

証明可能性述語の様相論理に関する最近の進展  
— 第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造 —

倉橋太志 (神戸大学システム情報学研究科)

科学基礎論学会 2026 年度 総会と講演会@杏林大学井の頭キャンパス  
2026 年 6 月 13 日 (土)

## 概要

- 第 2 不完全性定理は、一定の強さを持つ形式体系が自分自身の無矛盾性を証明できない、という主張。  
近年、この定理を複数の定理群として整理する研究が進んでいる。
- 定理の構造の理解には、証明可能性述語  $\text{Pr}_T(x)$  の満たす「導出可能性条件」がどのように本質的に働いているの理解が重要。
- $\text{Pr}_T(x)$  を様相記号  $\Box$  として抽象化することで、導出可能性条件や各種の無矛盾性を様相論理の原理として捉え直すことができる。
- 今回は、第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造について、最近の研究の進展を交えながら概観する。

## 参考文献

H. Kogure and T. Kurahashi,  
Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements,  
*Journal of Logic and Computation*, 受理.

## アウトライン

- ① 証明可能性論理の基本的な話題
- ② 非正規様相論理の原理と第 2 不完全性定理
- ③ 第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造

- 1 証明可能性論理の基本的な話題
- 2 非正規様相論理の原理と第 2 不完全性定理
- 3 第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造

## 証明可能性述語と不完全性定理

以降は  $T$  をペアノ算術 PA の計算可能な拡大理論とする。

## 定義 (証明可能性述語)

任意の文  $\varphi$  について  $(T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner))$   
を満たす論理式  $\text{Pr}_T(x)$  を  $T$  の**証明可能性述語**という。

## 不動点定理

任意の 1 変数論理式  $\varphi(v)$  に対して, 文  $\psi$  が存在して  $\text{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ .

## 第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931)

$\text{PA} \vdash \chi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$  を満たす  $T$  の Gödel 文  $\chi$  をとる。

- $T$  が無矛盾なら  $T \not\vdash \chi$ .
- $T$  が  $\Sigma_1$ -健全なら  $T \not\vdash \neg \chi$ .

$\text{Con}_T := \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$  とする。

## 第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931)

$T$  の Gödel 文  $\chi$  の証明不可能性の証明を形式化できれば  $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$ .  
したがって  $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \chi$  で,  $T$  が無矛盾なら  $T \not\vdash \text{Con}_T$ .

## 導出可能性条件

- しかし、 $T \not\vdash \chi$  の証明を形式化して  $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \chi \urcorner)$  を導くためには、 $\text{Pr}_T(x)$  が単に証明可能性述語であるだけでは不十分。

## 導出可能性条件

**D2:**  $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$ .

**D3:**  $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$ .

- $\text{Pr}_T(x)$  が D2 と D3 を満たせば  $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \chi$  となることが示せ、第 2 不完全性定理が成立する。

更には次が成立する。

## Löb の定理 (Löb, 1955)

$\text{Pr}_T(x)$  が D2 と D3 を満たすとすると、

- $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$  ならば  $T \vdash \varphi$ .
- $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ .

## 重要な点

D2 + D3+ 不動点定理  $\Rightarrow$  Löb

## 導出可能性条件と様相論理

D2 と D3 と形式化された Löb の定理は、それぞれ様相論理の公理 K, 4, GL に対応。

$$\mathbf{K}: \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

$$\mathbf{4}: \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

$$\mathbf{GL}: \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$$

$$\mathbf{D2}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$\mathbf{D3}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

$$\mathbf{Löb}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

## 動機

- 様相論理を通じて、導出可能性条件と第 2 不完全性定理の関係を理解したい。
- 様相論理的構造に対する不動点定理の影響を知りたい。
- Kripke モデルなどの意味論的手法を、不完全性定理の分析に使えるようにしたい。

## 算術的解釈と証明可能性論理

$\text{Pr}_T(x)$  を  $T$  の証明可能性述語とする。

□ を  $\text{Pr}_T(x)$  と読むことで、様相論理式を算術の文へ翻訳する。

## 定義（算術的解釈）

様相論理式から算術の文への写像  $f$  で次の条件を満たすものを、 $\text{Pr}_T(x)$  に基づく**算術的解釈**という：

- $f(\perp)$  は  $0 = 1$
- $f(\neg A)$  は  $\neg f(A)$
- $f(A \circ B)$  は  $f(A) \circ f(B)$  ( $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ )
- $f(\Box A)$  は  $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$

## 定義（証明可能性論理）

$\text{PL}(\text{Pr}_T) := \{A \mid \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$   
を  $\text{Pr}_T(x)$  の**証明可能性論理**という。

## 問

$\text{Pr}_T(x)$  の満たす導出可能性条件は、 $\text{PL}(\text{Pr}_T)$  にどのように反映されるか？

## Solovay の算術的完全性定理

### 事実

- $PL(\text{Pr}_T)$  は一様代入とネセシテーション  $\frac{A}{\Box A}$  で閉じている.
- $\text{Pr}_T(x)$  が D2 を満たせば  $PL(\text{Pr}_T)$  は正規様相論理.
- $\text{Pr}_T(x)$  が D2 と D3 を満たせば  $GL \subseteq PL(\text{Pr}_T)$ .

### 事実

“ $x$  は  $T$  において証明可能” を算術の言語で自然に書き下すことによって得られる  $\Sigma_1$  論理式  $\text{Prov}_T(x)$  は D2 と D3 を満たす.

### 算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$T$  が  $\Sigma_1$ -健全ならば  $PL(\text{Prov}_T) = GL$ .

ここまでが証明可能性論理の標準的解説.

- 1 証明可能性論理の基本的な話題
- 2 非正規様相論理の原理と第 2 不完全性定理**
- 3 第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造

## さらなる導出可能性条件

- 導出可能性条件 D2 と D3 は第 2 不完全性定理を導くために十分であった。
- 条件を弱めると、第 2 不完全性定理の成立にどのような構造が見えるだろうか？

### 導出可能性条件

$$\mathbf{E}: T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

$$\mathbf{M}: T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

$$\mathbf{C}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner)$$

- E, M, C は K より弱い非正規様相論理でよく分析される規則と公理に対応。

## 無矛盾性に関する規則と原理

$\text{Con}_T$  に加えて、次の二つの無矛盾性に関連する規則・原理を導入する。

**Ros:** (Rosser 規則)

$$T \vdash \neg \varphi \Rightarrow T \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$\text{Con}_T^S$ : (図式的無矛盾性)

$$\text{Con}_T^S := \{ \neg(\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)) \mid \varphi \text{ は文} \}.$$

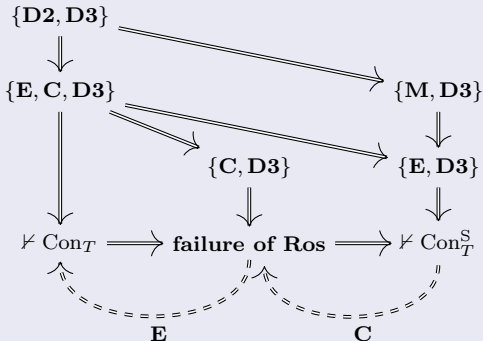
無矛盾性に関する規則と原理にも、様相論理における対応物がある。

算術	様相論理
$\text{Con}_T$	<b>P:</b> $\neg \Box \perp$
<b>Ros</b>	<b>Ros:</b> $\frac{\neg A}{\neg \Box A}$
$\text{Con}_T^S$	<b>D:</b> $\neg(\Box A \wedge \Box \neg A)$

## 導出可能性条件と第 2 不完全性定理

- 弱い導出可能性条件からでも、各種の無矛盾性に関する第 2 不完全性定理が得られる。
- この意味で、これらの条件や無矛盾性を重視する。

### 定理 (K., 2025+)



- 1 証明可能性論理の基本的な話題
- 2 非正規様相論理の原理と第 2 不完全性定理
- 3 第 2 不完全性定理の背後にある様相論理的構造**

## 様相論理による構造の整理

### 導出可能性条件と無矛盾性原理 再掲

$$\mathbf{D2}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$\mathbf{D3}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

$$\mathbf{E}: T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

$$\mathbf{M}: T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

$$\mathbf{C}: T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner)$$

$$\mathbf{Con}_T: \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

$$\mathbf{Ros}: T \vdash \neg \varphi \Rightarrow T \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$\mathbf{Con}_T^S: \{ \neg(\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)) \mid \varphi \text{ は文} \}$$

これらの条件と原理の組合せは、対応する様相論理の階層として整理できる。

(1)	N	ネセシテーションだけの様相論理
(2)	EN	$E: \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ を N に追加
(3)	MN	$M: \frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$ を N に追加
(4)	K	C を MN に追加

## (1) 論理 N

Fitting, Marek, and Truszczyński (1992) の論理 N が分析の最下層.

## 定義 (論理 N)

論理 N は、様相命題論理の言語において、古典命題論理にネセシテーション

$$\text{Nec} : \frac{A}{\Box A}$$

を加えることで得られる論理.

- Fitting, Marek, and Truszczyński によって Kripke 的な関係意味論が与えられている.
- Nec はすべての証明可能性述語  $\text{Pr}_T(x)$  が満たす、次の性質に対応する：

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

したがって、次が成り立つ.

## 命題

全ての証明可能性述語  $\text{Pr}_T(x)$  について、 $N \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ .

(1) N とその拡張の算術的完全性

定理 (K., 2024)

- $N = \bigcap \{ \text{PL}(\text{Pr}_T) \mid \text{Pr}_T(x) \text{ は証明可能性述語} \}$ .
- 特に,  $N = \text{PL}(\text{Pr}_T)$  となる証明可能性述語  $\text{Pr}_T(x)$  がある (算術的完全性).

N の拡張の分析も行っている.

定理 (K., 2024; Kogure and K., 2025+)

次の論理は算術的完全.

- $\text{NP} = N + \neg\Box\perp$  (Con<sub>T</sub> を証明できる Pr<sub>T</sub>(x) の論理)
- $\text{NR} = N + \frac{\neg A}{\neg\Box A}$  (Rosser 証明可能性述語の論理)
- $\text{ND} = N + \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$  (Con<sub>T</sub><sup>S</sup> を証明できる Pr<sub>T</sub>(x) の論理)
- $\text{N4} = N + \Box A \rightarrow \Box\Box A$  (D3 を満たす Pr<sub>T</sub>(x) の論理)
- NP4 (D3 を満たし Con<sub>T</sub> を証明できる Pr<sub>T</sub>(x) の論理)
- NR4 (D3 を満たす Rosser 証明可能性述語の論理)
- ND4 (D3 を満たし Con<sub>T</sub><sup>S</sup> を証明できる Pr<sub>T</sub>(x) の論理)

K., The provability logic of all provability predicates, 2024.

Kogure and K., Modal logical aspects of provability predicates and consistency statements, JLC. 受理.

## 本研究の意義

## 算術的完全性の意味

- 例えば  $N_4$  の算術的完全性は、 $D_3$  がそれ単体では、算術において不動点定理の影響を受けて新たな様相原理を生み出すものではないことを示している。
- 一方、 $K_4$  は  $D_2$  と  $D_3$  に対応するが、算術側では不動点定理により Löb の定理が導かれるため、 $K_4$  自体は算術的完全でない。
- したがって、算術的完全性は、導出可能性条件が算術において**不動点定理に対して安定かどうかを測る指標**と見ることができる。

## 様相論理の役割

- このような安定性を体系的に表現するには、様相論理の枠組みが本質的な役割を果たす。
- これらの証明には  $N$  に対する関係意味論およびその有限フレーム性が大きく寄与している。

## (1) 未解決問題

未解決な部分に「本当に面白い部分」が残っているかもしれない。

- N 上での公理 C:  $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$  の取り扱いがよく分からない。

### 未解決問題

- C を含む論理に対する Fitting, Marek, and Truszczyński の意味論に関する完全性が未解決。
- CN, CNP, CND, CN4, CNP4 は算術的完全？

### 事実

- (K., 2025+) CND4 は算術的完全でない。
- (Mostowski, 1965)  $CNP4 \subseteq PL(Pr_T)$  となる, E を満たさない  $Pr_T(x)$  が存在。

K., Refinements of provability and consistency principles for the second incompleteness theorem, 2025+.

## (2)(3) EN と MN

N にさらに規則を加える.

## (2) EN

$$\text{EN} := \text{N} + \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

- 近傍意味論を用いて, EN およびそのいくつかの拡張の算術的完全性が得られる.
- 一方, EN4 系の算術的完全性には未解決問題が残っている.

Kogure, Provability interpretation of non-normal modal logics having neighborhood semantics, 2025+.

## (3) MN

$$\text{MN} := \text{N} + \frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$$

- 近傍フレームを適切な関係フレームへ変換することで, MN およびその拡張の算術的完全性が得られる.

Kogure and K., Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics, 2023.

(4) 正規様相論理  $K$  と  $KD$ 

正規様相論理については Kripke 意味論が使える。

定理 (K., 2018, 2020, 2024)

次の論理は算術的完全。

- $K = MN + C$  (D2 を満たす  $\text{Pr}_T(x)$  の論理)
- $KD$  (D2 を満たす Rosser 証明可能性述語の論理)

定理 (K., 2018, 2020)

次の条件の少なくとも一つを満たす正規様相論理  $L$  は算術的完全でない。

- $KD4 \cap KD5 \cap KT \subseteq L$
- $KB \cap K5 \subseteq L \subsetneq K + \Box\perp$

K., Arithmetical completeness theorem for modal logic  $K$ , 2018.

K., Arithmetical soundness and completeness for  $\Sigma_2$  numerations, 2018.

K., Rosser provability and normal modal logics, 2020.

K., The provability logic of all provability predicates, 2024.

## まとめ

- 最近の研究により,
  - 第 2 不完全性定理が成立する範囲と破綻する範囲,
  - それが導出可能性条件のどの組合せに依存するのか,をある程度体系的に整理できてきた.
- 特に, 算術的完全性が成立する論理と成立しない論理の境界は, 第 2 不完全性定理の本質を示唆しているように思われる.
- 様相論理を使うべきというよりは, 使わないと見えない構造が実際にある.