スマリヤンの Truth and Provability について

倉橋太志 （神戸大学システム情報学研究科）
冨永浩平 (神戸大学システム情報学研究科 M1) との共同研究

日本数学会 2025 年度年会@早稲田大学
2025 年 3 月 18 日 (火)

概要

- スマリヤンは 2013 年に，文字列を扱う単純な枠組みを導入し第一不完全性定理とタルスキの真理定義不可能性定理の証明の構造を説明する，という記事を書いた．
- 本研究ではまずスマリヤンの枠組みを定式化しなおし，スマリヤンの 3 つの定理の成立状況を整理した．
- 更に，スマリヤンの結果が実際に算術の性質を説明できているのかを調べた．

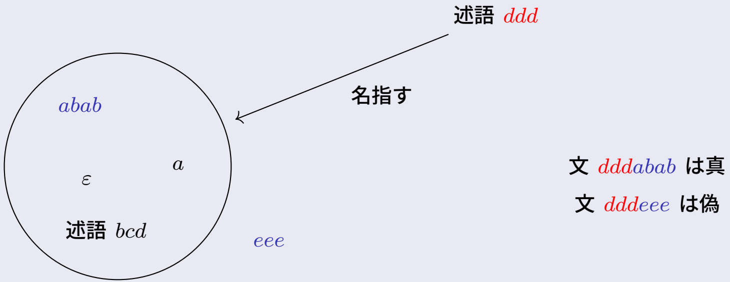
Taishi Kurahashi and Kohei Tominaga, Smullyan's truth and provability, *Journal of Logic and Computation*, 受理.

スマリヤンの枠組みのラフな導入 1

Raymond M. Smullyan, Truth and Provability. ***The Mathematical Intelligencer*, vol. 35, no. 1, pp. 21-24, 2013.**

- 文字列の集合を特別な文字列 (述語) で名指す，という枠組みを導入．
- 述語が名指す集合に文字列が入っているかどうかも文字列 (文) で表現．

$\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$



スマリヤンの枠組みのラフな導入 2

この上に，

1. 否定に対応する記号 n
2. 対角線論法を実現する記号 r (repeat の意)

を導入する．

- スマリヤンはこれだけの単純な枠組みに対して，不動点定理，タルスキの真理定義不可能性定理，ゲーデルの第一不完全性定理に対応する定理が成立することを示した．
- 例えば

スマリヤンの定理 T

どんな述語 H も真な文全体の集合を名指さない．

スマリヤンモデル

まずスマリヤンの枠組みを定式化しなおし，スマリヤンの 3 つの定理の成立状況を整理する．

定義 (スマリヤンモデル)

以下を満たす 3 つ組 $(\Sigma, \mathtt{Pred}, \Phi)$ を**スマリヤンモデル**と呼ぶ．

- Σ は記号の集合であり， Σ^* は Σ の要素の有限列全体の集合．
- $\mathtt{Pred}$ は Σ^* の部分集合であり，以下を満たす．
  (†) 任意の $H \in \mathtt{Pred}$ に対して，$HX \in \mathtt{Pred}$ となる $X \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ が存在しない．
- $\Phi : \mathtt{Pred} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ （名指しの写像）．

- $\mathtt{Pred}$ の要素を**述語**， $H \in \mathtt{Pred}$ と $X \in \Sigma^*$ に対して HX を**文**と呼ぶ．
- $H \in \mathtt{Pred}$ について $H\varepsilon$ すなわち H そのものも文．

定義 (文が真であること)

文 HX が真 $:\Longleftrightarrow$ $X \in \Phi(H)$．
$\mathtt{True} := \{S \mid S$ は真な文 $\}$， $\mathtt{False} := \{S \mid S$ は真でない文 $\}$

nr-スマリヤンモデル

定義 (n-スマリヤンモデル)

以下を満たすスマリヤンモデル $(\Sigma, \mathtt{Pred}, \Phi)$ を n-スマリヤンモデルと呼ぶ：

- $\mathsf{n} \in \Sigma$
- $H \in \mathtt{Pred} \Rightarrow \mathsf{n}H \in \mathtt{Pred}$
- $\Phi(\mathsf{n}H) = \Sigma^* \setminus \Phi(H)$.

定義 (n-スマリヤンモデル)

以下を満たすスマリヤンモデル $(\Sigma, \mathtt{Pred}, \Phi)$ を r-スマリヤンモデルと呼ぶ：

- $\mathsf{r} \in \Sigma$
- $H \in \mathtt{Pred} \Rightarrow \mathsf{r}H \in \mathtt{Pred}$
- $\Phi(\mathsf{r}H) = \{K \in \mathtt{Pred} \mid KK \in \Phi(H)\}$.

n-スマリヤンモデルかつ r-スマリヤンモデルであるスマリヤンモデルを nr-スマリヤンモデルと呼ぶ．

スマリヤンによる 3 つの定理

$\mathtt{Sent}^+$ を，述語以外の文全体の集合とする．
スマリヤンは次の **3** つの定理を示した．

定理 F

r-スマリヤンモデルにおいて，$\forall H \in \mathtt{Pred}\ \exists X \in \mathtt{Sent}^+ \,(X \in \mathtt{True} \iff HX \in \mathtt{True})$.

定理 T

nr-スマリヤンモデルにおいて，$\forall H \in \mathtt{Pred}\,(\Phi(H) \neq \mathtt{True})$.

定理 G

nr-スマリヤンモデルにおいて，

$$\forall H \in \mathtt{Pred}\big(\Phi(H) \subseteq \mathtt{True} \implies \exists X : \text{文}\,(X \notin \Phi(H)\ \&\ \mathtt{n}X \notin \Phi(H))\big).$$

問題

- n，r は定理 **F**，**T**，**G** の成立にどのように影響しているのか？
- これらの定理は対応する算術の定理を説明できているのか？

考察する性質 1

定理 F, T, G それぞれが主張する性質に次のように名前をつける．

$$\textbf{FPT} : \forall H \in \texttt{Pred}\ \exists X \in \texttt{Sent}^{+}\ (X \in \texttt{True} \iff HX \in \texttt{True})$$

$$\textbf{T-Tarski} : \forall H \in \texttt{Pred}(\Phi(H) \neq \texttt{True})$$

$$\textbf{G1} : \forall H \in \texttt{Pred}\Big(\Phi(H) \subseteq \texttt{True} \implies \exists X : \text{文}\,(X \notin \Phi(H)\ \&\ \texttt{n}X \notin \Phi(H))\Big)$$

`False` に言及するタルスキの定理，
`n` を使用しない G1 (modified G1)
に対応する性質も追加．

$$\textbf{F-Tarski} : \forall H \in \texttt{Pred}(\Phi(H) \neq \texttt{False})$$

$$\textbf{mG1} : \forall H \in \texttt{Pred}\Big(\Phi(H) \subseteq \texttt{True} \implies \exists X : \text{文}\,(X \notin \Phi(H)\ \&\ X \in \texttt{True})\Big)$$

考察する性質 2

- $H \in \texttt{Pred}$ について，文以外の文字列 (n など) が $\Phi(H)$ に属する場合，$\Phi(H) \neq \texttt{True}$ や $\Phi(H) \not\subseteq \texttt{True}$ は明らか．
- こういった自明なケースを除いたより強い性質も併せて考察する．
- $\texttt{True}^+ := \texttt{True} \setminus \texttt{Pred}, \quad \texttt{False}^+ := \texttt{False} \setminus \texttt{Pred}$

T-Tarski$^+$: $\forall H \in \texttt{Pred}(\Phi(H) \cap \texttt{Sent}^+ \neq \texttt{True}^+)$

G1$^+$: $\forall H \in \texttt{Pred}\big(\Phi(H) \cap \texttt{Sent}^+ \subseteq \texttt{True}^+ \implies \exists X \in \texttt{Sent}^+(X \notin \Phi(H)\ \&\ \texttt{n}X \notin \Phi(H))\big)$

F-Tarski$^+$: $\forall H \in \texttt{Pred}(\Phi(H) \cap \texttt{Sent}^+ \neq \texttt{False}^+)$

mG1$^+$: $\forall H \in \texttt{Pred}\big(\Phi(H) \cap \texttt{Sent}^+ \subseteq \texttt{True}^+ \implies \exists X \in \texttt{Sent}^+(X \notin \Phi(H)\ \&\ X \in \texttt{True}^+)\big)$

研究成果 1

定理 1

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\mathsf{r}}{\mathbf{FPT}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathbf{F\text{-}Tarski}^{+} \arrow[r, Leftrightarrow, "\mathsf{n}"'] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{T\text{-}Tarski}^{+} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{mG1}^{+} \arrow[r, Leftrightarrow, "\mathsf{n}"'] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{G1}^{+} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \mathbf{F\text{-}Tarski} & \mathbf{T\text{-}Tarski} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathbf{mG1} \arrow[r, Leftrightarrow, "\mathsf{n}"'] & \mathbf{G1}
\end{tikzcd}
$$

また，これ以上矢印を追加できない．

スマリヤンの結果の成立状況がよく分かった．

算術に基づくスマリヤンフレーム

続いて，算術に基づくスマリヤンモデルを導入し，スマリヤンモデルに対する分析が算術の何を表しているかを確認する．

- v のみを自由変数にもつ算術の論理式のゲーデル数全体の集合 Γ とする．

定義

組 $F_A = (\Sigma_A, \mathtt{Pred}_A)$ を以下で定める：

- $\Sigma_A = \{a_i \mid i \in \Gamma\} \cup \{\mathsf{n}, \mathsf{r}\}$
- $\mathtt{Pred}_A = \{X a_i \mid X \in \{\mathsf{n}, \mathsf{r}\}^* \& \ i \in \Gamma\}$

写像 I，J

- $I(a_i) \equiv \varphi_i$ を満たす $\mathtt{Pred}_A$ から算術の一変数論理式への写像 I
- $\mathtt{Sent}_A$ から算術の文への写像 J

を以下の命題を満たすように定義できる（ここが一番頑張ったところ）．

命題

r を含まない任意の $H \in \mathtt{Pred}_A$ と $X \in \mathtt{Sent}_A^+$ に対して

$$J(HX) \equiv I(H)(\ulcorner J(X) \urcorner).$$

命題

- 任意の $H \in \mathtt{Pred}_A$ に対して $I(\mathrm{n}H) \equiv \neg I(H)$.
- 任意の $S \in \mathtt{Sent}_A$ に対して $J(\mathrm{n}S) \equiv \neg J(S)$.

研究成果 2

定義 ($M_{\mathbb{N}}$)

$M_{\mathbb{N}} := (F_A, \Phi_{\mathbb{N}})$ を次で定める：

- $\Phi_{\mathbb{N}}(H) := \{X \in \Sigma_A^* \mid \mathbb{N} \vDash J(HX)\}$.

定理 2

$M_{\mathbb{N}}$ は nr-スマリヤンモデル.

系

$M_{\mathbb{N}}$ は $\mathbf{FPT}, \mathbf{T\text{-}Tarski}^+, \mathbf{G1}^+$ を満たし，したがって次が帰結する：

不動点定理 任意の一変数論理式 $\varphi(v)$ に対して，文 ψ が存在して

$$\mathbb{N} \models \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

タルスキの真理定義不可能性定理

$\mathbb{N}$ 上で真である文の集合 TA は $\mathbb{N}$ 上で定義できない.

弱い第一不完全性定理

$\mathbb{N}$ 上で定義可能で健全な理論は不完全.