline{n_0}) = \overline{n_1}$ そのもの.
  2. $\mathbb{N} \models \mathsf{s}(\overline{n_0}) \neq \overline{n_1}$ ならば $n_0 + 1 \neq n_1$ である．$k = 0$ の場合は $n_0 = n_1 = 0$ であり，C5 より $M \models \mathsf{s}((0 \times 0) + 0) \neq 0$ を得る．補題 3.28 より $M \models (0 \times 0) + 0 = 0$ なので $M \models \overline{1} \neq 0$ となり，これは $M \models \mathsf{s}(\overline{n_0}) \neq \overline{n_1}$ を意味する.
  $k \geq 1$ の場合，$n_0 + 1 \leq k^2 + k$ と $n_1 \leq k$ なので補題 3.30 より $M \models \overline{n_0 + 1} \neq \overline{n_1}$，すなわち $M \models \mathsf{s}(\overline{n_0}) \neq \overline{n_1}$ である.
- φ が $x_0 + x_1 = x_2$ という形の場合.
  1. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} + \overline{n_1} = \overline{n_2}$ ならば $n_0 + n_1 = n_2$ であり，$M \models \overline{n_0 + n_1} = \overline{n_2}$ である．$n_0, n_1 \leq k$ なので，補題 3.29 より $M \models \overline{n_0} + \overline{n_1} = \overline{n_2}$ となる.

2. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} + \overline{n_1} \neq \overline{n_2}$ のとき $n_0 + n_1 \neq n_2$ である．$n_0 + n_1 \leq k^2 + k$ かつ $n_2 \leq k$ なので補題 3.30 より $M \models \overline{n_0 + n_1} \neq \overline{n_2}$ を得る．更に補題 3.29 と合わせて $M \models \overline{n_0} + \overline{n_1} \neq \overline{n_2}$ が得られる．

- φ が $x_0 \times x_1 = x_2$ という形の場合も同様に示せる．
- φ が $x_0 \leq x_1$ という形の場合．

1. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} \leq \overline{n_1}$ ならば $n_0 \leq n_1$ である．$M \models \bigvee_{l \leq n_1} \overline{n_0} = \bar{l}$ かつ $n_1 \leq k$ なので，補題 3.27 より $M \models \overline{n_0} \leq \overline{n_1}$ が従う．

2. $\mathbb{N} \models \overline{n_0} \not\leq \overline{n_1}$ ならば $n_1 < n_0$ である．各 $l \leq n_1$ に対して $n_0 \neq l$ かつ $n_0, l \leq k$ なので，補題 3.30 より $M \models \overline{n_0} \neq \bar{l}$ となる．このとき，$M \models \bigwedge_{l \leq n_1} \overline{n_0} \neq \bar{l}$ である．$n_1 \leq k$ なので，補題 3.27 より $M \models \overline{n_0} \not\leq \overline{n_1}$ が得られる．

続いて帰納法のステップを証明する．φ が $\neg\varphi_0$ もしくは $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ について $\varphi_0 \circ \varphi_1$ の場合は帰納法の仮定を用いて簡単に示せる．あとは φ が $\exists y \leq x_j\, \varphi_0(x_0, \ldots, x_i, y)$ という形の場合を示す（ただし φ_0 に対して主張が成立するとする）．φ が $\forall y \leq x_j\, \varphi_0(x_0, \ldots, x_i, y)$ の場合も同様に証明できる．

1. $\mathbb{N} \models \exists y \leq \overline{n_j}\, \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ とすると，$n_{i+1} \leq n_j \leq k$ が存在して，$\mathbb{N} \models \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, \overline{n_{i+1}})$ が成り立つ．帰納法の仮定より $M \models \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, \overline{n_{i+1}})$ となる．また，この場合 $M \models \overline{n_{i+1}} \leq \overline{n_j}$ となることは既に示した．したがって $M \models \exists y \leq \overline{n_j}\, \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ が得られる．

2. $\mathbb{N} \models \neg\exists y \leq \overline{n_j}\, \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ とすると，$\mathbb{N} \models \forall y \leq \overline{n_j} \neg\varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ なので，各 $l \leq n_j$ に対して $\mathbb{N} \models \neg\varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, \bar{l})$ である．帰納法の仮定より各 $l \leq n_j$ に対して $M \models \neg\varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, \bar{l})$ となり，

$$M \models \forall y \Big(\bigvee_{l \leq n_j} y = \bar{l} \to \neg\varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y) \Big)$$

である．補題 3.27 より $M \models \forall y \leq \overline{n_j} \neg\varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ なので，$M \models \neg\exists y \leq \overline{n_j}\, \varphi_0(\overline{n_0}, \ldots, \overline{n_i}, y)$ が成立する． □

ここで構造 M に関する分析は終了し，定理 3.25 を証明するための準備が整った．

定理 3.25 の証明． σ を純 1-Σ_1 文 $\exists x\, \sigma_0(x)$ とする．

1. $\mathbb{N} \models \sigma$ すなわち $\mathbb{N} \models \sigma_0(\overline{n})$ となる $n \in \mathbb{N}$ がとれるとする．明らかに $\mathbb{N} \models \mathrm{cert}(\overline{n})$ が成り立つので，$\mathbb{N} \models \exists x\, (\mathrm{cert}(x) \wedge \sigma_0(x))$，すなわち $\mathbb{N} \models \sigma^{\mathrm{cert}}$ が成立する．σ^{cert} は Σ_1 文なので，$\mathbf{R}_0$ の Σ_1-完全性（定理 1.16）より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$ が成り立つ．

2. $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ とする．このとき，有限理論 $\{\sigma^{\mathrm{cert}}\}$ が Σ_1-完全となることを示す．

M を σ^{cert} の任意のモデルとする．つまり，ある元 b に対して $M \models \mathrm{cert}(b) \wedge \sigma_0(b)$ が成立する．いま $M \models \overline{k} = b$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定して矛盾を導く．$k^\star$ をそのような k のうち最小の自然数とすると，全ての $m < k^\star$ について $M \models \overline{m} \neq b$ なので，M と b と $k^\star$ に対して条件 (†) が成立する．特に補題 3.31 が利用可能である．$\mathbb{N} \models \neg\sigma_0(\overline{k^\star})$ なので，補題 3.31 より $M \models \neg\sigma_0(\overline{k^\star})$ となる．$k^\star$ の取り方より $M \models \neg\sigma_0(b)$ となるためおかしい．

以上より，全ての $k \in \mathbb{N}$ について $M \models \overline{k} \neq b$ である．つまり，M と b と全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して条件 (†) が成立する．

ψ を $\mathbb{N} \models \psi$ となる任意の Σ_1 文とする．命題 3.22 より，純 Δ_0 論理式 $\delta(x)$ が存在して，次が成立する：

1. $\mathbb{N} \models \psi \leftrightarrow \exists x\, \delta(x)$.
2. $\vdash \exists x\, \delta(x) \to \psi$.

このとき $\mathbb{N} \models \exists x\,\delta(x)$ なので，ある $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{N} \models \delta(\overline{n})$ である．補題 3.31 より $M \models \delta(\overline{n})$ となる．M は任意の σ^{cert} のモデルだったので，完全性定理より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \delta(\overline{n})$ である．したがって $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \exists x\,\delta(x)$ であり，$\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \psi$ が従う．

以上より σ^{cert} が Σ_1-完全であることが分かった．よって定理 1.16 より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ が得られる． □

以上で定理 3.20 の証明が完了した．これにより定理 3.19 の証明，Vaught の 2 つの定理（定理 3.14 と 3.16）の証明及び Cobham の定理（定理 3.13）の証明も完了した．ここから Trakhtenbrot の定理（定理 3.15）の別証明が得られることを指摘しておく．

定理 *3.15* の証明．$\mathcal{F}$ を，有限反例モデルを持つ $\mathcal{L}_A$-文全体の集合とする．$\mathbf{R}_0$ の強実効的分離不能性（定理 3.16）によって得られる計算可能関数を $\Phi(x, y)$ とする．$0_{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{W}_i$ と $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{W}_j$ と $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ を満たす $i, j \in \mathbb{N}$ を任意にとる．いま $\varphi \in (\mathbf{R}_0)_{\mathsf{r}}$ とすれば $\mathbf{R}_0$ の有限部分理論 S が存在して $S \vdash \neg\varphi$ である．命題 1.7 より S は有限モデル M をもち，特に $M \models \neg\varphi$ である．したがって $\varphi \in \mathcal{F}$ となる．以上より $(\mathbf{R}_0)_{\mathsf{r}} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathsf{W}_j$ であるから，$\Phi(i, j)$ は定義され，$\Phi(i, j)$ は文で，$\Phi(i, j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$ である．よって Φ によって 0_{p} と $\mathcal{F}$ は実効的分離不能である． □

4 関連する話題の紹介

これまでに議論してきた内容に関連する話題として，節 4.1 では理論の Lindenbaum 代数どうしの同型性に関する Pour-El and Kripke の定理について紹介する．また節 4.2 において解釈可能性の概念を定め，本質的決定不能性などを解釈可能性の尺度のもとで分析する．本節ではこれまでの節とは異なり $\mathcal{L}_A$ 以外の言語についても扱う．議論を単純にするために有限の言語のみを扱うとしておく．

4.1 理論の Lindenbaum 代数の同型性

まずは $\mathcal{L}$-理論の Lindenbaum 代数を定める．$\mathcal{L}$-文全体の集合を $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とかくとする．$\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ 上の 2 項関係 $\sim_T$ を

$$\varphi \sim_T \psi :\iff T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

として定めると，$\sim_T$ は明らかに $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ 上の同値関係である．文 φ を代表元とする同値類を $[\varphi]$ で表す．商集合 $L_T := \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}} / \sim_T$ 上に 2 項関係 $\leq_T$ を

$$[\varphi] \leq_T [\psi] :\iff T \vdash \psi \to \varphi$$

と定めると，これは well-defined であり，L_T 上の半順序であることが確認できる．更に半順序集合 $(L_T, \leq_T)$ は，T_{p} と T_{r} をそれぞれ最小元と最大元とする Boole 代数（全ての元が補元をもつ分配束）であることが示せる．このとき

- $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ （$[\varphi]$ と $[\psi]$ の下限）
- $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$ （$[\varphi]$ と $[\psi]$ の上限）
- $\overline{[\varphi]} = [\neg\varphi]$ （$[\varphi]$ の補元）

も成り立つ．この Boole 代数 $(L_T, \leq_T)$ を理論 T の **Lindenbaum 代数**という．

Boole 代数 $(B, \leq)$ について，その元 $a \in B$ が $(B, \leq)$ の**アトム**であるとは，a が最小元 $\mathbb{O}$ ではなく，$B \setminus \{\mathbb{O}\}$ において極小であることをいう．さて，Lindenbaum 代数のアトムに関して次のことが成立する．

命題 4.1. *$\mathcal{L}$-理論 T と $\mathcal{L}$-文 φ について，以下は同値である：*

1. *$[\varphi]$ は $(L_T, \leq_T)$ のアトムである．*
2. *$T + \neg\varphi$ は無矛盾かつ完全である．*

証明． $(1 \Rightarrow 2)$: $[\varphi]$ が $(L_T, \leq_T)$ のアトムであるとする．まず $[\varphi]$ は最小元 T_p とは異なるので，$T \nvdash \varphi$，すなわち $T + \neg\varphi$ は無矛盾である．いま $T + \neg\varphi \nvdash \neg\psi$ を満たす $\mathcal{L}$-文 ψ を任意にとり，$T + \neg\varphi \vdash \psi$ を示したい．このとき $T \nvdash \psi \to \varphi$ であり，更に $T \nvdash \varphi \vee \psi \to \varphi$ を得る．他方 $T \vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ なので，$[\varphi \vee \psi] <_T [\varphi]$ が得られた．$[\varphi]$ の極小性より $[\varphi \vee \psi]$ は最小元 T_p と等しい．すなわち $T \vdash \varphi \vee \psi$ である．これは $T + \neg\varphi \vdash \psi$ に他ならない．

$(2 \Rightarrow 1)$: $T + \neg\varphi$ が無矛盾かつ完全であるとする．このとき $T \nvdash \varphi$ なので $[\varphi]$ は最小元 T_p とは異なる．さて，$[\psi] <_T [\varphi]$ となる $\mathcal{L}$-文 ψ を任意にとり，$[\psi] = T_\mathsf{p}$，すなわち $T \vdash \psi$ であることを示したい．このとき $T \vdash \varphi \to \psi$ かつ $T \nvdash \psi \to \varphi$ であり，特に $T + \neg\varphi \nvdash \neg\psi$ である．$T + \neg\varphi$ の完全性より $T + \neg\varphi \vdash \psi$ を得る．したがって $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi \to \psi$ となるため，排中律より $T \vdash \psi$ が得られる． $\square$

この分析により，次の系が成立する．

系 4.2. *RE 理論 T が本質的不完全ならば，$(L_T, \leq_T)$ はアトムをもたない Boole 代数である．*

注意 4.3. 命題 4.1 から，特に $(L_T, \leq_T)$ がアトムをもたない Boole 代数であることは，「任意の $\mathcal{L}$-文 φ について，$T + \varphi$ が無矛盾ならば不完全」という弱い形の本質的不完全性と同値である．この性質は f-本質的不完全性と呼ばれている．Hanf [19] および Murwanashyaka, Pakhomov and Visser [30] によって，決定可能かつ f-本質的不完全である理論の存在が示されており，f-本質的不完全性は，本質的決定不能性すなわち本質的不完全性より真に弱い性質である．f-本質的不完全性の実効化については Pour-El [34], Jones [21], Kurahashi and Visser [25] において分析が行われている．

さて，次の事実が知られている．

事実 4.4 (Givant and Halmos [15, Chapter 16] を参照)**.** アトムを持たない可算無限濃度の Boole 代数は全て同型である．

ここから Lindenbaum 代数の同型性に関する次の系が得られる．

系 4.5. *RE 理論 T と U が共に本質的不完全ならば，Lindenbaum 代数 $(L_T, \leq_T)$ と $(L_U, \leq_U)$ は同型である．*

さて，ここで次の事実をみてみる．

事実 4.6 (Odifreddi [32, Corollary III.7.14 と Exercise III.7.15] を参照)**.**

1. A, B を創造的集合とすると，$\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 f が存在して，$f(A) = B$ となる（Myhill [31]）．
2. (A, B) と (C, D) を実効的分離不能な RE 集合の組たちとすると，$\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 f が存在して，$f(A) = C$ かつ $f(B) = D$ となる（Smullyan [42]）．

本質的不完全性の実効化である実効的本質的不完全性は，Pour-El の定理（定理 2.23）より実効的分離不能性および実効的本質的創造性と同値である．したがって実効的本質的不完全な RE 理論 T と U に対して，系 4.5 より $(L_T, \leq_T)$ と $(L_U, \leq_U)$ は同型であるが，他方 $(T_\mathsf{p}, T_\mathsf{r})$ と $(U_\mathsf{p}, U_\mathsf{r})$ に対して事実 4.6.(2) を適用して $f(T_\mathsf{p}) = U_\mathsf{p}$ かつ $f(T_\mathsf{r}) = U_\mathsf{r}$ を満たす計算可能な全単射 f をとることもできる．Pour-El and Kripke はこうした状況を組み合わせた，次の定理を証

明した．

定理 4.7 (Pour-El and Kripke [35])**.** $\mathcal{L}_0$-理論 T と $\mathcal{L}_1$-理論 U が共に RE かつ実効的分離不能ならば，計算可能な全単射 $f : \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_0} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}$ が存在して，次が成り立つ[*4]：

1. $f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ かつ $f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$.
2. f は命題結合子を保存する，つまり $f(\varphi \circ \psi) = f(\varphi) \circ f(\psi)$（$\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$）および $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

証明． 文 φ が**命題原子**であるとは，φ が原子文か φ の一番外側が量化記号であることをいう．どんな文も命題原子たちの Boole 結合で一意に表すことができることに注意．命題原子である $\mathcal{L}$-文全体の集合を $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}}$ とかくとする．

さて，いまから計算可能な全単射 $f : \mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_0} \to \mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_1}$ で "良い条件" を満たすものの存在を示すが，あとはこの f を $f(\varphi \circ \psi) := f(\varphi) \circ f(\psi)$（$\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$）および $f(\neg\varphi) := \neg f(\varphi)$ として $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_0}$ と $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}$ の間の全単射に拡張してやれば，計算可能性を保ったまま定理の項目 2 が自動的に満たされる．したがって "良い条件" によって項目 1 が満たされればよい．

さて，文 ρ に対して ρ^1 は ρ を，ρ^0 は $\neg\rho$ を表すとする（それぞれ真，偽に対応する）．まず $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_0}$ の要素を実効的に重複なしで $\xi_0, \xi_1, \ldots$ と並べておく．また $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_1}$ の要素を実効的に重複なしで $\eta_0, \eta_1, \ldots$ と並べておく．$\mathbb{N}$ 上の計算可能な全単射 p と q で，各 n と $s \in 2^n$ に対して

$$T + \bigwedge_{i<n} \xi^{s(i)}_{p(i)} \text{ が無矛盾} \iff U + \bigwedge_{i<n} \eta^{s(i)}_{q(i)} \text{ が無矛盾} \tag{4}$$

が成り立つものがとれたとする．このとき，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $f(\xi_{p(i)}) = \eta_{q(i)}$ と定めれば，f は $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_0}$ と $\mathrm{Sent}^A_{\mathcal{L}_1}$ の間の計算可能な全単射となる．そしてこの (4) が先述の "良い性質" である．実際，このとき $f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ および $f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$ が成り立つことは次のように示せる．まず，$f(T_{\mathsf{p}}) = U_{\mathsf{p}}$ は f が全単射であることから，

$$\text{任意の } \mathcal{L}_0\text{-文 } \varphi \text{ について，} T \vdash \varphi \iff U \vdash f(\varphi) \tag{5}$$

ということに他ならない．また，(5) が成立すれば，任意の $\mathcal{L}_0$-文 φ について，

$$T \vdash \neg\varphi \iff U \vdash f(\neg\varphi) \iff U \vdash \neg f(\varphi)$$

となり，$f(T_{\mathsf{r}}) = U_{\mathsf{r}}$ も成り立つ．したがって (4) を仮定して (5) を示せばよい．φ を任意の $\mathcal{L}_0$-文とすると，φ に含まれる全ての命題原子が $\xi_{p(0)}, \ldots, \xi_{p(n-1)}$ のいずれかであるような $n \in \mathbb{N}$ がとれる．いま φ は $\xi_{p(0)}, \ldots, \xi_{p(n-1)}$ を命題変数としてもつ命題論理式だと考えることができ，各 $s \in 2^n$ は $s(i) = 1$ のとき $\xi_{p(i)}$ に真を，$s(i) = 0$ のとき $\xi_{p(i)}$ に偽を割り当てる $\xi_{p(0)}, \ldots, \xi_{p(n-1)}$ への真理値割り当て V_s に対応する．命題論理における連言標準形定理の真理値表を用いた証明より，φ は $\displaystyle\bigwedge_{V_s(\varphi)\text{ は偽}} \big(\bigvee_{i<n} \neg\xi^{s(i)}_{p(i)}\big)$ と同値である．同じ変形を $f(\varphi)$ に対しても

[*4] これらの条件から，任意の $\mathcal{L}_0$-文 φ と ψ について $[\varphi] \leq_T [\psi] \iff [f(\varphi)] \leq_U [f(\psi)]$ が成り立つこともわかる．

施せば $f(\varphi)$ は $\displaystyle\bigwedge_{V_s(\varphi)\text{ は偽}}\big(\bigvee_{i<n}\neg\eta^{s(i)}_{q(i)}\big)$ と同値であることが分かる．このとき

$$\begin{aligned}
T\vdash\varphi &\iff T\vdash \bigwedge_{V_s(\varphi)\text{ は偽}}\big(\bigvee_{i<n}\neg\xi^{s(i)}_{p(i)}\big)\\
&\iff V_s(\varphi)\text{ が偽となる全ての } s\in 2^n \text{ について，} T\vdash\bigvee_{i<n}\neg\xi^{s(i)}_{p(i)}\\
&\iff V_s(\varphi)\text{ が偽となる全ての } s\in 2^n \text{ について，} T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)} \text{ は矛盾}\\
&\iff V_s(\varphi)\text{ が偽となる全ての } s\in 2^n \text{ について，} U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)} \text{ は矛盾}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{((4) より)}\\
&\iff V_s(\varphi)\text{ が偽となる全ての } s\in 2^n \text{ について，} U\vdash\bigvee_{i<n}\neg\eta^{s(i)}_{q(i)}\\
&\iff U\vdash f(\varphi)
\end{aligned}$$

となり，(5) が成立する．

では (4) を満たす計算可能な全単射 p, q をステップごとに定める．(4) を満たす $p(0),\dots,p(n-1)$ と $q(0),\dots,q(n-1)$ が既に定められているとして，n の偶奇に分けて往復論法で $p(n)$ と $q(n)$ の値を定める．すなわち，

- n が偶数の場合は $p(n)$ を $p(0),\dots,p(n-1)$ に現れない最小の自然数とし，$q(0),\dots,q(n-1)$ に現れない $q(n)$ をうまく定める．
- n が奇数の場合は $q(n)$ を $q(0),\dots,q(n-1)$ に現れない最小の自然数とし，$p(0),\dots,p(n-1)$ に現れない $p(n)$ をうまく定める．

これらによって p, q の全単射性が保証される．ここでは n が偶数の場合の $q(n)$ の定め方を述べるが，n が奇数の場合も同様に $p(n)$ を定めればよい．

n が偶数として，$p(n)$ を $p(0),\dots,p(n-1)$ に現れない最小の自然数とする．U は実効的分離不能なので，それによって得られる計算可能な関数を $\Phi_U(x,y)$ とする．ここで $\Phi_U(x,y)$ は $\mathbb{N}^2$ から $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_1}$ への全域関数としてよい[*5]．パラメータありの二重再帰定理（事実 3.11）を用いれば，計算可能な全域関数 $\Psi_0(x)$ と $\Psi_1(x)$ で，各 $s\in 2^n$ に対して

- $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)}=\begin{cases}\big(U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}\big)_{\mathsf{p}}\cup\{\Phi_U(\Psi_0(s),\Psi_1(s))\} & T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)}\vdash\neg\xi_{p(n)}\text{ のとき，}\\ \big(U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}\big)_{\mathsf{p}} & \text{それ以外のとき}\end{cases}$
- $\mathsf{W}_{\Psi_1(s)}=\begin{cases}\big(U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}\big)_{\mathsf{r}}\cup\{\Phi_U(\Psi_0(s),\Psi_1(s))\} & T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)}\vdash\xi_{p(n)}\text{ のとき，}\\ \big(U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}\big)_{\mathsf{r}} & \text{それ以外のとき}\end{cases}$

が成立するものが取れる．

各 $s\in 2^n$ と $d\in\{0,1\}$ について

$$T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)}\vdash\xi^d_{p(n)}\iff U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}\vdash\Phi_U(\Psi_0(s),\Psi_1(s))^d \tag{6}$$

が成り立つことを示す．まず n に対する (4) より $T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)}$ が矛盾することと $U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}$ が矛盾することは同値であり，このとき (6) は成立する．したがって $T+\bigwedge_{i<n}\xi^{s(i)}_{p(i)}$ も $U+\bigwedge_{i<n}\eta^{s(i)}_{q(i)}$ も無矛盾であるとしてよい．

[*5] Φ_U を次の計算可能関数で置き換えればよい：与えられた i と j に対して $\mathsf{W}_{i'}=\mathsf{W}_i\cup U_{\mathsf{p}}$ となる i' と $\mathsf{W}_{j'}=\mathsf{W}_j\cup U_{\mathsf{r}}$ となる j' を計算し，$\Phi_U(i',j')$ の計算と $\mathsf{W}_{i'}\cap\mathsf{W}_{j'}$ の要素の探索を同時に走らせる．$\Phi_U(i',j')$ が先に停止して $\mathcal{L}_1$-文を値として持てばそのまま $\Phi_U(i',j')$ を出力する．$\Phi_U(i',j')$ が $\mathcal{L}_1$-文ではないか，$\mathsf{W}_{i'}\cap\mathsf{W}_{j'}$ の要素が先に見つかる場合は $\forall x(x=x)$ を出力する．

- $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \vdash \xi_{p(n)}$ かつ $U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \nvdash \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$ と仮定して矛盾を導く．このとき $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)}$ の無矛盾性より $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \nvdash \neg\xi_{p(n)}$ であるから，
  - $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{p}}$
  - $\mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{r}} \cup \{\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))\}$

  である．$U_{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_0(s)}$ と $U_{\mathsf{r}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ は明らかで，$U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \nvdash \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$ より $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cap \mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \emptyset$ もいえる．したがって $\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \notin \mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cup \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ となりおかしい．
- $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \vdash \neg\xi_{p(n)}$ かつ $U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \nvdash \neg\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$ と仮定して矛盾を導く．いま $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \nvdash \xi_{p(n)}$ であるから，
  - $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{p}} \cup \{\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))\}$
  - $\mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{r}}$

  であり，$U_{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_0(s)}$ かつ $U_{\mathsf{r}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ かつ $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cap \mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \emptyset$ なので $\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \notin \mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cup \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ となりおかしい．
- あとは $T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)}$ において $\xi_{p(n)}$ が証明も反証もできなければ，$U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}$ において $\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$ が証明も反証もできないことを示せばよい．このとき
  - $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{p}}$
  - $\mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \big(U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)}\big)_{\mathsf{r}}$

  であり，$U_{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_0(s)}$ かつ $U_{\mathsf{r}} \subseteq \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ かつ $\mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cap \mathsf{W}_{\Psi_1(s)} = \emptyset$ なので $\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \notin \mathsf{W}_{\Psi_0(s)} \cup \mathsf{W}_{\Psi_1(s)}$ となり，よって成立する．

以上で (6) が示せた．ここで $\eta_{q(0)}, \ldots, \eta_{q(n-1)}$ と $\Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))$ $(s \in 2^n)$ に現れない最初の変数を v とすると，

$$\forall v \, \Big[\bigvee_{s \in 2^n} \Big(\bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \wedge \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \Big) \Big]$$

は命題原子 $\mathcal{L}_1$-文なので，ある j について η_j に等しく，このとき $q(n) := j$ と定める．異なる $s_0, s_1 \in 2^n$ について $\vdash \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s_0(i)} \to \neg \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s_1(i)}$ なので，各 $s \in 2^n$ について

$$U + \bigwedge_{i<n} \eta_{q(i)}^{s(i)} \vdash \eta_{q(n)} \leftrightarrow \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s)) \tag{7}$$

となる．このとき各 $d \in \{0, 1\}$ について

$$\begin{aligned}
T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} + \xi_{p(n)}^{d} \text{ は無矛盾} &\iff T + \bigwedge_{i<n} \xi_{p(i)}^{s(i)} \nvdash \xi_{p(n)}^{1-d} \\
&\iff U + \bigwedge_{i<n} \eta_{p(i)}^{s(i)} \nvdash \Phi_U(\Psi_0(s), \Psi_1(s))^{1-d} && ((6) \text{ より}) \\
&\iff U + \bigwedge_{i<n} \eta_{p(i)}^{s(i)} \nvdash \eta_{q(n)}^{1-d} && ((7) \text{ より}) \\
&\iff U + \bigwedge_{i<n} \eta_{p(i)}^{s(i)} + \eta_{q(n)}^{d} \text{ は無矛盾}
\end{aligned}$$

となり，$n+1$ に対する (4) が成立する．

以上で定理の証明が終了した． □

問題 4.8 (思いつく問題)**.** 強実効的分離不能な理論たちに対して，Pour-El and Kripke の定理のものよりも強い同型性が示せるか？

4.2　解釈可能性

定理 1.26 で示したように，関係記号 $\leq$ を論理式 $x \leq^{\dagger} y$ で置き換えることで，$\mathbf{R}_0$ において $\mathbf{R}$ を実現することができた．すなわち，$\mathbf{R}_0$ は $\mathbf{R}$ の真の部分理論であるが，他方で実質的に $\mathbf{R}$ を含んでいると考えることもできる．このような，定理全体の集合だけにとらわれない，理論が別の理論を実質的に含んでいることを分析するための概念である翻訳及び解釈可能性について扱う．まずは翻訳を定めるために論理式を扱いやすい形に変形する．

定義 4.9 (標準形)**.** $\mathcal{L}$ を任意の言語とする．$\mathcal{L}$-論理式が**標準形**であるとは，含まれる原子論理式がすべて次のいずれかであることをいう：

- 変数 x, y について $x = y$ という形,
- $\mathcal{L}$ の各定数記号 c に対して，$c = x$ という形,
- $\mathcal{L}$ の各関数記号 f と変数 $\vec{x}, y$ に対して，$f(\vec{x}) = y$ という形,
- $\mathcal{L}$ の各関係記号 r と変数 $\vec{x}$ に対して，$r(\vec{x})$ という形.

明らかに次が成り立つ．

命題 4.10. $\mathcal{L}$ を任意の言語とすると，任意の $\mathcal{L}$-論理式 φ は，ある標準形の $\mathcal{L}$-論理式 φ^* と述語論理上で同値である．

証明. 標準形の定義より，任意の原子 $\mathcal{L}$-論理式 φ に対して，述語論理上で同値な標準形の論理式 φ^* を定めればよい．まずは $t_1 = t_2$ という原子論理式は $\exists x\,(t_1 = x \wedge t_2 = x)$ という形に変形して，$t = x$ という形のみを考えればよいようにする．そして例えば f が n 変数関数記号のとき，$f(t_1, \ldots, t_n) = x$ を

$$\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1} \left((\bigwedge_{i<n} t_i = v_i) \wedge f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = x \right)$$

のように量化記号 $\exists$ を用いて変形していけばよい．　$\square$

定義 4.11 (翻訳)**.** $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ を任意の言語とする．$\mathcal{L}_0$ の標準形の論理式から $\mathcal{L}_1$ の論理式への写像 τ が $\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の**翻訳（translation）**であるとは,

- 1 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $d_\tau(x)$
- $\mathcal{L}_0$ の各定数記号 c に対する 1 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $\eta_c(x)$
- $\mathcal{L}_0$ の各 n 変数関数記号 f に対する $n+1$ 変数 $\mathcal{L}_1$-論理式 $\eta_f(\vec{x}, y)$
- $\mathcal{L}_0$ の各 n 変数関係記号 r に対する n 変数論理式 $\eta_r(\vec{x})$

が存在して，次の条件を満たすことをいう：

1. $\tau(x = y)$ は $x = y$
2. $\mathcal{L}_0$ の各定数記号 c に対して，$\tau(c = x)$ は $\eta_c(x)$
3. $\mathcal{L}_0$ の各関数記号 f に対して，$\tau(f(\vec{x}) = y)$ は $\eta_f(\vec{x}, y)$
4. $\mathcal{L}_0$ の各関係記号 $r(\vec{x})$ に対して，$\tau(r(\vec{x}))$ は $\eta_r(\vec{x})$
5. $\tau(\neg\varphi)$ は $\neg\tau(\varphi)$
6. $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ について $\tau(\varphi \circ \psi)$ は $\tau(\varphi) \circ \tau(\psi)$
7. $\tau(\exists x \varphi(x))$ は $\exists x\,\big(d_\tau(x) \wedge \tau(\varphi(x))\big)$
8. $\tau(\forall x \varphi(x))$ は $\forall x\,\big(d_\tau(x) \rightarrow \tau(\varphi(x))\big)$.

$\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳の定義域は標準形の $\mathcal{L}_0$-論理式全体の集合であったが，各 $\mathcal{L}_0$-論理式 φ に対して命題 4.10 によって述語論理上で同値な標準形の $\mathcal{L}_0$-論理式 φ^* がとれたので，$\tau(\varphi)$ を

$\tau(\varphi^*)$ と定めることで τ の定義域を $\mathcal{L}_0$-論理式全体の集合に拡張することができる．以降ではこのように定義域を拡張した写像を翻訳ということにする．定義から分かるように，$\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳 τ は，$\mathcal{L}_1$-論理式 $d_\tau(x)$ および $\mathcal{L}_0$ の各記号 s に対して $\mathcal{L}_1$-論理式 $\eta_s(\vec{x})$ を定めることによって一意に定まる．

定義 4.12 (解釈可能性)**.** $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ を任意の言語とし，T を $\mathcal{L}_0$-理論，S を $\mathcal{L}_1$-理論とする．

1. $\mathcal{L}_1$ における $\mathcal{L}_0$ の翻訳 τ が S における T の解釈であるとは，任意の $\mathcal{L}_0$-文 φ に対して，

$$T \vdash \varphi \Rightarrow S \vdash \tau(\varphi)$$

   が成り立つことをいう．また，このとき $\tau : T \lhd S$ もしくは $\tau : S \rhd T$ とかく．
2. T が S において**解釈可能（interpretable）**であるとは，S における T の解釈が存在することをいう．またこのとき $T \lhd S$ もしくは $S \rhd T$ とかく．

例えば同じ言語の理論 T が S の部分理論であれば，何も変えない翻訳 τ，すなわち $d_\tau(x)$ を $x = x$ でとり，$\tau(c = x)$ と $\tau(f(\vec{x} = y))$ と $\tau(r(\vec{x}))$ をそれぞれ $c = x$ と $f(\vec{x}) = y$ と $r(\vec{x})$ とする翻訳 τ によって $S \rhd T$ である．したがって $\mathbf{PA} \rhd \mathbf{Q} \rhd \mathbf{R} \rhd \mathbf{R}_0$ である．また定理 1.26 は $\mathbf{R}_0 \rhd \mathbf{R}$ であることを述べている．他方，次が成立する．

命題 4.13.

1. $\mathbf{R} \not\rhd \mathbf{Q}$.
2. $\mathbf{Q} \not\rhd \mathbf{PA}$.

証明. これらの証明には解釈可能性や算術に関する予備知識が必要であるが，せっかくなので述べておくことにする．

1. $\mathbf{R} \rhd \mathbf{Q}$ であったとすると，$\mathbf{Q}$ は有限公理化されているので，$\mathbf{R}$ の有限部分理論 T が存在して $T \rhd \mathbf{Q}$ となる．命題 1.7.(1) より T は有限モデルをもつので，$T \rhd \mathbf{Q}$ を用いて $\mathbf{Q}$ の有限モデル M をとることができる．$\mathbf{Q} \vdash \mathbf{R}$ なので M は $\mathbf{R}$ のモデルでもある．しかしこれは $\mathbf{R}$ が有限モデルを持たないという命題 1.7.(2) に反する．

2. まず $\mathbf{PA} \rhd \mathbf{Q}$ とすると，うまく $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ がとれて $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ が成り立つ（Feferman [14]）．$\mathbf{PA}$ はその任意の有限部分理論の無矛盾性を証明できることが知られており（Mostowski [27]），$\mathbf{Q}$ は $\mathbf{PA}$ の有限部分理論なので，$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{Q}}$ である．このとき $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ となるが，これは第 2 不完全性定理に反する． □

これらの状況から，解釈可能性の意味で $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_0$ は同等の強さを持つが，$\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ よりも，$\mathbf{PA}$ は $\mathbf{Q}$ よりも真に強い理論であることが分かる．更に $\mathbf{R}_0$ の部分理論で $\mathbf{R}_0$ を解釈できる理論も存在する．例えば公理図式 R1 を $\mathbf{R}_0$ から除くことで得られる理論 $\mathbf{R}_1$ は $\mathbf{R}_0$ を解釈できる．以下，これを示そう．言語 $\mathcal{L}_A$ から $+$ を除くことで得られる言語を $\mathcal{L}_\times$ とする．すなわち $\mathcal{L}_\times = \{0, \mathsf{s}, \times, \leq\}$ である．

定義 4.14 (理論 $\mathbf{R}_1$)**.** 次の公理図式からなる $\mathcal{L}_\times$-理論を $\mathbf{R}_1$ という：

R2 $\overline{m} \times \overline{n} = \overline{m \times n}$ $\quad (m, n \in \mathbb{N})$
R3 $\overline{m} \neq \overline{n}$ $\quad (m \neq n$ となる $m, n \in \mathbb{N})$
R4 $\forall x \left(x \leq \overline{n} \to \bigvee_{k \leq n} x = \overline{k}\right)$ $\quad (n \in \mathbb{N})$
R6 $\overline{m} \leq \overline{n}$ $\quad (m \leq n$ となる $m, n \in \mathbb{N})$

理論 $\mathbf{R}_1$ は $\mathbf{R}_0$ から加法に関する公理図式を除いただけなので，$\mathcal{L}_\times$-文に関する Σ_1-完全性定理が成立することは容易に確認できる．

定理 4.15 ($\mathbf{R}_1$ の Σ_1-完全性定理)**.** 任意の $\mathcal{L}_\times$-文 φ について，φ が Σ_1 文で $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi$ である．

定理 4.16 (Jones and Shepherdson [22])**.** $\mathbf{R}_1 \rhd \mathbf{R}_0$ である．

証明. 次の 2 条件を満たす論理式 $\psi(x, y, z)$ の存在を示す：
- 各 $m, n \in \mathbb{N}$ について $\mathbf{R}_1 \vdash \psi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{m+n})$. （公理図式 R1 に対応）
- $\mathbf{R}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! u\, \psi(x, y, u)$. （関数記号の解釈であること）

このとき $x + y = z$ を論理式 $\psi(x, y, z)$ で翻訳すれば，$\mathbf{R}_1 \rhd \mathbf{R}_0$ が成り立つことが分かる．

方程式 $(xz+1)(yz+1) = (xy+1)z^2+1$ を z について解けば $z = 0$ もしくは $z = x + y$ である（Robinson [37] による）．この事実のもと，$\mathcal{L}_\times$-論理式 $\varphi(x, y, z)$ を

$$(z = \overline{0} \leftrightarrow x = \overline{0} \wedge y = \overline{0}) \wedge z \leq \mathsf{s}(x) \times \mathsf{s}(y) \wedge \mathsf{s}(x \times z) \times \mathsf{s}(y \times z) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x \times y) \times (z \times z))$$

と定める．φ は量化記号を含まない論理式である．

$m, n \in \mathbb{N}$ について，上記の方程式のことを考慮すれば $\mathbb{N} \models \varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{m+n})$ なので，Σ_1-完全性より $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{m+n})$ である．更に

$$\mathbf{R}_1 \vdash \forall v(\varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v = \overline{m+n})$$

となることを示す．$m = n = 0$ のとき，$\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v = \overline{0}$ なので成り立つ．$m \neq 0$ または $n \neq 0$ のとき，公理図式 R3 より $\mathbf{R}_1 \vdash \overline{m} \neq \overline{0} \vee \overline{n} \neq \overline{0}$ なので，$\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v \neq \overline{0}$ である．また $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v \leq \overline{m+1} \times \overline{n+1}$ なので，公理図式 R2 より $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v \leq \overline{(m+1)(n+1)}$ であり，公理図式 R4 より $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to \bigvee_{0<i<(m+1)(n+1)} v = \overline{i}$ を得る．ここで各 $i \in \mathbb{N}$ について $i \neq 0$ かつ $i \neq m + n$ であれば i は上述の方程式の解ではないので，特に $\mathbb{N} \models \neg\varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{i})$ である．Σ_1-完全性より $\mathbf{R}_1 \vdash \neg\varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{i})$，すなわち $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v \neq \overline{i}$ である．したがって $\mathbf{R}_1 \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n}, v) \to v = \overline{m+n}$ が得られた．以上より，φ は $\mathbf{R}_1$ において加法を表現することが示せた．特に任意の $m, n \in \mathbb{N}$ について $\mathbf{R}_1 \vdash \exists! u\, \varphi(\overline{m}, \overline{n}, u)$ である．

最後に論理式 $\psi(x, y, z)$ を

$$\big(\varphi(x, y, z) \wedge \exists! u\, \varphi(x, y, u)\big) \vee \big(z = 0 \wedge \neg\exists! u\, \varphi(x, y, u)\big)$$

と定める．

$$\mathbf{R}_1 \vdash \exists! u\, \varphi(x, y, u) \to \forall z \,\big(\psi(x, y, z) \leftrightarrow \varphi(x, y, z)\big) \tag{8}$$

であり，各 $m, n \in \mathbb{N}$ について $\mathbf{R}_1 \vdash \forall z\, \big(\psi(\overline{m}, \overline{n}, z) \leftrightarrow \varphi(\overline{m}, \overline{n}, z)\big)$ となる．したがって，ψ に対する公理図式 R1 である $\mathbf{R}_1 \vdash \psi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{m+n})$ が成立する．更に，(8) より $\mathbf{R}_1 \vdash \exists! u\, \varphi(x, y, u) \to \exists! u\, \psi(x, y, u)$ である．一方 $\mathbf{R}_1 \vdash \neg\exists! u\, \varphi(x, y, u) \to \forall z(\psi(x, y, z) \leftrightarrow z = \overline{0})$ なので，$\mathbf{R}_1 \vdash \neg\exists! u\, \varphi(x, y, u) \to \exists! u\, \psi(x, y, u)$ もいえる．以上より $\mathbf{R}_1 \vdash \forall x \forall y \exists! u\, \psi(x, y, u)$ が示せた． □

さて，解釈可能性は本質的決定不能性の分析に非常に役立つことが知られている．

命題 4.17 (Tarski, Mostowski and Robinson [47])**.** T と S を理論とする．T が本質的決定不能かつ $S \rhd T$ ならば，S も本質的決定不能である．

証明. $\tau : S \rhd T$ で，T の言語を $\mathcal{L}_T$ とする．U を S の任意の無矛盾な拡大理論とする．このとき $\mathcal{L}_T$-理論 U' を

$$U' = \{\varphi \mid U \vdash \tau(\varphi)\ \&\ \varphi \text{ は } \mathcal{L}_T\text{-文}\}$$

と定める．まず $\varphi \in T$ ならば $S \vdash \tau(\varphi)$ なので，$U \vdash \tau(\varphi)$ であり，$\varphi \in U'$ である．したがって U' は T の拡大理論である．続いて，任意の $\mathcal{L}_T$-文 φ について

$$U' \vdash \varphi \iff U \vdash \tau(\varphi) \tag{9}$$

が成り立つことを確かめる．

- ($\Rightarrow$): $U' \vdash \varphi$ ならば，ある $\mathcal{L}_T$-文 $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1} \in U'$ について $T \vdash \psi_0 \land \cdots \land \psi_{k-1} \to \varphi$ となる．U' の定め方より $U \vdash \tau(\psi_0) \land \cdots \land \tau(\psi_{k-1})$ であり，また $S \rhd T$ より $S \vdash \tau(\psi_0) \land \cdots \land \tau(\psi_{k-1}) \to \tau(\varphi)$ であるから，$U \vdash \tau(\varphi)$ が成り立つ．
- ($\Leftarrow$): $U \vdash \tau(\varphi)$ ならば $\varphi \in U'$ なので $U' \vdash \varphi$ である．

特に U の無矛盾性より U' は無矛盾となるため，T の本質的決定不能性より U' は決定不能である．したがって (9) より U もまた決定不能である．以上より S は本質的決定不能である． □

系 4.18 (Jones and Shepherdson [22])**.** 理論 $\mathbf{R}_1$ は本質的決定不能である．

では，$\mathbf{R}_0$ を解釈可能ではないような理論で本質的決定不能なものが存在するだろうか．この問題には肯定的な解答が得られている．

定理 4.19 (Vaught [50]; Jeřábek [20]; Cheng [4, 5])**.** $\mathbf{R}_0 \rhd T$ だが $T \not\rhd \mathbf{R}_0$ であるような *RE* 理論 T で，本質的決定不能であるものが存在する．

更にこの結果を強めた次の定理，すなわち本質的決定不能な無矛盾 RE 理論の中には解釈可能性の意味で極小であるものが存在しないことが最近証明された．

定理 4.20 (Murwanashyaka, Pakhomov and Visser [30])**.** T を任意の本質的決定不能な *RE* 理論とすると，本質的決定不能な *RE* 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

実効的分離不能性と本質的遺伝的決定不能性に対しても同様の結果が得られている．

定理 4.21 (Cheng [6])**.** T を任意の実効的分離不能な *RE* 理論とすると，実効的分離不能な *RE* 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

定理 4.22 (Visser [52])**.** T を任意の本質的遺伝的決定不能な *RE* 理論とすると，本質的遺伝的決定不能な *RE* 理論 S が存在して，$T \rhd S$ かつ $S \not\rhd T$ が成り立つ．

問題 4.23 (思いつく問題)**.** 強実効的分離不能な理論たちの中に，解釈可能性に関して極小な理論は存在するか？

Murwanashyaka, Pakhomov and Visser の定理のバリエーションである次の定理の証明を紹介して本稿を締めくくる．

定理 4.24. $\mathcal{L}_A$-理論 T が本質的決定不能かつ有限ならば，本質決定不能かつ有限である $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$T \vdash S$ かつ $S \not\rhd T$ となる．

証明. $\mathcal{L}_A$-理論 T は本質的決定不能かつ有限であるとする．いま T の有限性により $x \rhd T$ という $\mathcal{L}_A$-論理式が Σ_1 でとれる．不動点定理より，$\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow (\ulcorner \sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner \rhd T)$ を満たす Σ_1 文 σ がとれる．

いま $\mathbb{N} \models \sigma$ とすれば定理 3.20.(1) より $\mathbf{R}_0 \vdash \sigma^{\mathrm{cert}}$ であり，命題 1.7.(2) より σ^{cert} は有限モデル M をもつ．M で正しい $\mathcal{L}_A$-文全体の集合 $\mathrm{Th}(M)$ は σ^{cert} の無矛盾かつ完全な拡大理論であり，更に M の有限性より $\mathrm{Th}(M)$ は再帰的である．つまり σ^{cert} は本質的決定不能ではない．命題 4.17 より $\sigma^{\mathrm{cert}} \not\rhd T$ であり，つまり $\mathbb{N} \models \neg(\ulcorner \sigma^{\mathrm{cert}} \urcorner \rhd T)$ なので，σ の取り方より $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ となり矛盾する．

したがって $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ である．定理 3.20.(2) より $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ となる．$\mathbf{R}_0$ の本質的決定不能性より σ^{cert} も本質的決定不能である．σ^{cert} は有限なので，命題 3.3 より本質的遺伝的決定不能である．

ここで，$\mathcal{L}_A$-理論 S を $\{\varphi \vee \sigma^{\mathrm{cert}} \mid \varphi \in T\}$ と定めると，S は有限理論であり，$T \vdash S$ かつ $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash S$ が成り立つ．さて，S の本質的決定不能性を示すために，U を S の任意の無矛盾な拡大理論とする．

- $U \vdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ ならば $U \vdash T$ なので，T の本質的決定不能性より U は決定不能である．
- $U \nvdash \neg\sigma^{\mathrm{cert}}$ ならば $\sigma^{\mathrm{cert}} + U$ は無矛盾なので，σ^{cert} の本質的遺伝的決定不能性より U は決定不能である．

いずれにせよ U は決定不能なので，S は本質的決定不能である．

最後に $S \rhd T$ であると仮定すると，$\sigma^{\mathrm{cert}} \rhd T$ となるが，σ の取り方から $\mathbb{N} \models \sigma$ となるためにおかしい．したがって $S \not\rhd T$ である． □

定理 4.24 において，もし $T \vdash \mathbf{R}_0$ であれば，証明における σ^{cert} について $\sigma^{\mathrm{cert}} \vdash \mathbf{R}_0$ なので $S \vdash \mathbf{R}_0$ が成立する．また，$S \vdash \mathbf{R}_0$ となる有限理論 S について，命題 4.13.(1) と同じ理由で $\mathbf{R}_0 \not\rhd S$ となる．すなわち，次の系を得る．

系 4.25 (Visser [51])**.** $\mathcal{L}_A$-理論 T が本質的決定不能かつ有限かつ $T \vdash \mathbf{R}_0$ とすると，本質決定不能かつ有限である $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$T \vdash S \vdash \mathbf{R}_0$ かつ $S \not\rhd T$ かつ $\mathbf{R}_0 \not\rhd S$ となる．

例えば $\mathbf{R}_0$ と $\mathbf{Q}$ の間には解釈可能性の意味で真に異なる部分理論が稠密に存在することも知られている．

参考文献

[1] George Boolos. *The logic of provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Rudolf Carnap. Logische Syntax der Sprache. Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung Bd. 8. Wien: J. Springer. 247 S. (1934)., 1934.

[3] Yong Cheng. Effective inseparability and some applications in meta-mathematics. *Journal of Logic and Computation.*

[4] Yong Cheng. Finding the limit of incompleteness I. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 26(3-4):268–286, 2020.

[5] Yong Cheng. Finding the limit of incompleteness II. *arXiv*, 2021. arXiv:2110.12233.

[6] Yong Cheng. There are no minimal effectively inseparable theories. *Journal of Logic and Computation*, 2022. arXiv:2211.06190.

[7] Alonzo Church. An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*, 58(2):345–363, 1936.

[8] Alan Cobham. A method for establishing undecidability (abstract). volume 9, page 406, 1962.

[9] Alan Cobham. Some remarks concerning theories with recursively enumerable complements. *The Journal of Symbolic Logic*, 28:72–74, 1963.

[10] William Craig. On axiomatizability within a system. *The Journal of Symbolic Logic*, 18:30–32, 1953.

[11] Andrzej Ehrenfeucht. Two theories with axioms built by means of pleonasms. *The Journal of Symbolic Logic*, 22:36–38, 1957.

[12] Andrzej Ehrenfeucht. Separable theories. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques*, 9(1):17–19, 1961.

[13] Solomon Feferman. Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 22(2):161–175, 1957.

[14] Solomon Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, 49:35–92, 1960/61.

[15] Steven Givant and Paul Halmos. *Introduction to Boolean algebras*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2009.

[16] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[17] A. Grzegorczyk, A. Mostowski, and C. Ryll-Nardzewski. The classical and the ω-complete arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 23:188–206, 1958.

[18] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[19] William Hanf. Model-theoretic methods in the study of elementary logic. In *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*, pages 132–145. North-Holland, Amsterdam, 1965.

[20] Emil Jeřábek. Recursive functions and existentially closed structures. *Journal of Mathematical Logic*, 20(1):52, 2020. Id/No 2050002.

[21] James P. Jones. Effectively retractable theories and degrees of undecidability. *The Journal of Symbolic Logic*, 34:597–604, 1969.

[22] James P. Jones and John C. Shepherdson. Variants of Robinson's essentially undecidable theory R. *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 23:61–64, 1983.

[23] Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi. Generalizations of Gödel's incompleteness theorems for Σ_n-definable theories of arithmetic. *The Review of Symbolic Logic*, 10(4):603–616, 2017.

[24] Taishi Kurahashi and Albert Visser. Certified Σ_1-sentences. 2023. arXiv:2306.13049.

[25] Taishi Kurahashi and Albert Visser. Pour-El's landscape. 2023. arXiv:2310.04814.

[26] Per Lindström. *Aspects of incompleteness.*, volume 10 of *Lecture Notes in Logic*. Natick, MA: Association for Symbolic Logic, 2nd ed. edition, 2003.

[27] Andrzej Mostowski. On models of axiomatic systems. 39:133–158 (1953), 1952.

[28] Andrzej Mostowski. A generalization of the incompleteness theorem. *Fundamenta Mathematicae*, 49:205–232, 1961.

[29] Andrzej Mostowski and Alfred Tarski. Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings (abstract). *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1):76, 1949.

[30] Juvenal Murwanashyaka, Fedor Pakhomov, and Albert Visser. There are no minimal essentially undecidable theories. *Journal of Logic and Computation*, 2023.

[31] John Myhill. Creative sets. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1(2):97–108, 1955.

[32] Piergiorgio Odifreddi. *Classical recursion theory*, volume 125 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. The theory of functions and sets of natural numbers, With a foreword by G. E. Sacks.

[33] Emil L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision

problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50:284–316, 1944.

[34] Marian Boykan Pour-El. Effectively extensible theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 33(1):56–68, 1968.

[35] Marian Boykan Pour-El and Saul Kripke. Deduction-preserving "Recursive Isomorphisms" between theories. *Fundamenta Mathematicæ*, 61:141–163, 1967.

[36] Hilary Putnam. Decidability and essential undecidability. *The Journal of Symbolic Logic*, 22:39–54, 1957.

[37] Julia Robinson. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 14:98–114, 1949.

[38] Raphael M. Robinson. An essentially undecidable axiom system (abstract). In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950*, volume 1, pages 729–730. American Mathematical Society, 1952.

[39] Barkley Rosser. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[40] Raymond M. Smullyan. Undecidability and recursive inseparability. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 4:143–147, 1958.

[41] Raymond M. Smullyan. Theories with effectively inseparable nuclei. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 6:219–224, 1960.

[42] Raymond M. Smullyan. *Theory of formal systems*, volume No. 47 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1961.

[43] Raymond M. Smullyan. Creativity and effective inseparability. *Transactions of the American Mathematical Society*, 109:135–145, 1963.

[44] Raymond M. Smullyan. *Recursion theory for metamathematics*, volume 22 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[45] Robert I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. A study of computable functions and computably generated sets.

[46] V. Švejdar. Weak theories and essential incompleteness. In *The Logica Yearbook 2007*, pages 213–224. Filosofia, Prague, 2008.

[47] Alfred Tarski, Andrzej Mostowski, and Raphael M. Robinson. *Undecidable theories*. Elsevier, Amsterdam, 1953.

[48] Boris A. Trachtenbrot. Über die rekursive Trennbarkeit. *Doklady Akademii Nauk SSSR. Novaya Seriya*, 88:953–956, 1953.

[49] A. M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series*, 42(3):230–265, 1936.

[50] Robert L. Vaught. On a theorem of Cobham concerning undecidable theories. Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1960 Int. Congr. 14-25 (1962)., 1962.

[51] Albert Visser. On Q. *Soft Computing*, 21(1):39–56, 2017.

[52] Albert Visser. Essential hereditary undecidability. 2022. arXiv:2212.03565.

[53] 田中 一之. **数学基礎論序説－数の体系への論理的アプローチ－**. 裳華房, 2019.

[54] 倉橋 太志. 不完全性定理の数学的発展. **数学**, 73(1):60–87, 2021.