

第 1 不完全性定理の拡張と証明可能性論理

倉橋 太志 (神戸大学システム情報学研究科)

2026 年 3 月 29 日 10:30-12:00

第 80 回 ENCOUNTERwithMATHEMATICS

ゲーデルの不完全性定理をめぐって

-ヒルベルトのプログラムから竹内の基本予想まで-

今回のテーマ

今回は次の 3 つの話題を扱う。

① 第 1 不完全性定理と決定不能性：

第 1 不完全性定理は理論の決定不能性と深く関わっている。

この観点を切り口に、第 1 不完全性定理の拡張に関するいくつかの結果を紹介する。

② 証明可能性の様相論理：

証明可能性述語の性質を分析する様相論理 GL とその基本的な結果を紹介する。

③ 第 2 不完全性定理と無矛盾性の定式化：

無矛盾性の定式化の違いによる第 2 不完全性定理のバリエーションに関する分析を紹介する。

- 1 第 1 不完全性定理と決定不能性
- 2 証明可能性の様相論理
- 3 第 2 不完全性定理と無矛盾性の定式化

再帰的関数

原始再帰的関数の定義に「 μ 最小化」を加えることで再帰的関数が得られる。

定義 (μ 最小化)

自然数上の $n + 1$ 変数関数 g が $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ を満たすとする。このとき、 k_1, \dots, k_n について、 $g(k_1, \dots, k_n, m) = 0$ を満たす最小の m を $\mu y (g(k_1, \dots, k_n, y) = 0)$ と表す。
 $\mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ は g から μ 最小化で得られる n 変数関数。

定義 (再帰的関数)

後者関数、ゼロ関数、射影関数から、合成と原始再帰と μ 最小化を適用することで得られる関数を再帰的関数という。

定義 (再帰的關係)

自然数上の n 項関係 R が再帰的： $\iff R$ の特徴関数 χ_R が再帰的。

自然数上の関数 f が再帰的であることと f を計算するチューリングマシンが存在することは同値。

この意味で、再帰的関数 (関係) は計算可能関数 (関係) とも呼ばれる。

決定可能性と決定不能性

定義

理論 T に対して, $\text{Th}(T) := \{\varphi \mid T \vdash \varphi \text{ かつ } \varphi \text{ は文}\}$.

$T \subseteq \text{Th}(T)$ であり, T が再帰的であっても $\text{Th}(T)$ が再帰的とは限らない.

定義

理論 T が**決定可能**であるとは, $\text{Th}(T)$ が再帰的集合であることをいう.
つまり与えられた文が T の定理かどうかを判定する計算可能な手続きが存在すること.

T が決定可能でないとき, T は**決定不能**であるという.

理論の決定不能性と不完全性

命題

無矛盾かつ再帰的な理論 T が決定不能ならば、 T は不完全。

証明

無矛盾かつ再帰的な理論 T が完全であるとする。

与えられた文 φ について、 T における φ の証明か $\neg\varphi$ の証明がある。

T が再帰的なので、 T における証明の探索をする計算可能な手続きがある。

φ の証明が見つかれば $\varphi \in \text{Th}(T)$ で、 $\neg\varphi$ の証明が見つかれば T の無矛盾性より

$\varphi \notin \text{Th}(T)$ なので $\text{Th}(T)$ は再帰的。

よって T は決定可能。 □

- 逆は一般には成り立たない。
- 不完全だが決定可能な理論や、完全だが決定不能な理論も存在する。

本質的不完全性と本質的決定不能性

第 1 不完全性定理は拡大理論に対する不完全性を主張する。

定義

理論 T に対して：

- ① T は**本質的不完全**： $\iff T$ の任意の無矛盾かつ再帰的な拡大理論が不完全。
- ② T は**本質的決定不能**： $\iff T$ の任意の無矛盾な拡大理論が決定不能。

定理

任意の理論 T について、次は同値：

- ① T は本質的不完全。
- ② T は本質的決定不能。

証明の概略

(1 \Rightarrow 2)：対偶を示す。

無矛盾で決定可能な拡大理論 U があると仮定すれば、無矛盾性と決定可能性を保ったまま文を順に加えていくことで、 T の無矛盾、完全、再帰的な拡大理論を構成できる。これは T の本質的不完全性に反する。

(2 \Rightarrow 1)：先ほどの命題より。

Q の本質的不完全性

定義 (ロビンソン算術 Q) 【再掲】

ロビンソン算術 Q は次の公理 Q1~Q8 からなる \mathcal{L}_A -理論.

$$\text{Q1} \quad \forall x (s(x) \neq 0)$$

$$\text{Q3} \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = s(y)))$$

$$\text{Q5} \quad \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\text{Q7} \quad \forall x \forall y (x \times s(y) = x \times y + x)$$

$$\text{Q2} \quad \forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\text{Q4} \quad \forall x (x + 0 = x)$$

$$\text{Q6} \quad \forall x (x \times 0 = 0)$$

$$\text{Q8} \quad \forall x \forall y (x \leq y \leftrightarrow \exists z (z + x = y))$$

定理 (第 1 不完全性定理の一つの形)

Q は本質的不完全.

系

Q は本質的決定不能.

Q の本質的不完全性の強化

Q は有限個の公理からなるので、次が成立する。

定理 (Tarski, Mostowski, and Robinson, 1953)

理論 T について、 $T \cup Q$ が無矛盾ならば T は決定不能。

証明

$T \cup Q$ が無矛盾ならば Q の本質的決定不能性より $T \cup Q$ は決定不能。
演繹定理より

$$T \cup Q \vdash \varphi \iff T \vdash \bigwedge Q \rightarrow \varphi.$$

T が決定可能ならば $T \cup Q$ も決定可能。 □

系

\mathcal{L}_A の述語論理は決定不能。

弱い算術の理論 R

定義 (理論 R)

理論 R は次の公理からなる \mathcal{L}_A -理論：自然数 m, n について,

$$\mathbf{R1} \quad \overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$$

$$\mathbf{R2} \quad \overline{m \times n} = \overline{m} \times \overline{n}$$

$$\mathbf{R3} \quad \overline{m} \neq \overline{n} \text{ (ただし } m \neq n \text{)}$$

$$\mathbf{R4} \quad \forall x(x \leq \overline{n} \rightarrow (x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}))$$

$$\mathbf{R5} \quad \forall x(x \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq x)$$

- R は Q より真に弱い.
- Q のときとほぼ同じ証明で次が得られる.

定理 (Tarski, Mostowski, and Robinson, 1953)

R は本質的決定不能.

弱い算術の理論 R

R は有限公理化可能ではないので、次は非自明.

定理 (Cobham, 1957?)

理論 T について, $T \cup R$ が無矛盾ならば T は決定不能.

- 残念ながら Cobham は証明を残していない.
- 次の Vaught の定理から Cobham の定理が従うが, 残念ながら Vaught も証明を残していない.

定理 (Vaught, 1962)

再帰的理論 T について, $T \cup R$ が無矛盾ならば, 有限理論 S が存在して, $S \vdash R$ かつ $T \cup S$ は無矛盾.

- 最近 R 周辺の分析が進み, 証明が再発見できた.
- 次は第 1 不完全性定理の拡張形のうち現時点で最も強い主張.

定理 (Kurahashi and Visser, 2026)

Vaught の定理における S を T から具体的に計算する手続きがある.

- ① 第 1 不完全性定理と決定不能性
- ② 証明可能性の様相論理
- ③ 第 2 不完全性定理と無矛盾性の定式化

Pr_T(x) に関する証明できる原理

次の導出可能性条件は、第 2 不完全性定理のために十分な条件として Löb によって提示されたもの。

導出可能性条件

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

- これらは T が Pr_T(x) に関して証明できる原理。
- Löb の定理の形式化もそのような原理の一つ。

定理 (形式化された Löb の定理)

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

問

これら以外にあるか？

Pr_T(x) に関する証明できる原理

次の導出可能性条件は、第 2 不完全性定理のために十分な条件として Löb によって提示されたもの。

導出可能性条件

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

- これらは T が $\text{Pr}_T(x)$ に関して証明できる原理。
- Löb の定理の形式化もそのような原理の一つ。

定理 (形式化された Löb の定理)

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

問

これら以外にあるか？

答え

本質的に新しいものは「ない」ことが様相論理を用いて証明できる。

様相論理 GL

- 数学における「証明可能性」は、命題の正しさの必然性を与えるという意味で、一種の様相概念だと考えられる。
- 様相命題論理の言語は古典命題論理の言語に 1 変数論理演算子 \Box を加えたもの。
- 導出可能性条件と形式化された Löb の定理に対応する公理を用いて、証明可能性の様相論理 GL (Gödel–Löb) が得られる。

GL の公理と推論規則

公理：

- 命題論理の論理公理
- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$

推論規則：

- モダス・ポネンス $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- ネセシテーション $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$

T-解釈

様相論理と形式的算術を結びつけるために、様相論理式の算術的解釈を導入する。

定義（変換, T-解釈）

各命題変数を算術の文に写す写像 f を**変換**という。

この f を、様相論理式を算術の文に写す写像 f_T に次のように拡張する：

$$f_T(p) := f(p),$$

$$f_T(\perp) := \perp,$$

$$f_T(\varphi \rightarrow \psi) := f_T(\varphi) \rightarrow f_T(\psi),$$

$$f_T(\varphi \wedge \psi) := f_T(\varphi) \wedge f_T(\psi),$$

...

$$f_T(\Box\varphi) := \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner).$$

定理（算術的健全性）

$\vdash_{\text{GL}} \varphi$ ならば、任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ 。

実はこの逆も成立する。

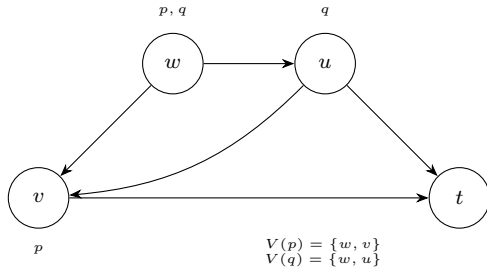
クリプキフレームとクリプキモデル

定義

- 集合 W と W 上の二項関係 R の組 (W, R) を**クリプキフレーム**という.
- クリプキフレーム (W, R) と付値 $V : \text{Var} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ の組 $M = (W, R, V)$ を**クリプキモデル**という.

wRv は「世界 w から世界 v へ到達可能」を表す.

$V(p)$ は命題変数 p が真となる世界の集合.



充足関係の定義

定義 (充足関係)

クリプキモデル $M = (W, R, V)$ と $w \in W$ に対し, $M, w \Vdash \varphi$ を再帰的に定める:

$$M, w \Vdash p \iff w \in V(p),$$

$$M, w \not\Vdash \perp,$$

$$M, w \Vdash \varphi \rightarrow \psi \iff M, w \Vdash \varphi \text{ ならば } M, w \Vdash \psi,$$

$$M, w \Vdash \Box\varphi \iff \forall v (wRv \Rightarrow M, v \Vdash \varphi).$$

定義 (妥当性)

φ が M で妥当とは, すべての $w \in W$ で $M, w \Vdash \varphi$ となることをいう.

GL のクリプキ完全性定理

定理 (Segerberg, 1971)

様相論理式 φ について，次は同値：

- ① $\vdash_{\text{GL}} \varphi$.
- ② φ は推移的かつ非反射的なフレームをもつ任意の有限クリプキモデルで妥当.

したがって

$$\not\vdash_{\text{GL}} \varphi$$

ならば，推移的かつ非反射的なフレームをもつ有限クリプキモデル $M = (W, R, V)$ で，ある w において $M, w \not\models \varphi$ となるものがとれる.

Solovay の算術的完全性定理

定理 (Solovay, 1976)

理論 T が $\text{PA} \subseteq T$, 再帰的, Σ_1 -健全の 3 条件を満たすとする。
 任意の様相論理式 φ について, 次は同値:

- ① $\vdash_{\text{GL}} \varphi$.
- ② 任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$.

すなわち, Σ_1 -健全な理論 T で証明できる原理はちょうど GL の定理と一致する。

推移的・非反射的有限クリプキモデルを算術の中に埋め込むことで証明する。

- 定理より, 何らか形をした算術の文の証明不可能性などを示したいときには, 対応する様相論理式の反例クリプキモデルを見つければよかったりする。
- 様相論理を用いた分析はいろいろな形で拡張されており, 現在も研究が続いている。

- ① 第 1 不完全性定理と決定不能性
- ② 証明可能性の様相論理
- ③ 第 2 不完全性定理と無矛盾性の定式化

第 2 不完全性定理の厳密な主張とは？

- 第 2 不完全性定理 (G2 と略記する) は証明可能性述語に関する主張.
- 証明可能性述語はゲーデル数の取り方に依存しているため、「無矛盾性の証明不可能性」という一般的な性質としての G2 を述べるには、
「 $\text{Pr}_T(x)$ が \sim を満たせば $T \not\vdash \text{Con}(T)$ 」
のように表せばよい.
- G2 を取り巻く状況について紹介する.

Gödel (1931)

G2 (Gödel (1931))

$$T \not\vdash \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x)).$$

- Gödel は、第 1 不完全性定理の証明を形式化することによって G2 が証明されると説明した。
- 詳細な証明を続編で提示すると書いたが、その論文は結局は出版されることはなかった。

Hilbert and Bernays (1939)

Hilbert and Bernays による本 *Grundlagen der Mathematik* 第 2 巻において、 G_2 の最初の詳細な証明が提示された。

 G_2 (Hilbert and Bernays (1939))

$\text{Pr}_T(x)$ が M , CB , $\Delta_0 C^U$ を満たすならば、
 $T \not\vdash \forall x (\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\dot{x}))$ 。

M $T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ 。

CB $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \forall x \varphi(x) \urcorner) \rightarrow \forall x \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ 。

$\Delta_0 C^U$ $\varphi(x)$ が Δ_0 論理式ならば、 $T \vdash \varphi(x) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ 。

- 実際には、彼らは少し異なる条件を用いていた。
- $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$ において x は自由変数 (詳細は省略)。

Löb (1955)

Löb の定理 (1955)

$\text{Pr}_T(x)$ が次の条件 D2 と D3 を満たすならば、任意の文 φ に対して、

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi.$$

系 (G2)

$\text{Pr}_T(x)$ が D2 と D3 を満たすならば、 $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

- これは G2 の最もよく知られた形.
- Löb の導出可能性条件は、様相論理における証明可能性述語の研究の基礎も与える.

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

Jeroslow (1973)

Jeroslow は, $G2$ の別の形が成り立つことを示した.

$G2$ (Jeroslow (1973))

$\text{Pr}_T(x)$ が $\Sigma_1 C$ を満たすならば, ある文 φ に対して $T \not\vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.

$\Sigma_1 C$ φ が Σ_1 文ならば, $T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Montagna (1979)

G2 (Montagna (1979))

$\text{Pr}_T(x)$ が D2^G と PC^G を満たすならば, $T \not\vdash \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x))$.

D2^G $T \vdash \forall x \forall y (\text{Pr}_T(x \rightarrow y) \rightarrow (\text{Pr}_T(x) \rightarrow \text{Pr}_T(y)))$.

PC^G $T \vdash \forall x (\text{Pr}_\emptyset(x) \rightarrow \text{Pr}_T(x))$.

これらの異なる $G2$ は、それぞれ異なる仮定と帰結をもつ。

無矛盾性の異なる定式化

- $\text{Con}_T^H := \forall x(\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner x \urcorner))$
- $\text{Con}_T^S := \{\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \mid \varphi \text{ は文}\}$
- $\text{Con}_T^L := \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\text{Con}_T^G := \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x))$

異なる $G2$

Gödel $T \not\vdash \text{Con}_T^G$

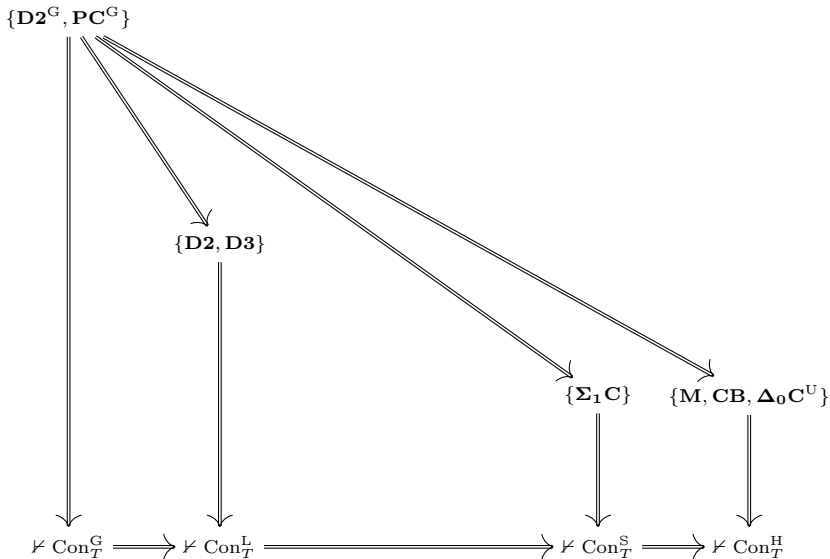
Hilbert and Bernays $\{\mathbf{M}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U}\} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$

Löb $\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^L$

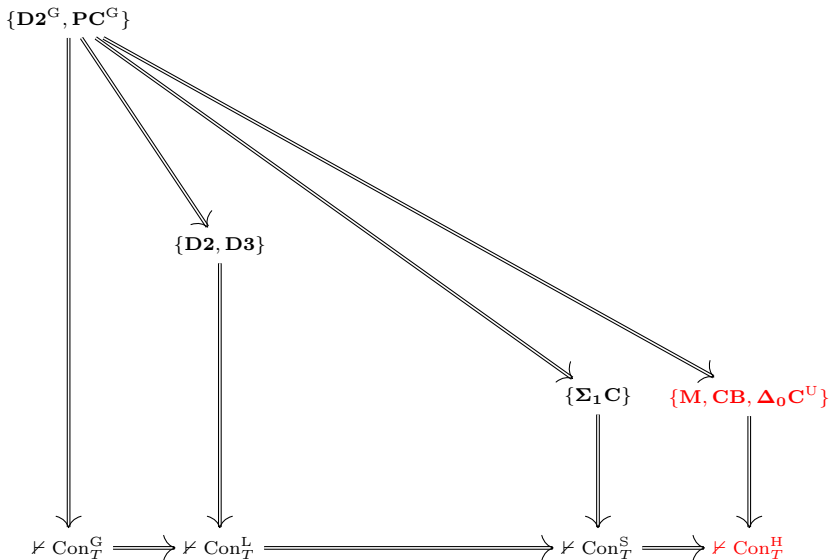
Jeroslow $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^S$

Montagna $\{\mathbf{D2^G}, \mathbf{PC^G}\} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^G$

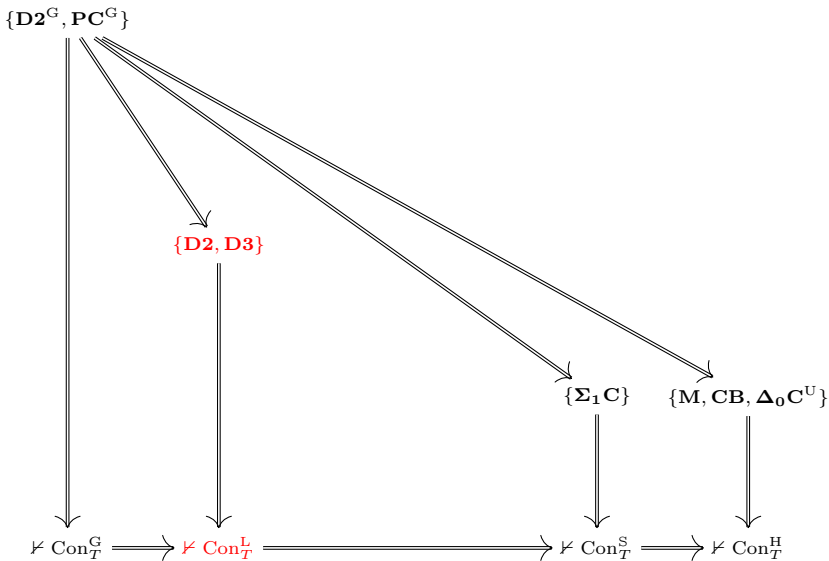
- $\text{PA} + \text{Con}_T^H \vdash \text{Con}_T^S$, $\text{PA} + \text{Con}_T^S \vdash \text{Con}_T^L$, and $\text{PA} + \text{Con}_T^L \vdash \text{Con}_T^G$.
- 以下では、この状況を明らかにする。



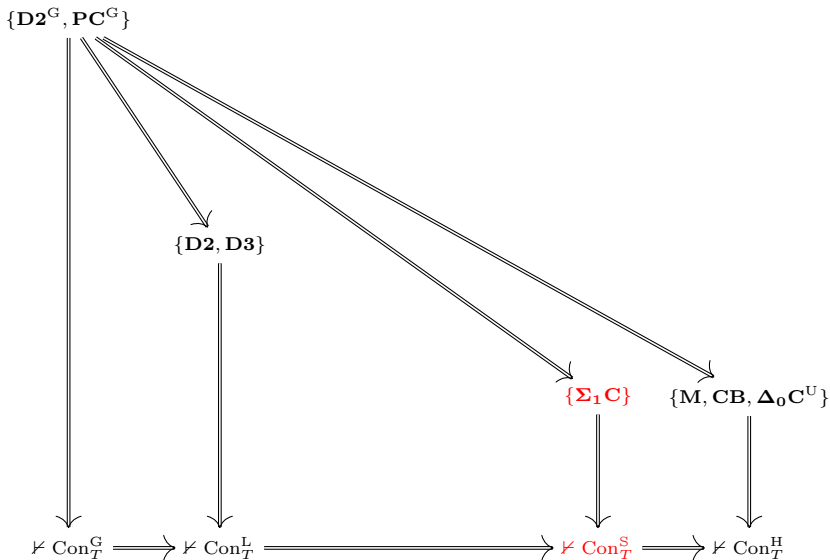
Hilbert and Bernays (1939)



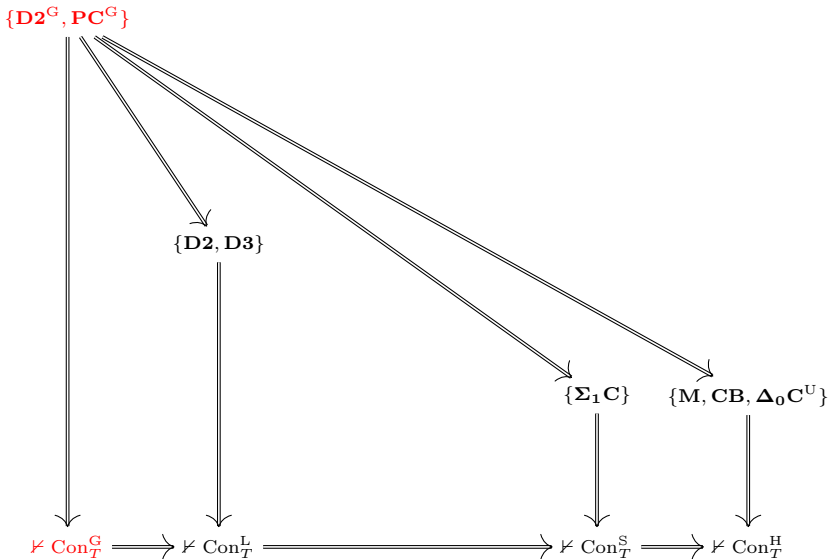
Löb (1955)



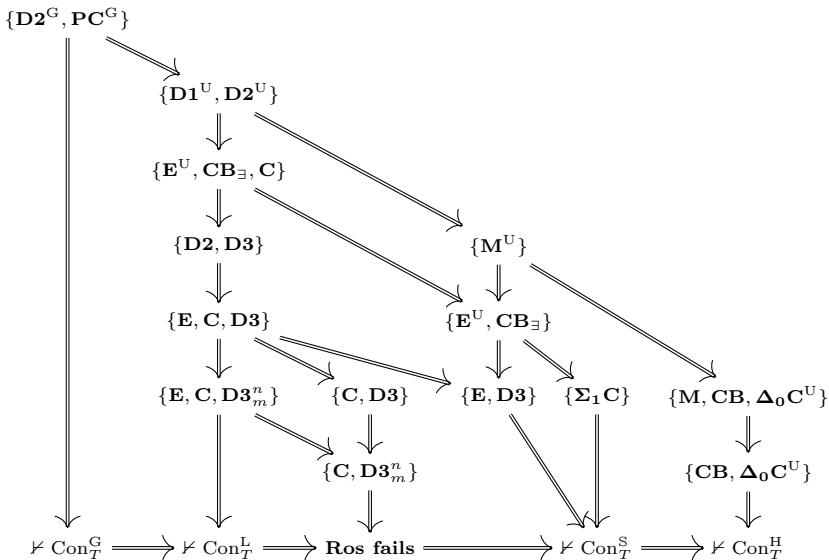
Jeroslow (1973)



Montagna (1979)



最新版 (Kurahashi 2020; Kurahashi 2026+)



G2 を満たさない証明可能性述語

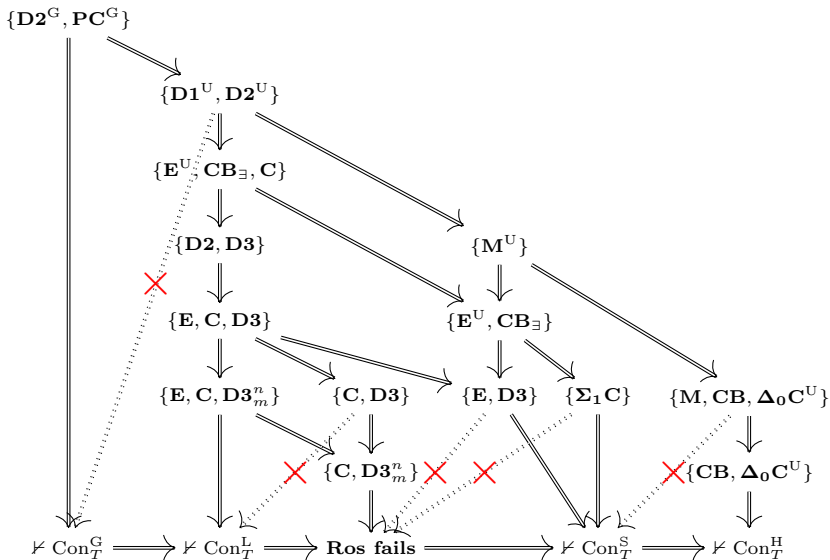
定義 (ロッサーの証明可能性述語)

$$\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) := \exists y(\text{Prf}_T(y, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(z, \ulcorner \neg \varphi \urcorner))$$

命題 (Con^L の G2 が不成立)

$$\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

- D2, D3 をともに満たすロッサーの証明可能性述語は存在しない。
- D2 を満たすロッサーの証明可能性述語が存在する。 (Bernardi and Montagna, 1984; Arai, 1990)
- D3 を満たすロッサーの証明可能性述語が存在する。 (Arai, 1990)
- したがって、D2 だけ、D3 だけは Con_T^L の証明不可能性には不十分。



- G2 には、数学的に厳密な唯一の定式化が存在するわけではない。
- 反例として人工的な証明可能性述語を構成してきたが、それらは G2 の射程から除外されるべきだ、と主張する人もいるかもしれない。
- しかし、「自然に定義された証明可能性述語」という概念自体が、数学的にきちんと定義されているわけではないので人工的かどうかの線引きを明確にすることは現時点ではできていない。
- 現在のところ、私は G2 を、適切に定式化された無矛盾性の不証明可能性を主張する定理群として捉えている。