部分的な保存性を満たす文について 1

倉橋太志　（神戸大学システム情報学研究科）
小暮晏佳 (神戸大学システム情報学研究科 M2) との共同研究

日本数学会 2025 年度秋季総合分科会@名古屋大学
2025 年 9 月 18 日 (木)

概要

- 部分的な保存性を満たす文は不完全性定理の研究において分析されており，また応用されてきた．
- 今回，部分的な保存性のいろいろなバリエーションを満たす文の存在に関する Guaspari の問題（1979 年）を肯定的に解決することができた．

Haruka Kogure and Taishi Kurahashi, A variety of partially conservative sentences, arXiv:2412.08208, 投稿中.

Γ-保存的な文

- T は PA を含む無矛盾な c.e. 理論とする．
- Γ は文のクラスとする．

定義

文 φ が T 上で**非自明に Γ-保存的**
$:\iff T \nvdash \varphi$ かつ $\forall \psi \in \Gamma\, (T + \varphi \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \psi)$.

事実 (Kreisel 1962)

$\neg \mathrm{Con}_T$ は T 上で Π_1-保存的．

- $T \nvdash 0 = 1$ より $T + \neg \mathrm{Con}_T \nvdash 0 = 1$ だから，$T \nvdash \mathrm{Con}_T$ が帰結．
- $T \vdash \neg \mathrm{Con}_T$ の場合，この事実は自明に成立．
- T が Σ_1-健全なら $T \nvdash \neg \mathrm{Con}_T$ なので $\neg \mathrm{Con}_T$ は T 上で非自明に Π_1-保存的．

Guaspari の定理 1

無矛盾な T 上で非自明に Γ-保存的な文は存在するだろうか．

事実

φ を T の Π_1 **Rosser** 文とすると，$\neg\varphi$ は T 上で Π_1-保存的ではない．

$\Sigma_n^d = \Pi_n$，$\Pi_n^d = \Sigma_n$ とする．

定理 (Guaspari 1979)

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ とすると，T 上で非自明に Γ-保存的な Γ^d 文が存在する．

更に **Guaspari** はこの定理を **3** つの追加性質を考慮して拡張した．

追加の性質

Guaspari の拡張を見るために，$T \nvdash \neg\mathrm{Con}_T$ となる場合の $\neg\mathrm{Con}_T$ に再び注目する．

- $T \vdash U \vdash \mathsf{PA}$ を満たす全ての理論 U について，$\neg\mathrm{Con}_T$ は U 上で Π_1-保存的（遺伝的に Π_1-保存的）．
- $\neg\mathrm{Con}_T$ は PA 上で Σ_1-保存的ではない（exact に Π_1-保存的）．
- $\neg\mathrm{Con}_T$ は Σ_1 文だが T 上で Π_1 文と同値ではない（本質的に Σ_1）．

定義

- 文 φ が T 上で遺伝的に Γ-保存的
  $:\iff$ $T \vdash U \vdash \mathsf{PA}$ を満たす全ての理論 U について，φ は U 上で Γ-保存的．
- 文 φ が T 上で exact に Γ-保存的
  $:\iff$ φ が T 上で Γ-保存的であるが，
  $\Gamma' \not\subseteq \Gamma$ を満たすどんな Γ' についても φ は T 上で Γ'-保存的ではない．
- 文 φ が T 上で本質的に Θ
  $:\iff$ φ が Θ 文であるが，
  $\Theta \not\subseteq \Theta'$ を満たすどんな Θ' についても φ は T 上で Θ' 文と同値ではない．

Guaspari の定理 2

定理 (Guaspari 1979)

$\{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 1\}$ 上の意味のある組 (Γ, Θ) に対して，
T 上で exact に遺伝的に Γ-保存的な T 上で本質的に Θ である文が存在する．

しかし，Γ と Θ がより多くのクラスを動く場合には状況は変化する．

問題 (Guaspari 1979)

$\{\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n \mid n \geq 1\}$ 上の意味のある組 (Γ, Θ) に対して，
T 上で exact に遺伝的に Γ-保存的な T 上で本質的に Θ である文は存在するか？

$\Sigma_n{\downarrow}\Pi_n$-保存性

Guaspari の問題を，Δ_n を加えるだけではなく，より多くのクラスを考慮に入れたうえで分析を進めた．

- $\Sigma_n \wedge \Pi_n := \{\sigma \wedge \pi \mid \sigma \in \Sigma_n, \pi \in \Pi_n\}$.
- $\mathcal{B}(\Sigma_n)$: Σ_n 文のブール結合全体.

新たに次の概念を導入した（次の発表でこの概念の重要性を示す）．

定義

文 φ が T 上で $\Sigma_n{\downarrow}\Pi_n$-保存的
$:\iff \forall \sigma \in \Sigma_n\, \forall \pi \in \Pi_n\, (T + \varphi \vdash \sigma \wedge \pi \Rightarrow T \vdash \sigma \vee \pi)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Delta_{n+1}\text{-保存的} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-保存的} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \Sigma_n \land \Pi_n\text{-保存的} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\Sigma_n\text{-保存的} \arrow[dr, Rightarrow] & & \Pi_n\text{-保存的} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \Sigma_n{\downarrow}\Pi_n\text{-保存的} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \Delta_n\text{-保存的} &
\end{tikzcd}
$$

各 Γ に対して，クラス Γ^* を次で定める．

$$\Gamma^* := \begin{cases} \Delta_{n+1}(\mathsf{PA}) & \textbf{if } \Gamma = \mathcal{B}(\Sigma_n), \\ \mathcal{B}(\Sigma_n) & \textbf{if } \Gamma = \Sigma_n \wedge \Pi_n, \\ \Sigma_n & \textbf{if } \Gamma = \Pi_n, \\ \Pi_n & \textbf{if } \Gamma = \Sigma_n, \\ \Sigma_n \wedge \Pi_n & \textbf{if } \Gamma = \Sigma_n {\downarrow} \Pi_n, \\ \Sigma_n & \textbf{if } \Gamma = \Delta_n. \end{cases}$$

主定理 1 (Guaspari の問題の肯定的解決)

任意の $\Theta \supseteq \Gamma^*$ について，
$(\Gamma, \Theta) \neq (\Sigma_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n), (\Pi_n, \Sigma_n \wedge \Pi_n)$ ならば
T 上で exact に遺伝的に Γ-保存的な T 上で本質的に Θ である文が存在する．

実はこの定理は，2 つの理論に関する次の定理を証明することで導いた．

主定理 2

$T + \mathrm{Th}_{\mathcal{B}(\Sigma_n)}(U)$ が無矛盾ならば，
T と U 上で同時に exact に遺伝的に Γ-保存的な Γ^* 文が存在する．