不完全性定理の証明：証明可能性述語と不動点定理

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）

2026 年 3 月 28 日 16:00-17:30

第 80 回 ENCOUNTERwithMATHEMATICS
ゲーデルの不完全性定理をめぐって
-ヒルベルトのプログラムから竹内の基本予想まで-

今回の目標

- 第 1 不完全性定理，第 2 不完全性定理の証明の全体像を掴むことが目標.
- 標準的な証明の概要をしっかり目に紹介します.
- もちろん 90 分で細部を追うのは難しいので,「こんなことするんだ」や「こんな方針で示すのか」というようなものをつかんでもらえたら嬉しいです.

今回のアウトライン

算術の言語と標準モデル

定義 (言語 $\mathcal{L}_A$)

- 算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, \mathsf{s}, +, \times, \leq\}$ は自然数に関する主張を記述するのに用いる言語．
- 0 は定数記号，s は 1 変数関数記号，$+, \times$ は 2 変数関数記号，$\leq$ は 2 変数関係記号．

今回は論理式や項といえば $\mathcal{L}_A$-論理式や $\mathcal{L}_A$-項を指すこととする．

定義 (標準モデル)

- $\mathcal{L}_A$-構造 $(\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, \mathsf{s}^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \times^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}})$ は
  - $0^{\mathbb{N}}$ を自然数 0,
  - $\mathsf{s}^{\mathbb{N}}$ を自然数上の後者関数（$\mathsf{s}^{\mathbb{N}}(n) = n + 1$），
  - $+^{\mathbb{N}}$ と $\times^{\mathbb{N}}$ をそれぞれ自然数上の通常の加法と乗法,
  - $\leq^{\mathbb{N}}$ を自然数上の通常の大小関係

  としたもの．
- この構造を（一階算術の）標準モデルといい，単に $\mathbb{N}$ で表す．

問い

$\mathbf{TA} := \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ (True Arithmetic という)
はどんな集合？ いい感じに公理化できる？ 計算可能？

ロビンソン算術，ペアノ算術

- TA の要素をいくつか集めて，TA を公理化できないだろうか．
- ロビンソン算術 Q は $\mathcal{L}_A$ の各記号に関する基本性質を集めた有限理論．

定義 (ロビンソン算術 Q)

ロビンソン算術 Q は次の公理 Q1〜Q8 からなる $\mathcal{L}_A$-理論．

Q1	$\forall x(\mathsf{s}(x) \neq 0)$	**Q2**	$\forall x \forall y(\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y)$
Q3	$\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x = \mathsf{s}(y)))$	**Q4**	$\forall x(x + 0 = x)$
Q5	$\forall x \forall y(x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y))$	**Q6**	$\forall x(x \times 0 = 0)$
Q7	$\forall x \forall y(x \times \mathsf{s}(y) = x \times y + x)$	**Q8**	$\forall x \forall y(x \leq y \leftrightarrow \exists z(z + x = y))$

- 自然数論に関する重要な原理として「数学的帰納法」がある．

定義 (ペアノ算術 PA)

Q に，各 $\mathcal{L}_A$-論理式 φ に対する次の数学的帰納法の公理（つまり無限個の公理）を加えて得られる $\mathcal{L}_A$-理論をペアノ算術 PA という：

$$\forall \vec{y}\big(\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathsf{s}(x))) \to \forall x \varphi(x)\big),$$

ただし $\vec{y}$ は φ に含まれる x 以外の自由変数の組．

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{PA} \subseteq \mathbf{TA}$

問い

- $\mathbf{PA}$ の定理全体は $\mathbf{TA}$ に一致する？
- そうでない場合，どの程度公理を追加する必要がある？

理論 T の定理全体の集合が $\mathbf{TA}$ と一致するとき，
任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について $\mathbb{N} \models \varphi$ または $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ なので，
$\varphi \in \mathbf{TA}$ または $\neg\varphi \in \mathbf{TA}$ だから，$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$
つまり T は完全でなければならない．
（$T \nvdash \varphi$ と $T \vdash \neg\varphi$ の違いに注意）

不完全性定理

不完全性定理 (Gödel, 1931)

- **第 1 不完全性定理**
  理論 T が PA を含み，原始再帰的，Σ_1-健全の 3 条件を満たせば，T は不完全.
- **第 2 不完全性定理**
  理論 T が PA を含み，原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たせば，T は T の無矛盾性を証明できない.

原始再帰的関数

$n > 0$ として

- $s(x) = x + 1$ を後者関数という．
- $z_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ を（n 変数）ゼロ関数という．
- 各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対する $p_{n,i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ を射影関数という．

定義 (原始再帰的関数)

自然数上の関数である**原始再帰的関数**を以下で定める．

- 後者関数，ゼロ関数，射影関数はすべて原始再帰的関数．
- (合成) m 変数原始再帰的関数 g と，n 変数原始再帰的関数 $h_1, \ldots, h_m$ について，

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$$

  で定義される n 変数関数 f も原始再帰的関数．
- (原始再帰) n 変数原始再帰的関数 g と $n+2$ 変数原始再帰的関数 h について，

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

  で定義される $n+1$ 変数関数 f も原始再帰的関数．

基本的ないくつかの関数が原始再帰的関数であることが容易に確認できる.

原始再帰的関数の例

1. $s(z_n(\vec{x})) = 1$ であり，$s(s(z_n(\vec{x}))) = 2$ なので，(n 変数) 定数関数はすべて原始再帰的関数.
2. 加法 $x + y$ は原始再帰的関数.
   実際，次の原始再帰で定められる 2 変数関数 f は加法と一致する：

$$\begin{cases} f(x,0) = p_{1,1}(x) \\ f(x,y+1) = s(p_{3,3}(x,y,f(x,y))) \end{cases}$$

   次のように射影関数を省略した方が分かりやすい.

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + (y+1) = s(x+y) \end{cases}$$

3. 同様にして乗法 $x \times y$，前者関数 $pred(x) = x - 1$ (ただし $pred(0) = 0$)，指数関数 x^y，階乗関数 $x!$ などは原始再帰的関数.

原始再帰的関係

定義（特徴関数）

自然数上の n 項関係 R に対して，次を満たす n 変数関数 χ_R を，R の**特徴関数**という：

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in R \text{ のとき} \\ 0 & \vec{x} \notin R \text{ のとき} \end{cases}$$

定義（原始再帰的関係）

自然数上の n 項関係 R が**原始再帰的** $:\Longleftrightarrow$ R の特徴関数 χ_R が原始再帰的．

Δ_0, Σ_1, Π_1

定義 (Δ_0 論理式)

論理式 φ と変数 x を含まない項 t について，$\exists x \leq t\, \varphi$ および $\forall x \leq t\, \varphi$ をそれぞれ $\exists x(x \leq t \wedge \varphi)$ および $\forall x(x \leq t \to \varphi)$ の略記とし，含まれる量化記号が全てこれらの形をしている論理式を Δ_0 **論理式**という

Δ_0 論理式の例

- $x|y :\equiv \exists z \leq y(x \times z = y)$ として
- $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \leq x \wedge \forall y \leq x(y|x \to y = \mathsf{s}(0) \vee y = x)$

定義 (Σ_1 論理式と Π_1 論理式)

1. Δ_0 論理式 φ について $\exists v_0 \cdots \exists v_{k-1} \varphi$ という形の論理式を Σ_1 **論理式**という．
2. Δ_0 論理式 φ について $\forall v_0 \cdots \forall v_{k-1} \varphi$ という形の論理式を Π_1 **論理式**という．

原始再帰的関数の表現

各自然数 n を値に持つ $\mathcal{L}_A$-項のうち，標準的な項である**数項**を定める．

定義 (数項)

数項 $\overline{n}$ を以下で再帰的に定める：

- $\overline{0}$ は 0 のこととする．
- $\overline{n+1}$ は $\mathsf{s}(\overline{n})$ のこととする．

原始再帰的関数は $\mathbf{PA}$ において論理式を用いて取り扱うことができる．

定理 (原始再帰的関数の表現)

任意の k 変数原始再帰的関数 f に対して，次を満たす Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ がとれる：任意の $n_1, \ldots, n_k, m \in \omega$ について

$$
\begin{aligned}
f(n_1, \ldots, n_k) = m &\iff \mathbb{N} \models \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m}) \\
&\iff \mathbf{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{m})
\end{aligned}
$$

かつ

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k \exists! y\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, y).$$

このとき，$\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ は $\mathbf{PA}$ 上で関数 f を**表現する**という．

原始再帰的関数の表現

事実

「x は有限列のコード」を意図する論理式 $\mathrm{Seq}(x)$ を作り，**PA** がその基本性質を証明できる，という「有限列コード化定理」が証明できる（例えば中国剰余定理に基づく Gödel の証明などによる）．

原始再帰的関数の表現定理の証明

- 原始再帰的関数 f の構成に関する帰納法で証明する．
- 特に f が原始再帰 $\begin{cases} f(\vec{x},0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},y+1) = h(\vec{x},y,f(\vec{x},y)) \end{cases}$ で定められているとき，$f(\vec{x},y+1)$ が $f(\vec{x},0),\ldots,f(\vec{x},y)$ を用いて定められているという状況をうまく表現するために，**PA** における「数の有限列のコード化」を用いる．

$\square$

したがって，**PA** は全ての原始再帰的関数に対応する関数記号を有しているとしてもよい（論理学の基本的事実）．

原始再帰的関係の表現

定義 ($\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式)

論理式 $\varphi(\vec{x})$ が $\Delta_1(\mathbf{PA})$
$:\Longleftrightarrow$ Σ_1 論理式 $\sigma(\vec{x})$ と Π_1 論理式 $\pi(\vec{x})$ が存在して，
$\mathbf{PA} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \sigma(\vec{x})$ かつ $\mathbf{PA} \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \pi(\vec{x})$.

定理 (原始再帰的関係の表現)

任意の原始再帰的な k 項関係 R に対して，次を満たす $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ がとれる：任意の $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ について

$$(n_1, \ldots, n_k) \in R \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$$
$$(n_1, \ldots, n_k) \notin R \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$$

このとき，$\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ は PA 上で関係 R を表現するという．

原始再帰的関係の表現

証明

- R を任意の原始再帰的な k 項関係とする．
- その特徴関数 χ_R は原始再帰的関数．
- **PA** において χ_R を表現する Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ で，$\mathbf{PA} \vdash \forall \vec{x} \exists ! y\, \varphi(\vec{x}, y)$ となるものがとれる．
- このとき R は Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x}, \overline{1})$ によって **PA** において表現される．
- 更に $\varphi(\vec{x}, \overline{1})$ は Π_1 論理式 $\neg\varphi(\vec{x}, 0)$ と **PA** 上で同値なので，$\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式である． □

算術化

- 論理式は記号の有限列であり，形式的証明は論理式の有限列．
- 一階述語論理に関する基本的な記号に自然数を割り当てれば，自然数の有限列のコード化を用いて，形式的証明などの概念を自然数でコードできる．
- これらの自然数（ゲーデル数）を介して論理式や証明などの対象を形式的算術において取り扱う手法を算術化という．

ペアリング関数 $\langle x, y\rangle = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ を用意しておく．

記号への自然数の割り当て

まずは次のように各記号 a に自然数 $\ulcorner a \urcorner$ を次の表に従って割り当てる．

0	s	$+$	$\times$	$\leq$	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\exists$	$\forall$	v_n
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$25 + 2n$

項や論理式に対して，固有の自然数をその再帰的定義に基づいて割り当てていく．

- $\ulcorner \mathsf{s}(t) \urcorner = 2 \times \langle 3, \ulcorner t \urcorner \rangle$
- $\ulcorner t + u \urcorner = 2 \times \langle 5, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t \times u \urcorner = 2 \times \langle 7, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t \leq u \urcorner = 2 \times \langle 9, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner t = u \urcorner = 2 \times \langle 11, \langle \ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \neg \varphi \urcorner = 2 \times \langle 13, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$
- $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = 2 \times \langle 15, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner = 2 \times \langle 17, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner = 2 \times \langle 19, \langle \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \exists x \varphi \urcorner = 2 \times \langle 21, \langle \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \rangle$
- $\ulcorner \forall x \varphi \urcorner = 2 \times \langle 23, \langle \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \rangle$

算術化 1

ゲーデル数を通じて，記号や記号列について自然数論の言葉で言及できる．

算術化とその表現 1

$\mathsf{Var}(x)$ を Δ_0 論理式 $\exists y \leq x(x = \overline{25} + \overline{2} \times y)$ とすれば，
関係「x は変数のゲーデル数」を $\mathbb{N}$ において定義し，$\mathbf{PA}$ において表現する論理式．

算術化とその表現 2

同様に「x は項のゲーデル数」「x は論理式のゲーデル数」「x は文のゲーデル数」「x は論理公理のゲーデル数」「x は等号公理のゲーデル数」といった関係を $\mathbf{PA}$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式を適切に定められる（それぞれ $\mathsf{Term}(x)$，$\mathsf{Fml}(x)$，$\mathsf{Sent}(x)$，$\mathsf{LogAx}(x)$，$\mathsf{EqAx}(x)$ とかく）．

算術化 2

算術化とその表現 3

- 「z は論理式 x と y から MP $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ で導出される」という $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式 $\mathsf{MP}(x, y, z)$ は，$x = \ulcorner \varphi \urcorner, z = \ulcorner \psi \urcorner$ のときに $y = \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner$ となることであるから，
$$y = \overline{2} \times \langle \overline{19}, \langle x, z \rangle \rangle$$
と定めればよい．
- 「y は論理式 x から Gen $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$ で導出される」という $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式 $\mathsf{Gen}(x, y)$ も同様に定められる．

証明可能性述語

続いて，理論 T における形式的証明をコード化するが，その際に T とその要素のゲーデル数全体の集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N} \mid \varphi \in T\}$ を同一視する．

定義（原始再帰的な理論）

理論 T が原始再帰的 $:\Longleftrightarrow$ 集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N} \mid \varphi \in T\}$ が原始再帰的.

T が原始再帰的なら，T を $\mathbf{PA}$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式 $\tau(x)$ がとれる．

「y は論理式 x の T における形式的証明のコード」

という 2 項関係を $\mathbf{PA}$ において表現する $\Delta_1(\mathbf{PA})$ 論理式 $\mathrm{Prf}_T(y,x)$ を次で定める：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Seq}(y) \land x = (y)_{l(y)-1} \\
&\quad \land \forall z < l(y)\Big(\mathsf{LogAx}((y)_z) \lor \mathsf{EqAx}((y)_z) \lor \tau((y)_z) \\
&\qquad \lor \big(z \neq 0 \land \exists w_0, w_1 < z\big(\mathsf{MP}((y)_{w_0}, (y)_{w_1}, (y)_z) \lor \mathsf{Gen}((y)_{w_0}, (y)_z)\big)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

定義（証明可能性述語）

Σ_1 論理式 $\exists y\, \mathrm{Prf}_T(y,x)$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ とかき，これを T の**証明可能性述語**という．

証明可能性述語の性質

定理

任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \iff \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

証明

$\mathrm{Prf}_T(y, x)$ は関係「y は論理式 x の T における形式的証明のコード」を表現するので，

$$\begin{aligned}
T \vdash \varphi &\Rightarrow T \text{ における } \varphi \text{ の形式的証明のコード } p \text{ が存在} \\
&\Rightarrow \exists p \in \omega \ \textbf{s.t.}\ \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\overline{p}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \exists y \, \mathrm{Prf}_T(y, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow \mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow \mathbb{N} \models \exists y \, \mathrm{Prf}_T(y, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow \exists p \in \omega \ \textbf{s.t.}\ \mathbb{N} \models \mathrm{Prf}_T(\overline{p}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \\
&\Rightarrow T \text{ における } \varphi \text{ の形式的証明のコード } p \text{ が存在} \\
&\Rightarrow T \vdash \varphi.
\end{aligned}$$

$\ulcorner\varphi\urcorner$ は自然数で $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ はその数項だが，単純化のために $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ を $\ulcorner\varphi\urcorner$ で表すことにする．

不動点定理

定理 (不動点定理)

$\varphi(v_0)$ を v_0 のみを自由変数にもつ任意の論理式とすると，ある文 ψ が存在して，

$$\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

更に，φ が Σ_1 なら ψ も Σ_1 でとれ，φ が Π_1 なら ψ も Π_1 でとれる．

証明（概略）

- 原始再帰的関数 $d(x)$ を，n がある 1 変数 $\mathcal{L}_A$-論理式 $\delta(x)$ のゲーデル数のときに $d(n)$ は文 $\delta(\overline{n})$ のゲーデル数となるものとする．
- **PA** は d を関数記号として持っているとしてよい．
- 1 変数論理式 $\varphi(d(x))$ のゲーデル数を k をすると，$d(k) = \ulcorner \varphi(d(\overline{k})) \urcorner$ となる．
- このとき

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi(d(\overline{k})) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \varphi(d(\overline{k})) \urcorner).$$

- $\varphi(d(\overline{k}))$ が求める文．

ψ の適切な複雑さを評価する際には $d(x)$ を **PA** において表現する Σ_1 論理式を用いてうまく書き換えればよい． □

準備

用語を 2 つ用意する．

定義（理論の完全性，不完全性）

理論 T が**完全** $:\Longleftrightarrow$ 任意の文 φ について，$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$．
そうではないとき，T は**不完全**であるという．

定義（理論の Σ_1-健全性）

理論 T が **Σ_1-健全** $:\Longleftrightarrow$ 任意の Σ_1 文 φ について，$T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$．

これらは理論の完全性と（$\mathbb{N}$ に対する）健全性であり，完全性定理における論理の完全性や健全性とは異なる概念なので注意が必要．

もし T が Σ_1-健全とすると，Σ_1 文 $0 = 1$ について $\mathbb{N} \not\models 0 = 1$ なので $T \nvdash 0 = 1$ であり，T は無矛盾となる．
したがって，Σ_1-健全性は無矛盾性より強い条件．

第 1 不完全性定理

定理 (第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931))

理論 T が $\mathbf{PA} \subseteq T$, 原始再帰的, Σ_1-健全の 3 条件を満たせば，T は不完全．
すなわち $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるような文 φ が存在する．

証明

T は原始再帰的だから，その証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を Σ_1 論理式でとれる．
不動点定理より $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ となるような Π_1 文 φ が存在する．
このような文 φ を T のゲーデル文という．
$T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となることを示そう．

- $T \vdash \varphi$ と仮定すると，$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．
  φ の取り方より $\mathbf{PA} \vdash \neg\varphi$．
  $\mathbf{PA} \subseteq T$ なので $T \vdash \neg\varphi$ であり，T の無矛盾性に反する．
  したがって $T \nvdash \varphi$．
- $T \vdash \neg\varphi$ と仮定すると，不動点の取り方より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．
  T は Σ_1-健全なので $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．
  このとき $T \vdash \varphi$ であり，T の無矛盾性に反する．
  したがって $T \nvdash \neg\varphi$．

$\square$

TA について

TA は PA $\subseteq$ TA かつ Σ_1-健全だが完全なので，次が分かる．

系

PA にどれだけ公理を加えても，原始再帰的かつ Σ_1-健全な公理化である限りは，定理全体が TA と一致することはない．
特に TA は原始再帰的集合ではない．

つまり，与えられた $\mathcal{L}_A$-文 φ が「真かどうか」を判定するような原始再帰的関数は存在しない．

第 1 不完全性定理の計算論的側面については次回に紹介する．

第 1 不完全性定理の洗練化

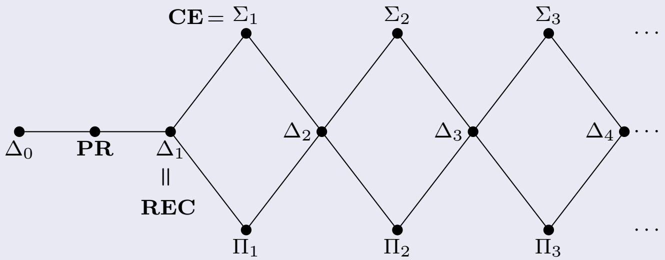
- $\mathbf{Q}$ の Σ_1-完全性を上手く用いることで **PA** は $\mathbf{Q}$ に弱められる．
- Σ_1-健全性は **Rosser** による手法を用いて無矛盾性に弱められる．
- 原始再帰的という条件も **Craig** の手法を用いて **c.e.** (Σ_1-定義可能）に弱められる．

第 1 不完全性定理の洗練化

理論 T が $\mathbf{Q} \subseteq T$, Σ_1-定義可能, 無矛盾の 3 条件を満たせば, T は不完全．

定理 ($\mathbf{Q}$ の Σ_1-完全性)

φ が Σ_1 文で $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $\mathbf{Q} \vdash \varphi$.



Rosser による洗練化について

T のゲーデル文 φ（つまり $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$）について

- T が無矛盾なら $T \nvdash \varphi$,
- T が Σ_1-健全なら $T \nvdash \neg\varphi$.

Σ_1-健全でない理論で，ゲーデル文の否定が証明できるものがある．

定義 (ロッサーの証明可能性述語)

$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(y, \ulcorner \varphi \urcorner) \land \forall z \leq y \neg \mathrm{Prf}_T(z, \ulcorner \neg\varphi \urcorner))$

T のロッサー文 ρ（つまり $\mathbf{PA} \vdash \rho \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner \rho \urcorner)$）について

- T が無矛盾なら $T \nvdash \rho$ かつ $T \nvdash \neg\rho$.

Rosser の手法は「wintess comparison argument」として，現代でも重要．

おまけ

Σ_1-定義可能という条件は Δ_2-定義可能に弱めることはできない．

事実

$\mathbf{Q} \subseteq T$, Δ_2-定義可能，無矛盾の 3 条件を満たす理論 T で，完全なものが存在する．

一方，無矛盾性の仮定を強くすると，理論の複雑さを上げても不完全になる．

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 2017; Salehi and Seraji, 2017)

理論 T が $\mathbf{Q} \subseteq T$, Σ_{n+1}-定義可能，Σ_n-健全の 3 条件を満たせば，T は不完全．

第 1 不完全性定理の形式化

- 特に **PA** が不完全であることが分かった．
- 他方，**PA** は有限的な手法で証明できるような（自然数に関する）文をすべて証明できるほど十分に強い．
- 第 1 不完全性定理の証明も有限文字列の操作しかしていないので **PA** で実行可能．

- 理論 T の無矛盾性は $T \nvdash 0 = 1$ という条件と同値なので，T の無矛盾性を形式化は Π_1 文 $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ としてとれる．
- この文を $\mathrm{Con}(T)$ と書く．

定理 (ゲーデル文の証明不可能性の形式化)

理論 T は $\mathbf{PA} \subseteq T$ かつ原始再帰的とする．
φ を T のゲーデル文とすれば $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$．

第 2 不完全性定理

定理 (ゲーデル文の証明不可能性の形式化)【再掲】

理論 T は $\mathbf{PA} \subseteq T$ かつ原始再帰的とする．
φ を T のゲーデル文とすれば $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．

第 2 不完全性定理が直ちに得られる．

定理 (第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931))

理論 T が $\mathbf{PA} \subseteq T$，原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たせば，$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$．

証明

$T \vdash \mathrm{Con}(T)$ と仮定する．
φ を T のゲーデル文とすれば $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．
$T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．
φ はゲーデル文なので $T \vdash \varphi$．
これは T の無矛盾性に反する．
したがって $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$．

ゲーデル文の証明不可能性の形式化？

定理 (ゲーデル文の証明不可能性の形式化)【再再掲】

理論 T は $\mathbf{PA} \subseteq T$ かつ原始再帰的とする．
φ を T のゲーデル文とすれば $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- これを示すには第 1 不完全性定理に至る議論すべてを PA において実行する必要があり，書き下すのは大変．
- 実際，Gödel (1931) はそのアウトラインを述べただけで，詳細な証明は続編に記載すると予告しながら刊行されなかった．
- 詳細な証明を書き下したのは Hilbert and Bernays (1939) で，彼らの証明は
  - 第 2 不完全性定理の証明に十分な $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関する条件（導出可能性条件）を特定し，
  - 実際に $\mathrm{Pr}_T(x)$ がそれらの条件を満たすことを示す，

  という構造をしている．
- Hilbert and Bernays (1939) の導出可能性条件はややこしく，のちに Löb (1955) が非常に取り扱いやすい導出可能性条件を見出した．

導出可能性条件

定理 (導出可能性条件 (Löb, 1955)

T を $\mathbf{PA} \subseteq T$ かつ原始再帰的とする．

1. 任意の文 φ, ψ について
$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner).$$
2. 任意の文 φ について $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

ゲーデル文の証明不可能性の形式化の証明

$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ なので，特に $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \neg \varphi$.
$\mathrm{Pr}_T(x)$ の定義より $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \neg \varphi \urcorner)$.
導出可能性条件より $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.
導出可能性条件 $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$ と合わせて
$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.
ここで　$T \vdash \varphi \to (\neg \varphi \to 0 = 1)$ と導出可能性条件を用いて
$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))$.
これらを合わせて $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
対偶をとると $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$. $\square$

Löb の定理

Löb は導出可能性条件を用いて第 2 不完全性定理の一般化を行っている．

定理 (Löb の定理 (Löb, 1955))

T を $\mathbf{PA} \subseteq T$，原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たす理論，φ を文とすると，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$．

証明

- 条件を満たす T について，$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ を仮定する．
- 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x) \to \varphi$ に対して不動点定理を適用することで

  $$\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi)$$

  を満たす文 ψ がとれる．
- 導出可能性条件より $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \big(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)\big)$
- 導出可能性条件より $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$ だから，$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$．
- 仮定と合わせると $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \to \varphi$．
- 不動点の取り方より $T \vdash \psi$．
- よって $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$ であり，$T \vdash \varphi$． $\square$

第 2 不完全性定理再び

Löb の定理から第 2 不可能性定理が直ちに得られる.

定理 (第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931))【再掲】

T を $\mathbf{PA} \subseteq T$, 原始再帰的, 無矛盾の 3 条件を満たす理論とすると, $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$.

証明

$T \vdash \mathrm{Con}(T)$ と仮定すれば, $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ すなわち
$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to 0 = 1$.
Löb の定理より $T \vdash 0 = 1$ なので T の無矛盾性に反する.
したがって $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$. $\square$

第 1 不完全性定理と第 2 不完全性定理

第 1 不完全性定理と第 2 不完全性定理は無関係ではない．
第 2 不完全性定理の証明をよく見ると次が分かる．

定理

T を $\mathbf{PA} \subseteq T$, 原始再帰的，無矛盾の 3 条件を満たす理論とする．
φ を T のゲーデル文とすると，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$.
特に T が Σ_1-健全ならば $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ かつ $T \nvdash \neg\mathrm{Con}(T)$.

第 1 不完全性定理を満たす文として特に $\mathrm{Con}(T)$ をとれるということ．

- $\mathbf{PA}$
- $\mathbf{PA} + \mathrm{Con}(\mathbf{PA})$
- $\mathbf{PA} + \mathrm{Con}(\mathbf{PA} + \mathrm{Con}(\mathbf{PA}))$
- $\cdots$

定理が真に増える，**TA** の部分理論の無限列．

第 2 不完全性定理の応用

- 第 2 不完全性定理は理論の比較などに使える．
- $T \vdash \mathrm{Con}(U)$ を示すことで $U \neq T$ を導く，という手法がかなり用いられている．
- 例えば

定理 (Mostowski, 1953)

$T \subseteq \mathbf{PA}$ かつ T が有限ならば，$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(T)$.

から第 2 不完全性定理を用いて次を導ける：

定理 (Ryll-Nardzewski, 1952)

$\mathbf{PA}$ は有限公理化できない．

- 第 2 不完全性定理のいろいろなバリエーション
- 導出可能性条件を様相論理を用いて分析する「証明可能性論理」

について次回紹介する．

雑誌 '数学' の論説 「不完全性定理の数学的発展」**vol.73, no.1, pp.60–87, 2021.**
にいろいろな話題を紹介しているので，興味のある方はぜひご一読ください.

英訳版：**Mathematical developments of the incompleteness theorems,**
Sugaku Expositions, **vol.38, no.1, pp. 1–32, 2025.**
にはより新しい情報が含まれています.