部分的な保存性を満たす文について 2

小暮晏佳 (神戸大学システム情報学研究科 M2)
倉橋太志 (神戸大学システム情報学研究科) との共同研究

日本数学会 2025 年度秋季総合分科会
名古屋大学 東山キャンパス 2025 年 9 月 18 日

はじめに

概要

- 部分保存的な文は，独立な文の一種として，第 1 不完全性定理の文脈で分析されてきた．
- Solovay は，φ と $\neg\varphi$ が T 上それぞれ Π_n-保存的，Σ_n-保存的となる Σ_n 文 φ の存在を示している．
- 今回，Solovay による二重に部分保存的な文に関する結果を，より一般的な枠組みのもとで分析した．

H. Kogure and T. Kurahashi, Doubly partially conservative sentences, arXiv:2503.12373.

1. 二重に保存的な文
2. 得られた結果

1. 二重に保存的な文
2. 得られた結果

部分保存的な文

以降，理論 T, U を PA の無矛盾な c.e. 拡大とし，Γ, Λ, Θ を文のクラスとする．

定義

- 文 φ が T 上 Γ-保存的 : $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \gamma \in \Gamma\ (T + \varphi \vdash \gamma \Longrightarrow T \vdash \gamma)$.
- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \mid \varphi$ は T 上 Γ-保存的 $\}$.

Remark

1. $T \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)$（自明に保存性を満たす）.
2. $\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \Longrightarrow T \nvdash \neg\varphi$.
3. $\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)$ かつ $T \nvdash \varphi \Longrightarrow T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$.

非自明に Γ-保存的な文は，強い性質を持つ独立な文．

定理 (Guaspari, 1979)

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ に対し，

$$\exists \varphi \in \Gamma^d \text{ s.t. } \varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)\ \&\ T \nvdash \varphi.$$

ここで $\Sigma_n^d = \Pi_n$，$\Pi_n^d = \Sigma_n$ とする．

二重に保存的な文

- φ と $\neg\varphi$ の両方の保存性を保証する二重に保存的な文も T 上非自明に Γ-保存的な文の強化となる．
- 以降，$n > 0$ とする．

定義

- 文 φ が T 上 (Γ, Λ)-保存的 : $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)$ かつ $\neg\varphi \in \mathrm{Cons}(\Lambda, T)$．
- $\mathrm{DCons}(\Gamma, \Lambda; T) := \{\varphi \mid \varphi$ は T 上 (Γ, Λ)-保存的.$\}$

- T が Σ_1-健全のとき，Con_T は T 上 Σ_1-保存的な Π_1 文で，$\neg\mathrm{Con}_T$ は T 上 Π_1-保存的な Σ_1 文．
- Solovay は上の例のより一般的な結果を示している．

定理 (Solovay)

$\Sigma_n \cap \mathrm{DCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$．

Solovay の結果は Guaspari の定理の強化となっている．

二重に部分保存的な文のバリエーション

- (Π_n, Σ_n)-保存的な Σ_n 文に限らず，より一般のクラス (Γ, Λ) に対して，T 上で保存的な Θ 文の分析もなされている．
- $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ を，Σ_n 論理式のブール結合全体からなるクラス，$\Delta_n(U)$ を U 上で Σ_n 論理式，Π_n 論理式と同値になる論理式全体のクラスとする．

定理 (Hájek, 1979)

$\Delta_{n+1}(\mathsf{PA}) \cap \mathrm{DCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \Pi_n; T) \neq \emptyset$.

さらに，組み合わせによっては保存的な文が存在しない場合もある．

事実 (Lindström)

- T が Σ_n-健全ならば，$\Delta_{n+1}(\mathsf{PA}) \cap \mathrm{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) = \emptyset$.
- $\mathcal{B}(\Sigma_n) \cap \mathrm{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) = \mathcal{B}(\Sigma_n) \cap \mathrm{DCons}(\Pi_n, \Pi_n; T) = \emptyset$.

二重に遺伝的に保存的な文

二重に遺伝的な保存性は，二重の保存性の強化．

定義

- 文 φ が T 上遺伝的に (Γ, Λ)-保存的
  $:\overset{\text{def}}{\iff} \varphi \in \bigcap\{\mathrm{DCons}(\Gamma, \Lambda; U) \mid T \vdash U \vdash \mathsf{PA}\}$.
- $\mathrm{HDCons}(\Gamma, \Lambda; T) := \{\varphi \mid \varphi$ は T 上遺伝的に (Γ, Λ)-保存的 $\}$.

定理 (Solovay)(再掲)

$\Sigma_n \cap \mathrm{DCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.

- Smoryński (1981) において，$\Sigma_n \cap \mathrm{HDCons}(\Pi_n, \Sigma_n; U)$ はまったく分析されていないことが言及されている．
- 一般の理論に対して，Solovay の結果を遺伝的な保存性に強化することはできない．

事実 (Lindström)

ある理論 U が存在して，$\Sigma_n \cap \mathrm{HDCons}(\Pi_n, \Sigma_n; U) = \emptyset$.

1. 二重に保存的な文
2. 得られた結果

今回の研究

二重に保存的な文，二重に遺伝的に保存的な文の様々なバリエーションについて分析を行った．

Γ, Λ として $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n, \Sigma_n {\downarrow} \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n)$ を動かし，
Θ として，$\Sigma_n, \Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n, \mathcal{B}(\Sigma_n), \Delta_{n+1}(\mathsf{PA})$ を動かした場合の

- T 上 (Γ, Λ)-保存的な Θ 文が存在する理論 T の必要十分条件，
- T 上 遺伝的に (Γ, Λ)-保存的な Θ 文が存在する理論 T の必要十分条件

について分析を行った．

得られた結果 (二重に保存的な文の分析 1)

(Γ, Λ)-保存的な Θ 文が存在する必要十分条件について分析を行った．

主定理 (K. and Kurahashi)

T 上 (Γ, Λ)-保存的な Θ 文が存在する理論 T の必要十分条件を得た．

任意の理論 T に対して存在が示せる場合もある．

定理 (K. and Kurahashi)

$(\Sigma_n \wedge \Pi_n) \cap \mathrm{DCons}(\Sigma_n{\downarrow}\Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n; T) \neq \emptyset$.

得られた結果 (二重に保存的な文の分析 2)

$\Delta_{n+1}(\mathrm{PA}) \cap \mathrm{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$ となる理論 T の必要十分条件が，
ゲーデルの ω-無矛盾性に関連する条件と対応することが分かった．

定義

T が U 上 Γ-矛盾 : $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varphi(x) \in \Gamma$, $U \vdash \exists x \varphi(x)$ & $\forall k \in \omega$, $T \vdash \neg \varphi(\overline{k})$.

定理 (K. and Kurahashi)

$T \vdash U$ のとき，次は同値：

- T は U 上 Σ_{n+1}-矛盾する．
- $\Delta_{n+1}(U) \cap \mathrm{DCons}(\Sigma_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$.
- $\Delta_{n+1}(U) \cap \mathrm{DCons}(\mathcal{B}(\Sigma_n), \mathcal{B}(\Sigma_n); T) \neq \emptyset$.
- $U + \mathrm{RFN}_{\Pi_n}(T)$ は Σ_2-健全でない．

- $\mathrm{RFN}_{\Pi_n}(T) :\equiv \forall x(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{True}_{\Pi_n}(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{True}_{\Pi_n}(x))$ とする．
- 最後の項目は Smoryński による Σ_{n+1}-矛盾の反映原理に基づく特徴づけの改良版．

得られた結果 (二重に遺伝的に保存的な文の分析)

主定理 (K. and Kurahashi)

T 上 遺伝的に (Γ, Λ)-保存的な Θ 文が存在する理論 T の必要十分条件を得た．

例えば，具体的な (Γ, Λ) に対して次の同値性を得た．

定理 (K. and Kurahashi)

次は同値：

- T が PA 上 $\Sigma_n{\downarrow}\Pi_n$-保存的．
- $\Sigma_n \cap \mathrm{HDCons}(\Pi_n, \Sigma_n; T) \neq \emptyset$．
- $\mathrm{HDCons}(\Delta_n, \Delta_n; T) \neq \emptyset$．

- 二重に保存的な文の存在条件を体系的に整備した．
- その存在条件と様々な概念との関連性を明らかにした．

参考文献

1. David Guaspari. Partially conservative extensions of arithmetic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 254:47–68, 1979.
2. Petr Hájek, On partially conservative extensions of arithmetic. In Maurice Boffa, Dirk van Dalen, and Kenneth McAloon, editors, *Logic Colloquium '78: Proceedings of the colloquium held in Mons, August 1978, volume 97 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 225–234. North-Holland, 1979.
3. H. Kogure and T. Kurahashi, A variety of partially conservative sentences, arXiv:2412.08208.
4. H. Kogure and T. Kurahashi, Doubly partially conservative sentences, arXiv:2503.12373.
5. Per Lindstöm, Aspects of Incompleteness, volume 10 of *Lecture Notes in Logic*. A K Peters, 2nd edition, 2003.
6. Craig Smoryński, ω-consistency and reflection. *In Colloque International de Logique (Clermont Ferrand, 1975)*, volume 249 of *Colloq. Internat. CNRS*, pages 167–181. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1977