条件 E, C と第二不完全性定理

倉橋太志 （神戸大学システム情報学研究科）

日本数学会 2026 年度年会@東京理科大学
2026 年 3 月 24 日 (火)

概要

- **Gödel の第二不完全性定理（G2）を正確に述べるためには，無矛盾性を表す文 Con_T がどのような証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いてどのように定式化されているのか，について繊細に設定する必要があることが分かってきている．**
- **「どの導出可能性条件が，どのように Con_T の証明不可能性に働いているのか」という構造の理解に興味がある．**
- **今回，非正規様相論理の文脈において分析されている原理を算術に導入することにより，G2 の成立状況をより精密に整理する研究を行った．**
- **また，形式化された Σ_1-完全性がより弱い条件から得られることが分かった．**

Kurahashi, Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, arXiv:2507.00955, 投稿中

アウトライン

1. 導出可能性条件と第二不完全性定理
2. 形式化された Σ_1-完全性

第二不完全性定理

以降は T を PA の計算可能な無矛盾拡大理論とする．

定義（証明可能性述語）

$T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を，T の証明可能性述語という．

$\mathrm{Con}_T :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ とする．

- 「**Gödel** 文の証明不可能性」を T において形式化することで **G2** が得られるが，そのためには $\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件を満たせば十分．

導出可能性条件 (Löb, 1955)

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が **D2** と **D3** を満たすなら $T \nvdash \mathrm{Con}_T$.

いろいろな G2

しかし，これが唯一の G2 ではない．

- Hilbert and Bernays による G2 (1939)
- Jeroslow による G2 (1973)
- Montagna による G2 (1979)

はそれぞれ異なる導出可能性条件のもとでの，異なる定式化による無矛盾性の証明不可能性を主張する．

以前に，こうした様々な導出可能性条件と様々な無矛盾性の定式化の間に成立する G2 について整理する研究を行った．
Kurahashi, A note on derivability conditions. *JSL*, 2020.

今回は D2 と D3 を弱めたときに成立する G2 について分析を進めた．

弱い導出可能性条件

定義（証明可能性述語の反復）

- $\mathrm{Pr}_T^0(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi$
- $\mathrm{Pr}_T^{n+1}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T^n(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

導出可能性条件

$$\begin{aligned}
\textbf{E:}\ & T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \\
\textbf{M:}\ & T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \\
\textbf{C:}\ & T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner) \\
\textbf{D3}_m^n\textbf{:}\ & T \vdash \mathrm{Pr}_T^n(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T^m(\ulcorner\varphi\urcorner) \qquad (m > n \geq 1)
\end{aligned}$$

- **E, M, C は K より弱い非正規様相論理でよく分析される**
  規則 RE: $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$, RM: $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$
  と公理 C: $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$ **に対応．**
- **$\mathbf{D3}_m^n$ は D3 より弱い．**

条件間の関係

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D2} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \mathbf{M}+\mathbf{C} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \mathbf{M} \arrow[d, Rightarrow] & & \mathbf{C} \\
& \mathbf{E} & &
\end{tikzcd}
$$

無矛盾性に関する規則と原理

Con_T に加えて，無矛盾性に関連する次の二つの規則・原理を導入する．

Ros: **(Rosser 規則)**
$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$: **(図式的無矛盾性)**

$$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}} := \{\neg(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)) \mid \varphi \text{ は文 }\}$$

無矛盾性に関する規則と原理にも，様相論理における対応物がある．

算術	様相論理
Con_T	P: $\neg\Box\bot$
Ros	Ros: $\dfrac{\neg A}{\neg\Box A}$
$\mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$	D: $\neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$

結果 1

弱い導出可能性条件からでも，各種の無矛盾性に関する **G2** が得られた．

定理（K.）

$m > n \geq 1$ とする．

$$\begin{tikzcd}
\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & & \\
\{\mathbf{E}, \mathbf{C}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \{\mathbf{M}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\{\mathbf{E}, \mathbf{C}, \mathbf{D3}^n_m\} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \{\mathbf{C}, \mathbf{D3}\} \arrow[d, Rightarrow] & \{\mathbf{E}, \mathbf{D3}\} \arrow[dd, Rightarrow] & \{\mathbf{M}, \mathbf{D3}^n_m\} \arrow[ddl, Rightarrow] \\
 & \{\mathbf{C}, \mathbf{D3}^n_m\} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\nvdash \mathrm{Con}_T \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{failure of Ros} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, dashed, bend left, "\mathbf{E}"] & \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T \arrow[l, Rightarrow, dashed, bend left, "\mathbf{C}"] &
\end{tikzcd}$$

1. 導出可能性条件と第二不完全性定理
2. 形式化された Σ_1-完全性

形式化された Σ_1-完全性

- 証明可能性述語が **D3** を満たすことは，実際には，より強い $\mathbf{\Sigma_1 C}$ （形式化された Σ_1-完全性） を示すことで得られる．
- **G2** の証明において一番大変なのはこの部分．

D3 ： $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

$\mathbf{\Sigma_1 C}$ ： φ が Σ_1 文ならば $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

$\mathbf{\Sigma_1 C}$ は Σ_1 文 φ の構成に関する帰納法で証明する．

問

その際に十分な $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関する条件は何だろうか？

十分条件に関する先行研究

定理 (Buchholtz, 1993)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D1}^{\mathrm{U}}$ と $\mathbf{D2}^{\mathrm{U}}$ を満たせば，$\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす．

- $\mathbf{D1}^{\mathrm{U}}$: $T \vdash \varphi(\vec{x}) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$
- $\mathbf{D2}^{\mathrm{U}}$: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \to \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner))$

定理 (K., 2020)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{U}}$ を満たせば，$\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす．

- $\mathbf{M}^{\mathrm{U}}$: $T \vdash \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x}) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$

$$\mathbf{D1}^{\mathrm{U}} + \mathbf{D2}^{\mathrm{U}} \Longrightarrow \mathbf{M}^{\mathrm{U}}$$

結果 2

更に改良できた．

定理 (K.)

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{E}^{\mathrm{U}}$ と $\mathbf{CB}_\exists$ を満たせば，$\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たす．

- $\mathbf{E}^{\mathrm{U}}$: $T \vdash \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$
- $\mathbf{CB}_\exists$: $T \vdash \exists \vec{x}\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \exists \vec{x}\, \varphi(\vec{x}) \urcorner)$

$$\mathbf{D1}^{\mathrm{U}} + \mathbf{D2}^{\mathrm{U}} \Longrightarrow \mathbf{M}^{\mathrm{U}} \Longrightarrow \mathbf{E}^{\mathrm{U}} + \mathbf{CB}_\exists$$

系

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{E}^{\mathrm{U}}$ と $\mathbf{CB}_\exists$ を満たせば，$T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$．