第 1 不完全性定理と外延性

倉橋太志 （神戸大学システム情報学研究科）
Albert Visser (Utrecht 大学) との共同研究

科学基礎論学会 2026 年度 総会と講演会@杏林大学井の頭キャンパス
2026 年 6 月 14 日 (日)

概要

- ペアノ算術 PA の無矛盾な有限拡大理論は不完全であり，各理論には独立な文が存在する．
- **PA** の無矛盾な有限拡大理論の不完全性を，独立な文の取り方という観点から再検討する．
- 本発表では，独立な文の構成に対して，外延性（理論の表し方ではなく，理論そのものに依存すること）をどこまで要求できるかを考える．

- **Kurahashi and Visser, Extensional Independence,** *Zeitschrift für Mathematatische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 受理．
- 倉橋太志, 第 1 不完全性定理と外延性, 京都大学数理解析研究所講究録, 投稿中．

アウトライン

1. 有限拡大の本質的不完全性
2. 外延性
3. 研究結果

1 有限拡大の本質的不完全性

2 外延性

3 研究結果

本質的不完全性

以降 T は無矛盾な c.e. 理論を表すとする.

定義 （本質的不完全性）

T は**本質的不完全** $:\Longleftrightarrow$ T の任意の無矛盾な c.e. 拡大理論が不完全.

第 1 不完全性定理 （Gödel, 1931; Rosser, 1936）

PA は本質的不完全.
特に, U を PA の無矛盾な c.e. 拡大理論とすると,
$\exists\rho$: Π_1 文 s.t. $U \nvdash \rho$ かつ $U \nvdash \neg\rho$.

実効的本質的不完全性

- 独立な文は存在するだけでなく，実効的にとれる．
- W_i はインデックス i を持つ c.e. 集合を表すとする．

定義 （実効的本質的不完全性）

T は**実効的本質的不完全**：$\Longleftrightarrow$ 計算可能関数 f が存在して，
もし W_i が T の無矛盾な拡大理論ならば，$\mathrm{W}_i \nvdash f(i)$ かつ $\mathrm{W}_i \nvdash \neg f(i)$．

Rosser 文を用いた証明から次が従う．

第 1 不完全性定理の実効版（Gödel, 1931; Rosser, 1936）

PA は実効的本質的不完全．

本発表を通して意識したい問い

PA 拡大理論 U において独立な文を与える実効的な操作が，理論の記述方法に依存しているのか，それとも理論そのものに属する操作と見なせるのか．

有限拡大の本質的不完全性

- PA は本質的不完全なので，もちろんその無矛盾な有限拡大 PA $+ \varphi$ も不完全．

定義 (有限本質的不完全性)

T は**有限本質的不完全** : $\Longleftrightarrow$ 任意の文 φ に対して，$T + \varphi$ が無矛盾ならば不完全．

本質的不完全

$\Downarrow$

有限本質的不完全

この制限にも意味はある．

命題

以下は同値：

1. T は有限本質的不完全．
2. T の **Lindenbaum** 代数はアトムを持たないブール代数．

- アトムを持たない可算無限ブール代数は全て同型なので，無矛盾な **c.e.** 理論 T と U が共に有限本質的不完全ならば，それらの **Lindenbaum** 代数は同型．

有限本質的不完全性の 3 種類の実効版

有限本質的不完全性の実効版として，次の **3** 種類を導入する．

(A) **c.e. 集合のインデックスに基づく実効版**

(B) **追加公理に基づく実効版**

(C) **追加公理と論理式に基づく実効版**

独立な文を取るだけなら

$$\begin{tikzcd}
\text{インデックス}\quad \mathbf{(A)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathbf{(C)}\quad \text{追加公理＋論理式} \arrow[ll, Rightarrow, dashed, bend right] \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \mathbf{(B)}\quad \text{追加公理} &
\end{tikzcd}$$

(A) c.e. 集合のインデックスによる実効版

有限本質的不完全性の次の形の実効版は，**Pour-El (1968)** によって導入された．

定義：有限本質的不完全性の実効版 (A)

計算可能関数 f が存在して，
もし W_i が T の無矛盾な有限拡大理論ならば，$\mathrm{W}_i \nvdash f(i)$ かつ $\mathrm{W}_i \nvdash \neg f(i)$．

有限と一般に差異はない．

定理 (Pour-El, 1968)

T は **(A)** を満たす $\iff$ T は実効的本質的不完全．

c.e. 集合のインデックスを考慮すれば，再帰定理を用いて自由度の高い構成ができることがポイント．

Pour-El, Effectively extensible theories, 1968.

(B) 追加公理に基づく実効版

- では，再帰定理を使えなくするとどうなるだろうか．
- 有限本質的不完全性の次の形の実効版は，**Jones (1969)** によって導入された．

定義：有限本質的不完全性の実効版 (B)

計算可能部分関数 f が存在して，
もし $T + \varphi$ が無矛盾ならば，$T + \varphi \nvdash f(\varphi)$ かつ $T + \varphi \nvdash \neg f(\varphi)$．

- $T + \varphi = \mathrm{W}_i$ となる i を φ から計算できるので，**(A)** $\Rightarrow$ **(B)**
- 逆は一般には成立しない．

定理 (Jones, 1969)

(B) を満たすが **(A)** を満たさない決定可能な理論が存在する．

Jones, Effectively retractable theories and degrees of undecidability, 1969.

(3) 追加公理と論理式に基づく実効版

(B) において得られる独立な文 $f(\varphi)$ が必ず Π_n 文になるなら，
$\mathsf{PA} \vdash f(\varphi) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_n 論理式 $\rho(x)$ がとれる．

定義：有限本質的不完全性の実効版 (C)

論理式 $\rho(x)$ が存在して，
もし $T+\varphi$ が無矛盾ならば，$T+\varphi \nvdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $T+\varphi \nvdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

不動点定理が使えるようになり，独立な文を取るだけなら **(A)** を導く．

定理 (K. and Visser, 2024)

PA に対して **(C)** を満たす $\rho(x)$ がとれたら，
計算可能関数 f が存在して，
W_i が PA の無矛盾な拡大理論ならば，
ある φ について $f(i) = \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ であり，$\mathsf{W}_i \nvdash f(i)$ かつ $\mathsf{W}_i \nvdash \neg f(i)$.

K. and Visser, Pour-El's landscape, 2024.

有限本質的不完全性の 3 種類の実効版　再掲

(A) **c.e. 集合のインデックスに基づく実効版**
(B) **追加公理に基づく実効版**
(C) **追加公理と論理式に基づく実効版**

独立な文を取るだけなら

$$\begin{tikzcd} \text{インデックス}\quad \textbf{(A)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \textbf{(C)}\quad \text{追加公理+論理式} \arrow[ll, Rightarrow, dashed, bend right] \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \textbf{(B)}\quad \text{追加公理} & \end{tikzcd}$$

1 有限拡大の本質的不完全性

2 外延性

3 研究結果

有限本質的不完全性の実効版と外延性

考えたい問い

有限本質的不完全性の実効版を与える関数・論理式に対して「外延性」という追加条件を課すことができるだろうか？

(A) **c.e. 集合のインデックスに基づく実効版**
(B) **追加公理に基づく実効版**
(C) **追加公理と論理式に基づく実効版**

$$\begin{tikzcd} \text{インデックス}\ \ \mathbf{(A)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathbf{(C)}\ \ \text{追加公理+論理式} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \mathbf{(B)}\ \ \text{追加公理} & \end{tikzcd}$$

外延性

(A) $\mathsf{W}_i = \mathsf{W}_j$ が PA の有限拡大理論ならば $\mathsf{PA} \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$
(B) $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$
(C) $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$

なぜ外延性？

- PA の無矛盾な有限拡大 U は不完全であるが，U 上で独立な Π_1 文が，$U = \mathsf{PA} + \varphi$ なのか $U = \mathsf{PA} + \psi$ なのかといった，「U の作り方」に依存しないで得られるのだろうか．

問い

U 上で独立な文を実効的に得る操作は，U の外延的な性質か，それとも内包的な性質か？

- **(A)** c.e. 集合のインデックスに基づく
- **(B)(C)** 追加公理に基づく

は U の作り方のパラメータの違い．

結論を少しだけ

(A) **c.e. 集合のインデックスに基づく実効版**
(B) **追加公理に基づく実効版**
(C) **追加公理と論理式に基づく実効版**

$$
\begin{array}{ccc}
\text{インデックス} \quad \textbf{(A)} & & \textbf{(C)} \quad \text{追加公理＋論理式} \\
\text{無理（今回）} & & \text{ここに注目（今回）} \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& \textbf{(B)} \quad \text{追加公理} & \\
& \quad \text{可能（先行研究）} &
\end{array}
$$

外延性

(A) $\mathsf{W}_i = \mathsf{W}_j$ が PA の有限拡大理論ならば $\mathsf{PA} \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$
(B) $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)$
(C) $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$

Shavrukov and Visser の定理

(C) の論理式で，弱い意味で外延的なものが存在する．

定理 (Shavrukov and Visser, 2014)

次を満たす $\Delta_2(\mathsf{PA})$ 論理式 $\rho(x)$ が存在する：

- $\mathsf{PA}+\varphi$ が無矛盾ならば，$\mathsf{PA}+\varphi \nvdash \rho(\ulcorner\varphi\urcorner)$ かつ $\mathsf{PA}+\varphi \nvdash \neg\rho(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- (条件つき外延性)：$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA}+\varphi \vdash \rho(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner\psi\urcorner)$.

この $\rho(x)$ について，$f_\rho(\varphi) := \rho(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \varphi$ とすれば，(B) で外延的なものの存在が従う．

系

- $\mathsf{PA}+\varphi$ が無矛盾ならば，$\mathsf{PA}+\varphi \nvdash f_\rho(\varphi)$ かつ $\mathsf{PA}+\varphi \nvdash \neg f_\rho(\varphi)$.
- (外延性)：$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash f_\rho(\varphi) \leftrightarrow f_\rho(\psi)$.

Shavrukov and Visser, Uniform density in Lindenbaum algebras, 2014.

Hamkins の問題

(C) に関して，次を問うのは自然であろう．

Hamkins の問題 (Hamkins, 2025)

次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

- $\mathsf{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば，$\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \neg \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (外延性)：$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Hamkins, Nonlinearity and illfoundedness in the hierarchy of large cardinal consistency strength, 2025.

1 有限拡大の本質的不完全性

2 外延性

3 研究結果

研究結果

Hamkins の問題は (C) に関するもの．

Hamkins の問題 (Hamkins, 2025) **【再掲】**

次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ は存在するか？

- PA $+ \varphi$ が無矛盾ならば，PA $+ \varphi \nvdash \rho(\ulcorner\varphi\urcorner)$ かつ PA $+ \varphi \nvdash \neg\rho(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- (外延性)：PA $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば PA $\vdash \rho(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Hamkins の問題に関連して，次の結果が得られた．

研究結果

(i) **(C) で外延性を満たすものはない．**
(ii) **(C) で外延性を弱めると存在する．**
(iii) **(A) で外延性を満たすものはない．**

$$\begin{array}{ccc} \text{(A)} & & \text{(C)} \\ & \searrow \;\; \swarrow & \\ & \text{(B)} & \end{array}$$

インデックス (A)
無理 (iii)

(C) 追加公理＋論理式
ここに注目 (i) (ii)

(B) 追加公理
可能 (先行研究)

(i) 外延性を満たすものはない

- PA で不動点を取れば，(C) で外延性を満たすものはないことが示せる．

命題

次を見たす論理式 $\rho(x)$ は存在しない：

- $\mathsf{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば，$\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (外延性)：$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

そのような $\rho(x)$ があるとして矛盾を導く

- 不動点定理より次を満たす ξ_0 と ξ_1 を取る：
  - $\mathsf{PA} \vdash \xi_0 \leftrightarrow \rho(\ulcorner \xi_0 \urcorner)$
  - $\mathsf{PA} \vdash \xi_1 \leftrightarrow \neg\rho(\ulcorner \xi_1 \urcorner)$
- 独立性より $\mathsf{PA} + \xi_0$ と $\mathsf{PA} + \xi_1$ は共に矛盾．
- $\mathsf{PA} \vdash \neg\xi_0$ かつ $\mathsf{PA} \vdash \neg\xi_1$ なので $\mathsf{PA} \vdash \xi_0 \leftrightarrow \xi_1$.
- $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \xi_0 \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \xi_1 \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \xi_0 \leftrightarrow \neg\xi_1$.
- PA の無矛盾性に反する．

(ii) 外延性を弱めると存在する

- 先ほどの証明において外延性は $\mathsf{PA} + \xi_0$ が矛盾かつ $\mathsf{PA} \vdash \xi_0 \leftrightarrow \xi_1$ に対してだけ用いた．
- この状況のみを取り除いた,「無矛盾外延性」を考えれば，(C) で満たすものの存在が示せる．
- これが Hamkins の問いへの，ある意味での回答．

定理 1

次を満たす Π_1 論理式 $\rho(x)$ が存在する：

- $\mathsf{PA} + \varphi$ が無矛盾ならば，$\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$ かつ $\mathsf{PA} + \varphi \nvdash \neg\rho(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- (無矛盾外延性): $\mathsf{PA} + \varphi$ が無矛盾かつ $\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ならば $\mathsf{PA} \vdash \rho(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \rho(\ulcorner \psi \urcorner)$.

- 外延性 $\Rightarrow$ 無矛盾外延性 $\Rightarrow$ 条件つき外延性
- 全ての無矛盾な有限拡大に対する Rosser 文を一様に作ってやることで証明する．

(iii) (A) で外延性を満たすものはない

(A) で外延性を満たすものは存在しえない．

定理 2

次の条件を満たす計算可能関数 f は存在しない：

- W_i が PA の無矛盾な有限拡大理論なら $\mathsf{PA} \nvdash f(i)$ かつ $\mathsf{W}_i \nvdash \neg f(i)$.
- $\mathsf{W}_i = \mathsf{W}_j$ が PA の無矛盾な有限拡大理論なら $\mathsf{W}_i \vdash f(i) \leftrightarrow f(j)$.

再帰定理を用いて示せる．

まとめ

まとめ

- 第 1 不完全性定理を，独立な文を「どのように実効的に取れるか」という観点から捉え直し，その取り方に「外延性」（理論の表し方ではなく，理論そのものに依存すること）を要求できるかを考察した．
- 有限本質的不完全性の三種類の実効版
  - (A) インデックス
  - (B) 追加公理
  - (C) 追加公理＋論理式

  は，外延性に関して異なる振る舞いを示す．

結論

第 1 不完全性定理における独立な文の実効的構成には，外延的に扱える形式と，理論の表仕方への依存が避けられない形式がある．