

様相論理と中間論理の Lyndon 補間性

倉橋太志 (神戸大学システム情報学研究科)

日本数学会 2025 年度年会@早稲田大学
2025 年 3 月 18 日 (火)

概要

- Craig 補間性 (CIP) を持つ中間命題論理 7 個のうち, 6 個が Lyndon 補間性 (LIP) を持つことが既に知られているが, 残る論理 LV が LIP を持つかどうかは未解決だった.
- 今回は様相論理 S4 のいくつかの無矛盾正規拡大論理に対する LIP の分析を行った.
- 結果として LV が LIP を持つことが得られ, 中間命題論理に対する LIP の分析が完了した.

T. Kurahashi, Lyndon interpolation property for extensions of S4 and intermediate propositional logics. arXiv:2407.00505, 2024.

① 中間論理における補間性

② 様相論理における補間性

中間論理

以降は命題論理のみを扱うことにする.

定義

論理 L が**中間論理**とは, 次を満たすことをいう:

- ① 直観主義命題論理 Int を含む
- ② 古典命題論理 CI に含まれる
- ③ モダス・ポネンスと代入で閉じている

定理 (Jankov, 1968)

中間論理は連続体濃度個ある.

Craig 補完性 (CIP)

論理式 φ に含まれる命題変数全体の集合を $v(\varphi)$ で表す.

定義

論理 L が **Craig 補間性 (CIP)** を持つとは, 任意の論理式 φ, ψ について, $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, ある論理式 θ が存在して, 次を満たすことをいう:

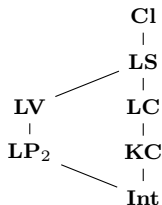
- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \cap v(\psi)$
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$
- ③ $L \vdash \theta \rightarrow \psi$

定理 (Maksimova, 1977)

CIP を持つ中間論理は Int, KC, LC, LP₂, LV, LS, CI のちょうど 7 個.

CIP を持つ中間論理

- **Int**: (直観主義クリプキ) フレーム全体で特徴づけられる論理
- **KC** = **Int** + $(\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi)$: **directed** フレーム
- **LC** = **Int** + $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$: **chain** フレーム
- **LP₂** = **Int** + $(\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi \vee \neg\psi))$: 高さ 2 以下の **rooted** フレーム
- **LV** = **LP₂** + $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi) \vee (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$: 高さ 2 以下, 幅 2 以下の **rooted** フレーム
- **LS** = **LP₂** + **LC**: 高さ 2 以下の **chain** フレーム
- **Cl** = **Int** + $(\varphi \vee \neg\varphi)$: 1 点フレーム



Lyndon 補間性 (LIP)

Craig 補間性を拡張したものに Lyndon 補間性がある。

定義

論理 L が **Lyndon 補間性 (LIP)** を持つとは、任意の論理式 φ, ψ について、 $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば、ある論理式 θ が存在して、次が成り立つことをいう：

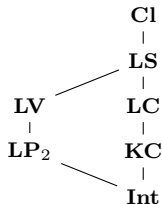
- ① $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi)$;
- ② $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi)$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ④ $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

$v^+(\varphi)$ と $v^-(\varphi)$ はそれぞれ論理式 φ の中に positive, negative に現れる命題変数全体の集合。

中間論理における補間性

LIP を持てば CIP を持つので、中間論理の LIP は、CIP を持つ 7 個 (Int, KC, LC, LP_2 , LV, LS, Cl) だけを調べればよい。

	CIP	LIP
Cl	Craig, 1957	Lyndon, 1959
LS	Maksimova, 1977	Maksimova, 1982
LV	Maksimova, 1977	??? (未解決: Maksimova, 2014)
LP_2	Maksimova, 1977	Shimura, 1992
LC	Maksimova, 1977	Kuznets and Lellmann, 2018
KC	Gabbay, 1971	Maksimova, 1982
Int	Schütte, 1962	Maksimova, 1982



① 中間論理における補間性

② 様相論理における補間性

Gödel の変換と modal companion

- S4 の正規拡大論理に対する補間性は、Gödel の変換を通じて中間論理の補間性と結びつく。

定義 (Gödel の変換)

中間論理の論理式から様相論理式への変換 T を以下で定める：

- $T(p) \equiv \Box p$.
- $T(\perp) \equiv \perp$.
- $T(\varphi \wedge \psi) \equiv (T(\varphi) \wedge T(\psi))$.
- $T(\varphi \vee \psi) \equiv (T(\varphi) \vee T(\psi))$.
- $T(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \Box(T(\varphi) \rightarrow T(\psi))$.
- $T(\neg\varphi) \equiv \Box\neg T(\varphi)$.

定義 (modal companion)

S4 の正規拡大論理 M が中間論理 L の **modal companion**
: $\iff$ 任意の中間論理の論理式 φ について,

$$L \vdash \varphi \iff M \vdash T(\varphi).$$

中間論理と S4 の正規拡大に対する補間性の関係

定理 (Gödel, 1933; McKinsey and Tarski, 1948; Grzegorczyk, 1967)

S4 と Grz は Int の modal companion.

事実

中間論理 L のある modal companion が CIP (LIP) を持つ
 $\Rightarrow L$ は CIP (LIP) を持つ.

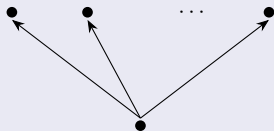
- S4 や Grz の補間性から Int の補間性が従う.
- 逆に, S4 の無矛盾正規拡大論理の CIP を考える際は, Int, KC, LC, LP₂, LV, LS, Cl の modal companion のみを考えれば十分.

定理 (Maksimova, 1979; 1980; 1982; 1987)

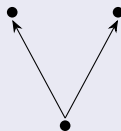
- S4 の無矛盾な正規拡大論理の中で CIP を持つものは高々36 個.
- そのうち 30 個が CIP を持つことが分かっているが, 残り 6 個は未解決.

LP₂, LV, LS の modal companion

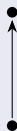
- 今回は中間論理 LP₂, LV, LS の modal companion 各 5 個の計 15 個に注目。



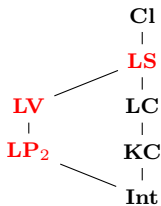
LP₂ のフレーム



LV のフレーム



LS のフレーム



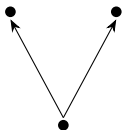
Modal companion の表し方

定義

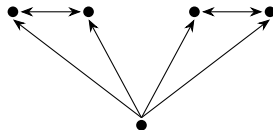
中間論理 L に対して,

$\Gamma(L, m, n)$ は, 次を満たす S4-フレーム全体で特徴づけられる様相論理:

- クラスターを 1 点とみなして得られる半順序が L の有限フレーム
- 先端のクラスターに含まれる点の個数が m 以下
- それ以外のクラスターに含まれる点の個数が n 以下



中間論理 LV のフレーム



様相論理 $\Gamma(LV, 2, 1)$ のフレーム

LP₂, LV, LS の modal companion

Logic	CIP	LIP
$\Gamma(\text{LP}_2, \omega, 1)$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LP}_2, 2, 1)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, \omega)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, 1) = \text{GW}$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LV}, \omega, 1)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LV}, 2, 1)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LV}, 1, \omega)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LV}, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LV}, 1, 1) = \text{GV}$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LS}, \omega, 1) = \text{S4.4}$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LS}, 2, 1)$	Maksimova, 1980	???
$\Gamma(\text{LS}, 1, \omega)$	Maksimova, 1982	???
$\Gamma(\text{LS}, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LS}, 1, 1) = \text{GW.2}$	Schumm, 1976	Maksimova, 1982

LIP は 8 個が不明だった.

主定理

主定理

Logic	CIP	LIP
$\Gamma(\text{LP}_2, \omega, 1)$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LP}_2, 2, 1)$	Maksimova, 1980	✓
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, \omega)$	Maksimova, 1980	(不成立)
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LP}_2, 1, 1) = \text{GW}$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LV}, \omega, 1)$	Maksimova, 1980	✓
$\Gamma(\text{LV}, 2, 1)$	Maksimova, 1980	✓
$\Gamma(\text{LV}, 1, \omega)$	Maksimova, 1980	(不成立)
$\Gamma(\text{LV}, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LV}, 1, 1) = \text{GV}$	Maksimova, 1980	✓
$\Gamma(\text{LS}, \omega, 1) = \text{S4.4}$	Schumm, 1976	Shimura, 1992
$\Gamma(\text{LS}, 2, 1)$	Maksimova, 1980	✓
$\Gamma(\text{LS}, 1, \omega)$	Maksimova, 1980	(不成立)
$\Gamma(\text{LS}, 1, 2)$	Maksimova, 1980	(不成立) Maksimova, 1982
$\Gamma(\text{LS}, 1, 1) = \text{GW.2}$	Schumm, 1976	Maksimova, 1982

証明の方針

LIP を持つこと

各論理について，対応するクリプキフレームの形などを考慮して個別に議論した．

LIP を持たないこと

$\Gamma(\mathbf{LP}_2, 1, \omega)$, $\Gamma(\mathbf{LV}, 1, \omega)$, $\Gamma(\mathbf{LS}, 1, \omega)$ において
論理式

$$p \wedge \Box(\Box\neg p \vee p) \rightarrow \Box(p \vee q \vee \Box\neg q)$$

は証明できるが Lyndon interpolant を持たない．

主定理の系

特に LV の modal companion である GV の LIP が示せたので、次が得られる。

主定理の系

LV は LIP を持つ。

これで中間命題論理に対する LIP の分析が完了した。

	CIP	LIP
CI	Craig, 1957	Lyndon, 1959
LS	Maksimova, 1977	Maksimova, 1982
LV	Maksimova, 1977	✓
LP ₂	Maksimova, 1977	Shimura, 1992
LC	Maksimova, 1977	Kuznets and Lellmann, 2018
KC	Gabbay, 1971	Maksimova, 1982
Int	Schütte, 1962	Maksimova, 1982