

第1 不完全性定理と外延性

倉橋太志 (神戸大学システム情報学研究科)
Albert Visser (Utrecht 大学) との共同研究

科学基礎論学会 2026 年度 総会と講演会@杏林大学井の頭キャンパス
2026 年 6 月 14 日 (日)

概要

- ペアノ算術 PA の無矛盾な有限拡大理論は不完全であり、各理論には独立な文が存在する。
 - PA の無矛盾な有限拡大理論の不完全性を、独立な文の取り方という観点から再検討する。
 - 本発表では、独立な文の構成に対して、**外延性**（理論の表し方ではなく、理論そのものに依存すること）をどこまで要求できるかを考える。
-
- Kurahashi and Visser, *Extensional Independence*, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 受理。
 - 倉橋太志, 第 1 不完全性定理と外延性, 京都大学数理解析研究所講究録, 投稿中。

アウトライン

- ① 有限拡大の本質的不完全性
- ② 外延性
- ③ 研究結果

① 有限拡大の本質的不完全性

② 外延性

③ 研究結果

本質的不完全性

以降 T は無矛盾な c.e. 理論を表すとする.

定義 (本質的不完全性)

T は**本質的不完全** : $\iff T$ の任意の無矛盾な c.e. 拡大理論が不完全.

第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

PA は本質的不完全.

特に, U を PA の無矛盾な c.e. 拡大理論とすると,

$\exists \rho$: Π_1 文 s.t. $U \not\vdash \rho$ かつ $U \not\vdash \neg\rho$.

実効的本質的不完全性

- 独立な文は存在するだけでなく、実効的にとれる。
- W_i はインデックス i を持つ c.e. 集合を表すとする。

定義 (実効的本質的不完全性)

T は**実効的本質的不完全** : \iff 計算可能関数 f が存在して、
もし W_i が T の無矛盾な拡大理論ならば、 $W_i \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$ 。

Rosser 文を用いた証明から次が従う。

第 1 不完全性定理の実効版 (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

PA は実効的本質的不完全。

本発表を通して意識したい問い

PA 拡大理論 U において独立な文を与える実効的な操作が、理論の記述方法に依存しているのか、それとも理論そのものに属する操作と見なせるのか。

有限拡大の本質的不完全性

- PA は本質的不完全なので、もちろんその無矛盾な有限拡大 $PA + \varphi$ も不完全.

定義 (有限本質的不完全性)

T は**有限本質的不完全** : \iff 任意の文 φ に対して, $T + \varphi$ が無矛盾ならば不完全.

本質的不完全



有限本質的不完全

この制限にも意味はある.

命題

以下は同値:

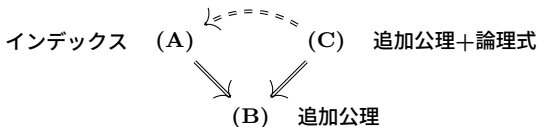
- ① T は有限本質的不完全.
 - ② T の Lindenbaum 代数はアトムを持たないブール代数.
- アトムを持たない可算無限ブール代数は全て同型なので、無矛盾な c.e. 理論 T と U が共に有限本質的不完全ならば、それらの Lindenbaum 代数は同型.

有限本質的不完全性の 3 種類の実効版

有限本質的不完全性の実効版として、次の 3 種類を導入する。

- (A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版
- (B) 追加公理に基づく実効版
- (C) 追加公理と論理式に基づく実効版

独立な文を取るだけなら



(A) c.e. 集合のインデックスによる実効版

有限本質的不完全性の次の形の実効版は、Pour-El (1968) によって導入された。

定義：有限本質的不完全性の実効版 (A)

計算可能関数 f が存在して、
もし W_i が T の無矛盾な有限拡大理論ならば、 $W_i \not\models f(i)$ かつ $W_i \not\models \neg f(i)$ 。

有限と一般に差異はない。

定理 (Pour-El, 1968)

T は (A) を満たす $\iff T$ は実効的本質的不完全。

c.e. 集合のインデックスを考慮すれば、再帰定理を用いて自由度の高い構成ができることがポイント。

Pour-El, Effectively extensible theories, 1968.

(B) 追加公理に基づく実効版

- では、再帰定理を使えなくするとどうなるだろうか。
- 有限本質的不完全性の次の形の実効版は、Jones (1969) によって導入された。

定義：有限本質的不完全性の実効版 (B)

計算可能部分関数 f が存在して、

もし $T + \varphi$ が無矛盾ならば、 $T + \varphi \vDash f(\varphi)$ かつ $T + \varphi \vDash \neg f(\varphi)$ 。

- $T + \varphi = W_i$ となる i を φ から計算できるので、(A) \Rightarrow (B)
- 逆は一般には成立しない。

定理 (Jones, 1969)

(B) を満たすが (A) を満たさない決定可能な理論が存在する。

(3) 追加公理と論理式に基づく実効版

(B) において得られる独立な文 $f(\varphi)$ が必ず Π_n 文になるなら、
 $PA \vdash f(\varphi) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_n 論理式 $\rho(x)$ がとれる。

定義：有限本質的不完全性の実効版 (C)

論理式 $\rho(x)$ が存在して、
もし $T + \varphi$ が無矛盾ならば、 $T + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $T + \varphi \not\vdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ 。

不動点定理が使えるようになり、独立な文を取るだけなら (A) を導く。

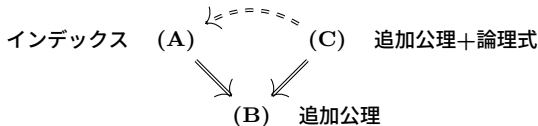
定理 (K. and Visser, 2024)

PA に対して (C) を満たす $\rho(x)$ がとれたら、
計算可能関数 f が存在して、
 W_i が PA の無矛盾な拡大理論ならば、
ある φ について $f(i) = \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ であり、 $W_i \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$ 。

有限本質的不完全性の 3 種類の実効版 再掲

- (A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版
- (B) 追加公理に基づく実効版
- (C) 追加公理と論理式に基づく実効版

独立な文を取るだけなら



① 有限拡大の本質的不完全性

② 外延性

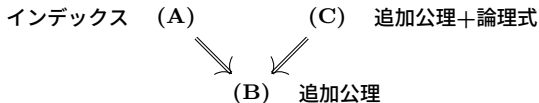
③ 研究結果

有限本質的不完全性の実効版と外延性

考えたい問い

有限本質的不完全性の実効版を与える関数・論理式に対して「外延性」という追加条件を課することができるだろうか？

- (A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版
- (B) 追加公理に基づく実効版
- (C) 追加公理と論理式に基づく実効版



外延性

- (A) $W_i = W_j$ が PA の有限拡大理論ならば $PA \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$
- (B) $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$
- (C) $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$

なぜ外延性？

- PA の無矛盾な有限拡大 U は不完全であるが、 U 上で独立な Π_1 文が、 $U = PA + \varphi$ なのか $U = PA + \psi$ なのかといった、「 U の作り方」に依存しないで得られるのだろうか。

問い

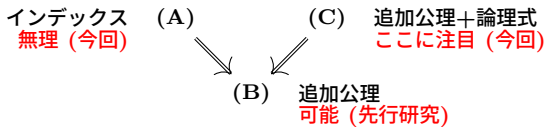
U 上で独立な文を実効的に得る操作は、 U の外延的な性質か、それとも内包的な性質か？

- (A) c.e. 集合のインデックスに基づく
- (B)(C) 追加公理に基づく

は U の作り方のパラメータの違い。

結論を少しだけ

- (A) c.e. 集合のインデックスに基づく実効版
- (B) 追加公理に基づく実効版
- (C) 追加公理と論理式に基づく実効版



外延性

- (A) $W_i = W_j$ が PA の有限拡大理論ならば $PA \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$
- (B) $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$
- (C) $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$

Shavrukov and Visser の定理

(C) の論理式で、弱い意味で外延的なものが存在する.

定理 (Shavrukov and Visser, 2014)

次を満たす $\Delta_2(\text{PA})$ 論理式 $\rho(x)$ が存在する:

- $\text{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば, $\text{PA} + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\text{PA} + \varphi \not\vdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (条件つき外延性): $\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\text{PA} + \varphi \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

この $\rho(x)$ について, $f_\rho(\varphi) := \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \varphi$ とすれば, (B) で外延的なものの存在が従う.

系

- $\text{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば, $\text{PA} + \varphi \not\vdash f_\rho(\varphi)$ かつ $\text{PA} + \varphi \not\vdash \neg f_\rho(\varphi)$.
- (外延性): $\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\text{PA} \vdash f_\rho(\varphi) \leftrightarrow f_\rho(\psi)$.

Hamkins の問題

(C) に関して、次を問うのは自然であろう。

Hamkins の問題 (Hamkins, 2025)

次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

- $PA + \varphi$ が無矛盾ならば、 $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (外延性): $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Hamkins, Nonlinearity and illfoundedness in the hierarchy of large cardinal consistency strength, 2025.

① 有限拡大の本質的不完全性

② 外延性

③ 研究結果

研究結果

Hamkins の問題は (C) に関するもの。

Hamkins の問題 (Hamkins, 2025) 【再掲】

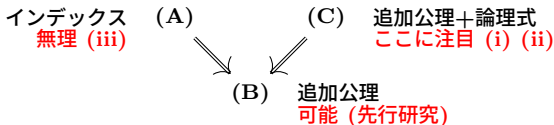
次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

- $PA + \varphi$ が無矛盾ならば、 $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (外延性): $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Hamkins の問題に関連して、次の結果が得られた。

研究結果

- (i) (C) で外延性を満たすものはない。
- (ii) (C) で外延性を弱めると存在する。
- (iii) (A) で外延性を満たすものはない。



(i) 外延性を満たすものはない

- PA で不動点を取れば、(C) で外延性を満たすものはないことが示せる。

命題

次を見たす論理式 $\rho(x)$ は存在しない：

- $PA + \varphi$ が無矛盾ならば、 $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (外延性): $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

そのような $\rho(x)$ があるとして矛盾を導く

- 不動点定理より次を満たす ξ_0 と ξ_1 を取る：
 - $PA \vdash \xi_0 \leftrightarrow \rho(\ulcorner \xi_0 \urcorner)$
 - $PA \vdash \xi_1 \leftrightarrow \neg\rho(\ulcorner \xi_1 \urcorner)$
- 独立性より $PA + \xi_0$ と $PA + \xi_1$ は共に矛盾.
- $PA \vdash \neg\xi_0$ かつ $PA \vdash \neg\xi_1$ なので $PA \vdash \xi_0 \leftrightarrow \xi_1$.
- $PA \vdash \rho(\ulcorner \xi_0 \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \xi_1 \urcorner)$.
- $PA \vdash \xi_0 \leftrightarrow \neg\xi_1$.
- PA の無矛盾性に反する.

(ii) 外延性を弱めると存在する

- 先ほどの証明において外延性は $PA + \xi_0$ が矛盾かつ $PA \vdash \xi_0 \leftrightarrow \xi_1$ に対してだけ用いた。
- この状況のみを取り除いた、「無矛盾外延性」を考えれば、(C) で満たすものの存在が示せる。
- これが Hamkins の問いへの、ある意味での回答。

定理 1

次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する：

- $PA + \varphi$ が無矛盾ならば、 $PA + \varphi \not\vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $PA + \varphi \not\vdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ 。
 - (無矛盾外延性): $PA + \varphi$ が無矛盾かつ $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $PA \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$ 。
-
- 外延性 \Rightarrow 無矛盾外延性 \Rightarrow 条件つき外延性
 - 全ての無矛盾な有限拡大に対する Rosser 文を一様にとってやることで証明する。

(iii) (A) で外延性を満たすものはない

(A) で外延性を満たすものは存在しえない。

定理 2

次の条件を満たす計算可能関数 f は存在しない：

- W_i が PA の無矛盾な有限拡大理論なら $PA \not\vdash f(i)$ かつ $W_i \not\vdash \neg f(i)$.
- $W_i = W_j$ が PA の無矛盾な有限拡大理論なら $W_i \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$.

再帰定理を用いて示せる。

まとめ

まとめ

- 第 1 不完全性定理を、独立な文を「どのように実効的に取れるか」という観点から捉え直し、その取り方に「外延性」（理論の表し方ではなく、理論そのものに依存すること）を要求できるかを考察した。
 - 有限本質的不完全性の三種類の実効版
 - (A) インデックス
 - (B) 追加公理
 - (C) 追加公理+論理式
- は、外延性に関して異なる振る舞いを示す。

結論

第 1 不完全性定理における独立な文の実効的構成には、外延的に扱える形式と、理論の表仕方への依存が避けられない形式がある。